

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET**



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : Structure

Présenté par :

- **DERRER M'hamed**
- **BENAIDA Azzeddine**

**THEME**

**Utilisation De La Fonction D'Airy Dans L'analyse**  
**Du Comportement Statique Des Poutres Consoles**

**Soutenu publiquement le : 07/07/2019 devant le jury composé de :**

**Dr : TLIDJI .Y**

Président

**Dr : ABDELAZIZ H.H**

Rapporteur

**Dr : DRAICHE.K**

Examineur

**Mm : KHELIFA. Z**

Examineur

Année universitaire: 2018/2019

# Remerciements

*Tout d'abord, nous remercions le dieu le tous puissant qui nous a donné la force d'accomplir ce premier fruit de notre étude.*

*Nous tenons à adresser tous nos remerciements à tout les enseignants De département de Génie civil qui ont contribues à notre formation et aux membres de jury et à sont président pour l'effort qu'ils ont fournis pour étudier notre travail et le juger de sa qualité.*

*Et nous remercions notre encadreur Dr: H.heni Abdelaziz pour ces conseils et son aide précieux pour pouvoir avoir réussie à achever notre mémoire.*

*Nos remerciements les plus chaleureux à ceux qui nous ont aidé et orienté.*



---

# Dédicaces

*Je tiens à remercier le Bon Dieu qui nous a donné la foi et la sagesse afin de réussir et de choisir le bon chemin.*

*C'est avec un vif plaisir que je saisi à l'occasion de l'obtention du*

*Diplôme pour dédier ce modeste travail à :*

*Mes chers parents qui n'ont pas manqué durant toute ma vie scolaire et Universitaire à m'encourager de leurs précieux conseils, qu'ils soient remerciés pour leur sacrifice en trouvant ma gratitude et mon profond respect.*

*À tous mes frères et mes sœurs qui n'ont pas manqué de m'encourager.  
À toute la famille et ma chère fille : Bouchra Manar.*

*Et à mon encadreur : **Dr. H. Heni Abdelaziz** et Je tiens à dresser tous nos remerciements à tous les enseignants Du département de génie civil qui ont contribué à notre formation  
Sans oublier tous mes amis (e).....(s) et toute la promotion 2018/2019.*



---

*M'hamed*



# Dédicaces

*Je tiens à remercier le Bon Dieu qui nous a donné la foi et la sagesse afin de réussir et de choisir le bon chemin.*

*C'est avec un vif plaisir que je saisi à l'occasion de l'obtention du*

*Diplôme Master 02 pour dédier ce modeste travail à :*

*Mes chers parents qui n'ont pas manqué durant toute ma vie scolaire et  
Universitaire à m'encourager de leurs précieux conseils, qu'ils soient  
remercié pour leur sacrifice en trouvent ma gratitude et mon profond  
respect.*

*Atouts mon frère et mes sœurs qui n'ont pas manqué de m'encourager.*

*A tout la famille ; ma femme, mes chères filles : Fatima marwa &  
Inasse Kamilia .*

*Et à mon encadreur Dr. H.Heni Abdelaziz et Je tiens à  
dresser tous Nos remerciement à tous les enseignants De département de  
génie civil qui ont contribues à notre formation.*

*Sans oublier tous mes amis (e)....(s) et toute la promotion 2018/2019.*



# Azzeddine

# Résumé :

Ce travail consiste à traiter le problème de contraintes plane d'une poutre console soumise à des charges en sollicitation de flexion .Dans la résolution de ce type de problème on est intéressé d'utiliser une fonction appelée d'Airy qui prend la forme polynomiale en coordonnées cartésienne du plan de la poutre.

Le choix du degré du polynôme dépend des conditions de chargement imposées sur le contour de la poutre. A cet effet, nous avons considéré trois différents chargements à savoir concentré et uniformément ou linéairement réparties.

Une solution analytique est développée sur la base de la proposition de la fonction d'Airy relative à cette réponse et par la suite l'état des contraintes se détermine par une simple dérivation de la fonction considérée.

Des exemples d'application sont présentés en vue de prédire la distribution d'une part des contraintes à travers de la hauteur et d'autre part des déplacements le long de la poutre console.

**Mots-clés : Fonction d'Airy, Contraintes, Déplacements, Elasticité plane, Poutre console.**

# **Abstract:**

This work consists in treating the problem of plane stresses of a cantilever beam subjected to loads in bending. In the resolution of this type of problem one is interested to use a function called of Airy which takes the polynomial form in Cartesian coordinates of the plane of the beam.

The choice of the degree of the polynomial depends on the loading boundary conditions of the beam. For this purpose, we considered three different loadings namely concentrated and uniformly or linearly distributed.

An analytical solution is developed on the basis of the proposition of the Airy function relating to this response and subsequently the state of the stress is determined by a simple derivation of the function considered.

Application examples are presented in order to predict the distribution on the one hand of the stress across the height and on the other hand displacements along the cantilever beam.

**Keywords: Airy Function, stress, Displacements, Flat Elasticity, cantilever Beam.**

## ملخص

يتكون هذا العمل من معالجة مشكلة الإجهاد على مستوى الرافدة ذات مسند مدمج وحدة التحكم التي تتعرض لأحمال في إجهاد الانحناء ، وفي حل هذا النوع من المشاكل ، يهتم المرء باستخدام دالة تسمى ايري والتي تأخذ شكل متعدد الحدود في الإحداثيات الديكارتية.

يعتمد اختيار درجة كثير الحدود على شروط التحميل المفروضة على محيط الرافدة. لهذا الغرض درسنا ثلاث شحنات مختلفة وهي مركزة وموزعة بشكل موحد أو خطي.

تم تطوير حل تحليلي على أساس اقتراح وظيفة ايري المتعلقة بهذا الرد وبالتالي يتم تحديد حالة الإجهاد من خلال اشتقاق بسيط للوظيفة التي تم النظر فيها.

يتم تقديم أمثلة للتطبيق من أجل التنبؤ بالتوزيع من جهة الاجهاد عبر الإزاحة ومن ناحية أخرى عمليات الإزاحة على طول الرافدة.

الكلمات المفتاحية: دالة ايري ، القيود ، النزوح ، مرونة مسطحة ، رافدة مدمجة.

# Notation et Symbole

$\sigma$  : Contrainte normale.

$\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  : Contrainte principale

$\tau$  : Contrainte tangentielle.

$\tau_{\max}$  : Contrainte tangentielle max.

$\vec{T}$  : Vecteur contrainte.

$\vec{t}$  : Vecteur unitaire.

$\theta$  : L'angle de rotation.

$\vec{U}(M)$  : Vecteur déplacement.

$[\epsilon]$  : Tenseur de déformation.

$\epsilon$  : Déformation.

$\delta_{ij}$  : le tenseur de Kronecker.

$E$  : Le module de Young.

$\nu$  : Le coefficient de Poisson.

$\lambda$  Et  $G$  : Sont les coefficients de Lamé.

$\Phi$  : Fonction D'AIRY.

$U$  Et  $V$  : Composantes de déplacements

$f_{vcs}$  : charge vertical uniforme répartie

appliquées sur la face supérieure

$f_{vci}$  : charge vertical uniforme répartie

appliquée sur la face inférieure

$f_{vls}$  : charge vertical linéaire répartie

appliquée sur la face supérieure

$f_{vli}$  : charge vertical linéaire répartie

appliquée sur la face inférieure

$f_{tcs}$  : charge tangentielle uniforme

répartie appliquées sur la face supérieure

$f_{tci}$  : charge tangentielle uniforme

répartie appliquées sur la face inférieure

$f_{tls}$  : charge tangentielle linéaire

répartie appliquées sur la face supérieure

$f_{tli}$  : charge tangentielle linéaire

répartie appliquées sur la face inférieure

$Ne$ : effort normal

$Me$ : moment de flexion

$Qe$ : force tangentielle

# SOMMAIRE

## RESUME

## ABSTRACT ملخص

## INTRODUCTION GENERALE

## CHAPITRE I: RAPPELS SUR LA THEORIE D'ELASTICITE

<b>I.1) Introduction :</b> .....	<b>1</b>
<b>I.2) Contraintes :</b> .....	<b>1</b>
<b>I.2.1) Etat des contraintes en un point :</b> .....	<b>1</b>
<b>I.2.2) Vecteur contrainte en un point pour une direction <math>\vec{n}</math>:</b> .....	<b>2</b>
<b>I.2.3) Contrainte normale et tangentielle :</b> .....	<b>2</b>
<b>I.2.4) Contraintes principales et directions principales:</b> .....	<b>3</b>
<b>I.2.5) Etats de contraintes particuliers:</b> .....	<b>5</b>
<b>a) Etat de contrainte uniaxial:</b> .....	<b>5</b>
<b>b) Etat de cisaillement simple:</b> .....	<b>6</b>
<b>c) Etat de contraintes planes:</b> .....	<b>6</b>
<b>d) Etat de contrainte dans une section droite de poutre:</b> .....	<b>7</b>
<b>I.2.6) Cercles de Mohr:</b> .....	<b>8</b>
<b>I.2.6.1) Cercles de Mohr des contraintes:</b> .....	<b>8</b>
<b>I.2.6.2) Construction de Mohr :</b> .....	<b>11</b>
<b>I.2.7) Etat des contraintes autour d'un point sur la surface d'un solide:</b> .....	<b>11</b>
<b>I.3) Déplacements – Déformations :</b> .....	<b>13</b>
<b>I.3.1) Champ des déplacements :</b> .....	<b>13</b>
<b>I.3.2) Etat des déformations au voisinage d'un point:</b> .....	<b>13</b>
<b>I.3.3) Allongement unitaire en A et pour une direction <math>\vec{q}</math> :</b> .....	<b>14</b>
<b>I.3.4) Glissement. Distorsion:</b> .....	<b>15</b>
<b>I.3.5) Déformations principales et directions principales:</b> .....	<b>15</b>
<b>I.3.6) Etat de déformations planes:</b> .....	<b>15</b>
<b>I.4) Loi de comportement :</b> .....	<b>16</b>
<b>I.5) Types particuliers de problème d'élasticité :</b> .....	<b>17</b>
<b>I.5.1) Contraintes planes du plan (x1,x2) :</b> .....	<b>17</b>
<b>I.5.2) Déformations planes :</b> .....	<b>18</b>

## **CHAPITRE II : RESOLUTION DES PROBLEMES D'ELASTICITE**

<b>II.1) Introduction:</b> .....	<b>19</b>
<b>II.2) Les deux états plans d'élasticité:</b> .....	<b>19</b>
<b>II.2.1) Etat plan de contrainte :</b> .....	<b>19</b>
<b>II.2.2) Etat plan de déformation:</b> .....	<b>20</b>
<b>II.3) Les équations fondamentales de l'élasticité plane:</b> .....	<b>22</b>
<b>II.3.1) Les équations d'équilibre :</b> .....	<b>22</b>
<b>II.3.1.1) Les équations différentielles d'équilibre:</b> .....	<b>22</b>
<b>II.3.1.2) Les conditions de contour:</b> .....	<b>22</b>
<b>II.3.1.3) Changement d'axe:</b> .....	<b>23</b>
<b>II.3.2) L'équation de compatibilité et le potentiel des contraintes:</b> .....	<b>23</b>
<b>II.4) LA FONCTION D'AIRY:</b> .....	<b>24</b>
<b>II.4.1) Forces de volume nulles:</b> .....	<b>24</b>
<b>II.4.2) Forces de volume dérivant d'un potentiel:</b> .....	<b>25</b>
<b>II.5) Application A La Theorie Des Poutres:</b> .....	<b>26</b>
<b>II.5.1) Solution de l'équation biharmonique par des polynômes:</b> .....	<b>26</b>
<b>II.5.2) Problèmes dans les coordonnées rectangulaires:</b> .....	<b>26</b>
<b>II.5.3) Détermination des déplacements:</b> .....	<b>30</b>

# CHAPITRE III: SOLUTION D'ELASTICITE DES POUTRES CONSOLES BASEE SUR L'UTILISATION DE LA FONCTION D'AIRY.

<b>III.1) Introduction:</b> .....	<b>31</b>
<b>III.2) Solution d'élasticité:</b> .....	<b>31</b>
<b>III.3) Traitement et présentation des résultats :</b> .....	<b>36</b>
<b>III.3.1) Exemple 1:</b> .....	<b>36</b>
<b>III.3.2) Exemple 2:</b> .....	<b>41</b>
<b>III.3.3) Exemple 3:</b> .....	<b>45</b>
<b>III.4) Conclusion:</b> .....	<b>50</b>

## CONCLUSION GENERALE

# LISTE DES FIGURES

<b>Figure (I.1) :</b> Contraintes autour du point <b>A</b> . :.....	<b>01</b>
<b>Figure (1.2) :</b> Contrainte normale $\sigma$ et tangentielle $\tau$ en un point <b>A</b> . :.....	<b>03</b>
<b>Figure (1.3):</b> Contraintes principales autour du point <b>A</b> . :.....	<b>04</b>
<b>Figure (1.4a) :</b> Tri-cercle de Mohr. :.....	<b>09</b>
<b>Figure (1.4b) :</b> Tri-cercle de Mohr en contraintes planes:.....	<b>09</b>
<b>Figure (1.5) :</b> Construction de Mohr. :.....	<b>10</b>
<b>Figure (1.6) :</b> Point A sur la surface d'un solide. :.....	<b>11</b>
<b>Figure (1.7) :</b> Déformation au voisinage d'un point <b>A</b> . :.....	<b>14</b>
<b>Figure (II.1) :</b> Exemples de structures en déformation plane : puits de mine (a) et tôle en laminage (b). :.....	<b>20</b>
<b>Figure (II.2):</b> Conditions de contour en contraintes planes. :.....	<b>22</b>
<b>Figure (II.3):</b> Contraintes sur deux facettes orthogonales :.....	<b>23</b>
<b>Figure (II.4):</b> Etat de contrainte généré par une fonction d'aire biquadratique:.....	<b>29</b>
<b>Figure (III.1) :</b> geometrie de la poutre console:.....	<b>32</b>
<b>Figure (III.2) :</b> poutre console soumis à une force concentrée $P$ à l'extrémité libre:.....	<b>36</b>
<b>Figure (III.3):</b> Variation de $\Phi_1$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console Soumis à une force concentrée $P$ :.....	<b>39</b>
<b>Figure (III.4):</b> Variation de $\sigma(x)_1$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console Soumis à une force concentrée $P$ : .....	<b>39</b>
<b>Figure (III.5):</b> Variation de $\tau_{xy}_1$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console Soumis à une force concentrée $P$ : .....	<b>40</b>
<b>Figure (III.6):</b> déplacements verticaux pour différentes hauteurs et le long de la poutre console soumise à une force concentrée $P$ :.....	<b>40</b>
<b>Figure (III.7) :</b> Poutre console soumis a une charge uniformement répartie $q$ :.....	<b>41</b>
<b>Figure (III.8):</b> Variation de $\Phi_2$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console soumis a une charge uniformement répartie $q$ :.....	<b>42</b>
<b>Figure (III.9):</b> Variation de $\sigma_{x_2}$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console soumis a une charge uniformement répartie $q$ :.....	<b>42</b>

<b>Figure (III.10):</b> Variation de $\sigma_{y2}$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console soumise à une charge uniformément répartie $q$ :.....	<b>44</b>
<b>Figure (III.11):</b> Variation de $\tau_{xy1}$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console soumise à une charge uniformément répartie $q$ :.....	<b>44</b>
<b>Figure (III.12):</b> déplacements verticaux pour différentes hauteurs et le long de la poutre console soumise à une charge uniformément répartie $q$ :.....	<b>45</b>
<b>Figure (III.13) :</b> Poutre Console Soumise à Une Charge Linéairement Répartie $q$ :.....	<b>45</b>
<b>Figure (III.14):</b> Variation de $\Phi_3$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre Console Soumise à Une charge Linéairement Répartie $q$ :.....	<b>47</b>
<b>Figure (III.15):</b> Variation de $\sigma_{x3}$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre Console Soumise à Une charge Linéairement Répartie $q$ :.....	<b>47</b>
<b>Figure (III.16):</b> Variation de $\sigma_{y3}$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre Console Soumise à Une charge Linéairement Répartie $q$ :.....	<b>48</b>
<b>Figure (III.17):</b> Variation de $\tau_{xy3}$ pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre Console Soumise à Une charge Linéairement Répartie $q$ :.....	<b>48</b>
<b>Figure (III.18):</b> déplacements verticaux pour différentes hauteurs et le long de la poutre Console Soumise à Une charge Linéairement Répartie $q$ :.....	<b>49</b>

## *Introduction générale*

La résolution des équations générales de l'élasticité tridimensionnelles avec vérification des conditions aux limites est l'opération la plus importante en théorie de l'élasticité afin de déterminer la distribution des contraintes ou déplacement dans un corps quelconque. Mais dans la plus part des cas cette résolution est très complexe ou des fois impossible.

Heureusement, pour beaucoup de problèmes qu'on recentre en pratique, quelques hypothèses simplificatrices peuvent être prises en regardant uniquement le type de distribution de contraintes ou de déformations. Dans ce cas la résolution est beaucoup plus simplifiée et la solution peut être obtenue facilement.

C'est le cas par exemple où les contraintes dans un corps, sont toutes parallèles à un plan ou bien lorsque les déplacements de tous les points d'un corps déformé se trouvent dans des plans de chargement à la longueur de ce corps.

Dans ce cas, l'influence de la troisième dimension sur la distribution des contraintes et déformations peut être négligée. On a donc un problème bidimensionnel. On dit qu'il s'agit de l'élasticité plane. Cependant selon la distribution des contraintes ou bien des déformations on parle de contrainte plane [1].

Notre travail est composé de trois chapitres :

A titre de rappel nous présentons en premier chapitre les équations de base de la théorie d'élasticité.

Dans le deuxième chapitre on a l'intérêt de savoir la méthode analytique de résolution des problèmes d'élasticité appliquée aux poutres.

Le dernier chapitre est consacré au développement de la solution d'élasticité des poutres consoles en utilisant la fonction d'Airy suivi par traitement et présentation des résultats avec discussions.

## I.1) Introduction

A titre rappel nous présentons dans ce chapitre les équations de base de la théorie d'élasticité. Deux théories essentielles sont exposées à savoir la théorie des contraintes ainsi celle des déformations, par la suite ces théories sont regroupées en une seule discipline celle d'élasticité qui se traduit par la liaison linéaire entre les composantes des contraintes et des déformations ou plutôt lois de comportement des corps élastiques [3].

## I.2) Contraintes

### I.2.1) Etat des contraintes en un point

On démontre dans le cours d'élasticité que, compte tenu des hypothèses physiques, l'état de contrainte en un point A (figure I. 1) est caractérisé par le tenseur des contraintes. C'est un tenseur du second ordre symétrique. Dans une base orthonormée il est représenté par la matrice des contraintes qui s'écrit :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ Sym & & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (I.1)$$

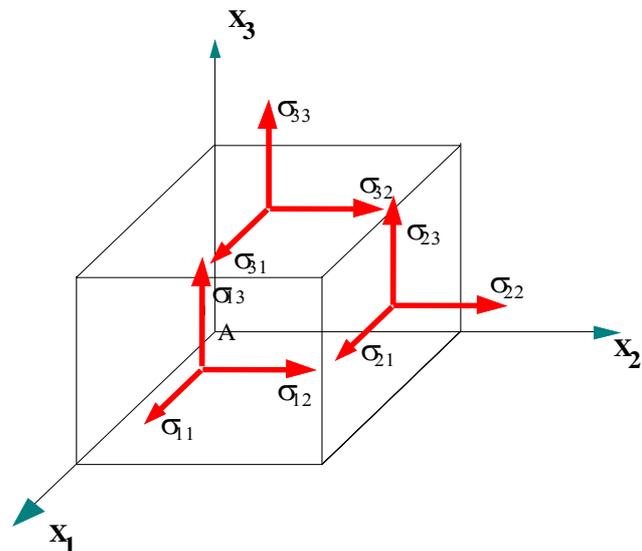


Figure I. 1 : Contraintes autour du point A

**I.2.2) Vecteur contrainte en un point pour une direction  $\vec{n}$**

Soit un point A d'un solide, et une direction repérée par un vecteur  $\vec{n}$  (normale extérieure à la matière) .Soit une facette infiniment petite d'aire  $dS$  de normale  $\vec{n}$ . Le vecteur contrainte au point A pour la direction  $\vec{n}$  s'écrit :

$$\vec{T}_{(A,\vec{n})} = [\sigma]_A \vec{n} \tag{I.2}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{bmatrix} \tag{I.3}$$

**I.2.3) Contrainte normale et tangentielle**

Le vecteur contrainte en un point A et pour la direction  $\vec{n}$  (figure I. 2) peut être projeté :

- sur la normale, on obtient la contrainte normale :

$$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{T}_{(A,\vec{n})} = \vec{n}^t [\sigma]_A \vec{n} \tag{I.4}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 (\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) \\ n_2 (\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3) \\ n_3 (\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3) \end{bmatrix} \tag{I.5}$$

- sur le plan tangent, on obtient la **contrainte tangentielle**  $\tau$  telle que:

$$\|\tau\|^2 = \left| T_{(A,n)} \right|^2 - |\sigma|^2 \tag{I.6}$$

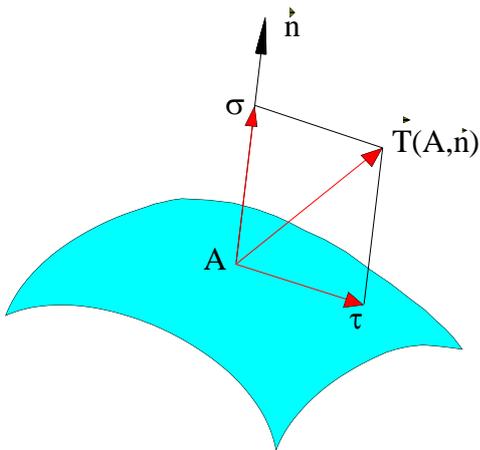


Figure 1. 2 : Contrainte normale  $\sigma$  et tangentielle  $\tau$  en un point A

#### I.2.4) Contraintes principales et directions principales

**Mathématiquement on démontre :** le tenseur des contraintes étant réel symétrique, il est diagonalisable, c'est à dire qu'il existe un réel  $\sigma_i$  et une direction  $\vec{X}_i$  telle que:

$$[\sigma]_A \vec{X}_i = \sigma_i \vec{X}_i \quad (I.7)$$

- les trois valeurs propres  $\sigma_i$  sont réelles (distinctes ou confondues) ;
- si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres correspondants  $\vec{X}_i$  sont orthogonaux.

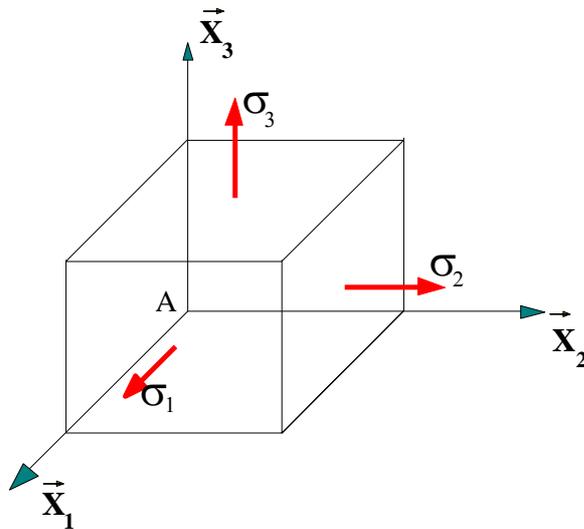


Figure 1. 3: Contraintes principales autour du point A

**Traduction mécanique :** si les trois **contraintes principales**  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont distinctes, il existe trois **directions principales** orthogonales correspondantes  $\vec{X}_1, \vec{X}_2$  et  $\vec{X}_3$ .

Ainsi pour une telle direction  $\vec{X}_i$  le vecteur contrainte :

$$\vec{T}(A, \vec{X}_i) = \sigma_i \vec{X}_i \quad \text{Est colinéaire à la direction } \vec{X}_i$$

En d'autres termes, la contrainte tangentielle pour cette direction est nulle. Dans cette direction on a donc affaire, soit à une sollicitation de traction ( $\sigma_i > 0$ ), soit à une sollicitation de compression ( $\sigma_i < 0$ ).

Dans le repère principal la matrice des contraintes s'écrit alors :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}_{(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)} \quad (I.8)$$

**Détermination des contraintes principales et des directions principales** (figure 1. 3)

- Les contraintes principales sont déterminées en écrivant que le déterminant suivant est nul :

$$\det \begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (I.9)$$

On aboutit à l'équation caractéristique :  $-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0$  (I.10)

Dans cette équation  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont les trois invariants du tenseur des contraintes (quantités indépendantes de la base dans laquelle est exprimé le tenseur). Dans une base quelconque ils ont pour expression :

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{trace de } [\sigma]_A \\ I_2 = (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) + (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}^2) \\ I_3 = \det[\sigma]_A \end{cases} \quad (I.11)$$

Et, dans la base principale :

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{trace de } [\sigma]_A \\ I_2 = (\sigma_1\sigma_2) + (\sigma_2\sigma_3) + (\sigma_1\sigma_3) \\ I_3 = \det[\sigma]_A \end{cases} \quad (I.12)$$

La **direction principale**  $\vec{X}$  correspondant à la contrainte principale  $\sigma$  est déterminée en écrivant

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I.13)$$

Le déterminant de la matrice  $[\sigma]_A - \sigma \delta_{ij}$  étant nul, on ne dispose plus que de deux équations indépendantes (par exemple les deux premières). On ne peut donc déterminer qu'une direction et non un vecteur (l'une des composantes est arbitraire), c'est pourquoi l'on parle de direction principale.

### I.2.5) Etats de contraintes particuliers

#### a) Etat de contrainte uniaxial

Dans le repère principal, le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \quad (\text{I.14})$$

Traction simple si  $\sigma_1 > 0$ , compression simple si  $\sigma_1 < 0$

### b) Etat de cisaillement simple

Soit un repère orthonormé  $(A ; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ , l'état de contraintes en A est un état de cisaillement simple par rapport aux directions  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \quad (\text{I.15})$$

Les contraintes principales sont égales à :

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = 0$$

Dans le repère principal, le tenseur des contraintes admet la forme suivante :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \quad (\text{I.16})$$

### c) Etat de contraintes planes

On a affaire à un état plan de contraintes parallèlement au plan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  si :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2), \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2)$$

C'est le cas des plaques planes chargées dans leur plan.

Le tenseur des contraintes s'écrit alors dans une base quelconque :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.17})$$

L'axe  $\bar{x}_3$  est donc direction principale et la contrainte principale correspondante est nulle.

Dans la base principale :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.18})$$

**d) Etat de contrainte dans une section droite de poutre**

En tout point A d'une section droite, l'état de contrainte peut se représenter dans la base locale classique de la théorie des poutres (  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  ) :

- $\bar{x}_1$  tangent à la ligne moyenne ;
- $\bar{x}_2$  et  $\bar{x}_3$  dans le plan de section droite et axes principaux de la section.

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.19})$$

Traction (compression) simple :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.20})$$

Flexion pure :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (I.21)$$

Flexion simple :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (I.22)$$

Torsion avec sections circulaires :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (I.23)$$

### ***1.2.6) Cercles de Mohr***

#### ***1.2.6.1) Cercles de Mohr des contraintes***

Supposons connues les trois contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  au point M. On peut montrer que, dans le plan  $(\sigma, \tau)$  (appelé **plan de Mohr**), l'extrémité des vecteurs contraintes  $\vec{\mathbf{T}}(M, \vec{\mathbf{n}})$  admissibles,  $\vec{\mathbf{n}}$  tournant autour du point M, est la surface ombrée de la figure 1. 4.

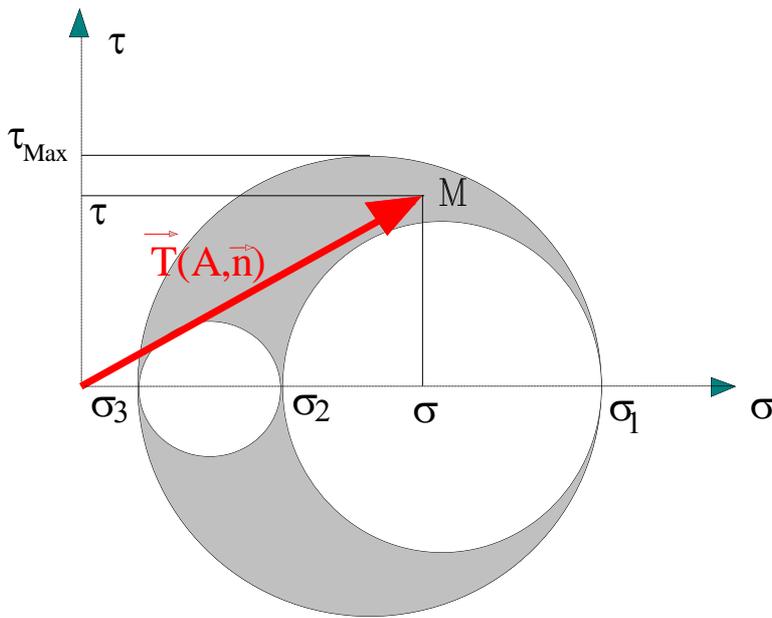


Figure 1. 4a : Tricercler de Mohr

**Cas particulier important** : Dans le cas où le vecteur  $\vec{n}$  décrit un plan principal, par exemple  $(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$ , l'extrémité du vecteur  $\vec{T}(M, \vec{n})$  décrit, dans le plan  $(\sigma, \tau)$ , un cercle centré sur l'axe  $O\sigma$  et ayant pour diamètre le segment  $\sigma_1, \sigma_2$ . C'est notamment le cas en contraintes planes.

Cercles de Mohr en contraintes planes

En contraintes plane  $\sigma_3 = 0$  ainsi la figure ci-dessus devient :

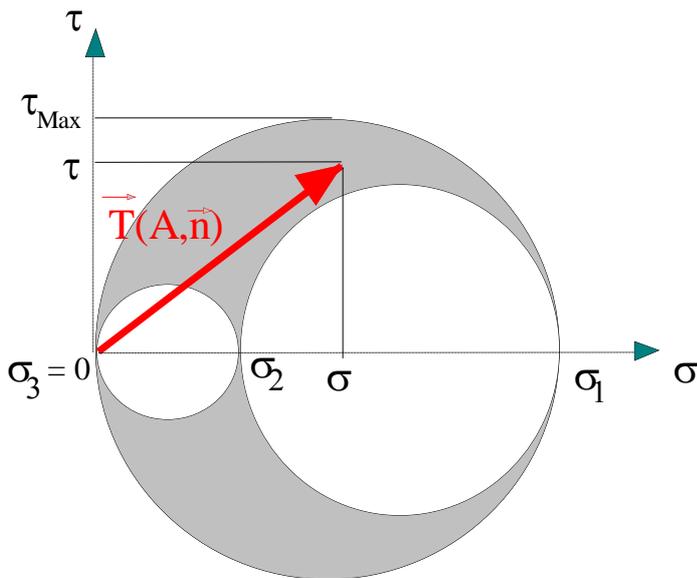


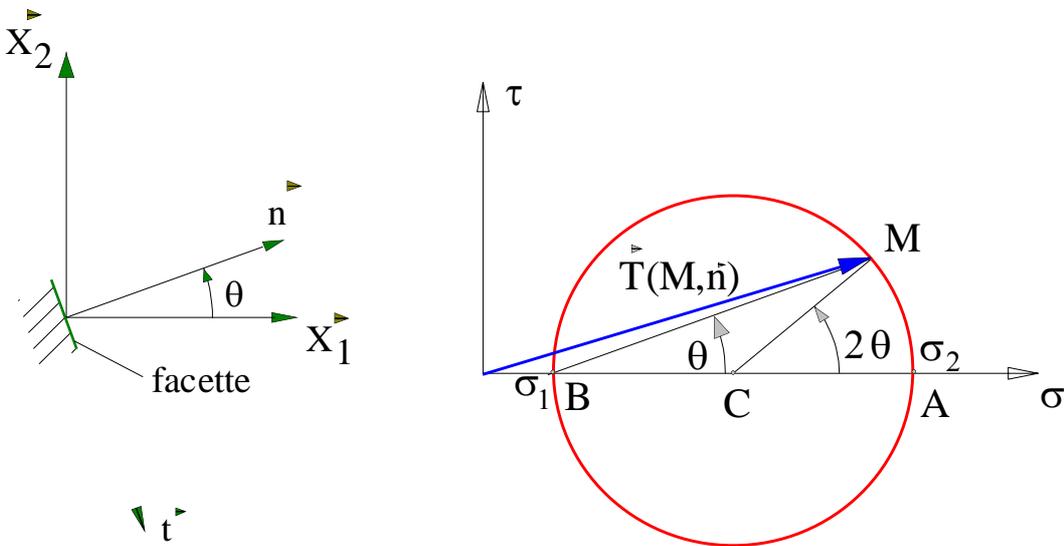
Figure 1. 4b : Tricercler de Mohr en contraintes planes

Plaçons nous dans le **plan principal** (A ;  $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ )

Considérons une facette dont la normale  $\vec{n}$  fait un angle de  $\theta$  par rapport à l'axe principal  $\vec{X}_1$ .

Soit un vecteur unitaire  $\vec{t}$  tangent à la facette, obtenu par rotation de  $-\pi/2$  de  $\vec{n}$ .

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \cos\theta \vec{X}_1 + \sin\theta \vec{X}_2 \\ \vec{t} &= \sin\theta \vec{X}_1 - \cos\theta \vec{X}_2 \end{aligned} \tag{I.24}$$



**Figure 1.5 : Construction de Mohr**

Le vecteur contraint admet pour expression :

$$\vec{T}(A, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \sigma_1 \cos\theta \vec{X}_1 + \sigma_2 \sin\theta \vec{X}_2 \tag{I.25}$$

La contrainte normale est :  $\sigma = \vec{T}(A, \vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta$  et la contrainte tangentielle définie ici par :

$$\tau = \vec{T}(A, \vec{n}) \cdot \vec{t} = \sigma_1 \cos\theta \sin\theta - \sigma_2 \sin\theta \cos\theta$$

En passant en arc double, il vient :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\theta) \end{cases} \tag{I.26}$$

Lorsque la facette orientée par la normale extérieure  $\vec{n}$  tourne, l'angle  $\theta$  varie. Il lui correspond le point figuratif M (figure 1. 5)

Dans le plan de Mohr, le lieu de M lorsque  $\theta$  varie est un cercle de centre :

$$C \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ \tau = 0 \end{array} \right. \text{ et de rayon } \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (I.27)$$

**I.2.6.2) Construction de Mohr**

Convenons de classer les contraintes principales dans l'ordre suivant :

$$\sigma_1 > \sigma_2$$

Dans le plan de Mohr (Figure 1. 5) l'axe horizontal est gradué en contrainte normale  $\sigma$  et l'axe vertical en contrainte tangentielle  $\tau$ .

$$\text{Le point A} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \sigma = \sigma_1 \\ \tau = 0 \end{array} \right. \text{ et le point B} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta = \pi / 2 \\ \sigma = \sigma_2 \\ \tau = 0 \end{array} \right.$$

Le point M est le point courant. Il correspond à une facette qui a tourné de  $\theta$  par rapport à l'axe  $\vec{X}_1$ . L'angle au centre (  $\vec{CA}$  ,  $\vec{CM}$  ) est alors de  $2\theta$ .

**Remarque :** Ne pas oublier que  $\sigma_3 = 0$ . Il y a donc trois cercles de Mohr.

**I.2.7) Etat des contraintes autour d'un point sur la surface d'un solide**

Considérons un point A sur la surface d'un solide. Soit un repère (A;  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ ) tel que :

- $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  soient situés dans le plan tangent ;
- $\vec{x}_3$  est dirigé suivant la normale

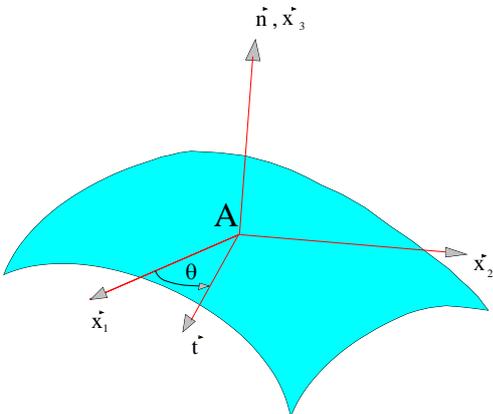


Figure 1. 6 : Point A sur la surface d'un solide

Supposons qu'en A il n'y a pas de chargement. C'est donc que le vecteur chargement extérieur est nul :  
 $\vec{Q}(A) = \vec{0}$

Les conditions aux limites sur le chargement imposent :  $\vec{T}(A, \vec{x}_3) = \vec{Q}(A)$

alors :  $\vec{T}(A, \vec{x}_3) = \vec{0}$  (I.28)

Projetons la relation (I.28) sur la tangente  $\vec{t}$  définie par  $\theta$  et sur la normale.

$$\vec{T}(A, \vec{x}_3) \cdot \vec{t} = 0 \quad (I.29)$$

$$\vec{T}(A, \vec{x}_3) \cdot \vec{x}_3 = 0 \quad (I.30)$$

**Signification de la relation (I.29) :**

$$\vec{T}(A, \vec{x}_3) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (I.31)$$

$$\vec{t} = \cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{x}_2$$

Alors  $\vec{T}(A, \vec{x}_3) \cdot \vec{t} = \sigma_{13} \cos \theta + \sigma_{23} \sin \theta = 0$

et ceci quel que soit  $\theta$ , c'est donc que:  $\sigma_{13} = 0$  et  $\sigma_{23} = 0$

Ainsi le tenseur des contraintes s'écrit en A:  $[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (I.32)

Ainsi, lorsqu'il n'y a pas de chargement tangentiel à la surface au point A, la normale à la surface est une direction principale car:  $[\sigma]_A \vec{n} = \sigma_{33} \vec{n}$  (I.33)

Le plan  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  est alors plan principal.

**Signification de la relation (I.30) :**

$$\vec{T}(A, \vec{x}_3) \cdot \vec{x}_3 = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = 0 \quad (I.34)$$

En définitive, le tenseur des contraintes s'écrit en A:  $[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (I.35)

**Conclusion** : Lorsque en un point A de la surface d'un solide il n'y a pas de charge extérieure, l'état de contrainte est un état de contrainte plane dans le plan tangent à la surface.

Cette propriété est mise en œuvre en extensomètre.

### I.3) Déplacements - Déformations

#### I.3.1) Champ des déplacements

Sous l'effet des efforts, la structure se déforme. Un point M de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  appartenant à la structure se déplace sous le chargement. Son déplacement est caractérisé par le vecteur déplacement :

$$\vec{U}(M) = u_1(x_1, x_2, x_3) \vec{x}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3) \vec{x}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3) \vec{x}_3$$

Comme on est en théorie des petites perturbations, les composantes  $u_1, u_2$  et  $u_3$  sont "petites" .

#### I.3.2) Etat des déformations au voisinage d'un point

On se place ici dans le cas des petites déformations.

On démontre que **l'état de déformation** au voisinage d'un point A est caractérisé par le tenseur des déformations.

C'est un tenseur du second ordre symétrique qui se déduit du champ des déplacements par la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (I.36)$$

Dans une base orthonormée il s'écrit en A :

$$[\varepsilon]_A = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ Sym & & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (I.37)$$

**I.3.3) Allongement unitaire en A et pour une direction  $\bar{q}_1$**

Après déformation, la longueur  $ds_1$  du vecteur  $\overrightarrow{AA_1}$  de direction  $\bar{q}_1$  est devenue  $ds'_1$ . On peut alors définir l'allongement relatif en A et pour la direction  $\bar{q}_1$  (Figure 1. 7) :

C'est la quantité : 
$$e(A, \bar{q}_1) = \frac{ds'_1 - ds_1}{ds_1}$$

$ds'_1$  et  $ds_1$  sont des longueurs infiniment petites.

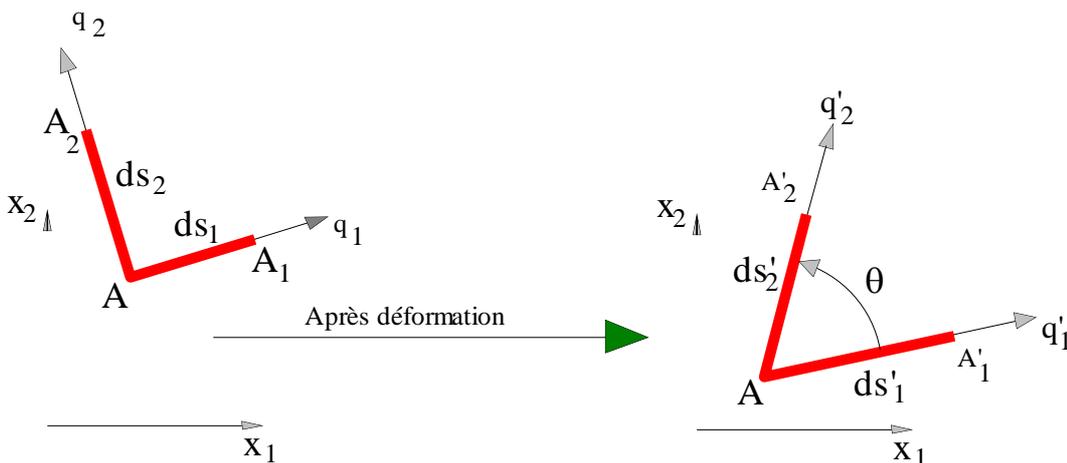
On peut montrer que cette quantité s'exprime à partir du tenseur des déformations par :

$$e_{(A, \bar{q}_1)} = \bar{q}_1^t [\boldsymbol{\varepsilon}]_A \bar{q}_1 \tag{I.38}$$

**Exemple:** Calculons l'allongement unitaire dans la direction  $\bar{x}_1(1,0,0)$

$$e(A, \bar{x}_1) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{11} \tag{I.39}$$

On interprète ainsi les termes diagonaux du tenseur des déformations qui représentent les allongements unitaires dans les trois directions orthonormées.



**Figure 1. 7 : Déformation au voisinage d'un point A**

**I.3.4) Glissement.( Distorsion):**

Après déformation, l'angle droit  $A_1AA_2$  est devenu  $A'_1A'A'_2$ . Cette variation d'angle droit s'appelle le **glissement** ou la **distorsion**. On peut montrer que le glissement  $g(A, \vec{q}_1, \vec{q}_2)$  se calcule par :

$$g_{(A, \vec{q}_1, \vec{q}_2)} = -2\vec{q}_1^t [\varepsilon] \vec{q}_2$$

**Exemple :** Calculons la distorsion de l'angle droit  $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$

$$g(A, \vec{x}_1, \vec{x}_3) = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \varepsilon_{13} \quad (I.40)$$

On interprète ainsi les termes non diagonaux du tenseur des déformations qui représentent à un facteur près les distorsions des trois angles droits d'un trièdre.

**I.3.5) Déformations principales et directions principales**

De même que pour le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations étant réel symétrique, il est diagonalisable, c'est à dire qu'il existe un réel  $\varepsilon_i$  et une direction  $\vec{X}_i$  telle que :

$$[\varepsilon]_A \vec{X}_i = \varepsilon_i \vec{X}_i \quad (I.41)$$

Ainsi dans une telle direction  $\vec{X}_i$  il n'y a pas de glissement mais seulement un allongement. Dans le repère principal en A, la matrice des déformations s'écrit alors :

$$[\varepsilon]_A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}_{(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)} \quad (I.42)$$

**I.3.6) Etat de déformations planes**

On a affaire à un état plan de déformations parallèlement au plan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  si le champ des déplacements  $\vec{U}(M)$  de tout point M peut se mettre sous la forme :

$$\vec{U}(M) = u_1(x_1, x_2) \bar{x}_1 + u_2(x_1, x_2) \bar{x}_2 + C x_3 \bar{x}_3 \quad (I.43)$$

Les composantes  $u_1$  et  $u_2$  ne sont fonctions que des deux seules variables  $x_1$  et  $x_2$ , C est une constante : la composante suivant  $\bar{x}_3$  est une fonction affine en  $x_3$

Cette hypothèse est généralement admise lorsque l'on étudie des pièces cylindriques de génératrice parallèle à l'axe  $\bar{x}_3$ , suffisamment longues pour que l'on puisse négliger les effets aux extrémités, et chargées dans le plan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

C'est le cas des canalisations de transport de fluide par exemple.

Dans ces conditions, le tenseur des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (I.44)$$

Comme  $u_1$  et  $u_2$  ne dépendent pas de  $x_3$ ,  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$

Et  $\varepsilon_{33} = C$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (I.45)$$

Dans la suite on supposera  $C = 0$ .

Le tenseur des déformations s'écrit alors dans une base quelconque :

$$[\varepsilon]_A = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (I.46)$$

L'axe  $\bar{x}_3$  est donc direction principale et l'allongement unitaire correspondant est nul.

#### I.4) Loi de comportement

La linéarité de la loi de comportement de l'élasticité se traduit par la linéarité de la loi qui relie tenseur des contraintes et tenseur des déformations.

Soit en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 G \varepsilon_{ij} \quad (I.47)$$

Dans cette relation :  $\delta_{ij}$  est le tenseur de Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \text{ si } i=j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \quad (\text{I.48})$$

Dans certains manuels on note  $G : \mu$

$\lambda$  et  $G$  sont les coefficients de Lamé, constants pour un matériau donné.

$\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$  est le premier invariant du tenseur des déformations

Inversement, on peut exprimer le tenseur des déformations à partir de celui des contraintes :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{I.49})$$

Dans cette relation :

- $E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson, constants pour un matériau donné.

- $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  est le premier invariant du tenseur des contraintes

Les relations entre les différents coefficients d'élasticité sont les suivantes :

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{I.50})$$

$G$  est le module de Coulomb.

Si  $\nu = 0,25$  alors  $G = E / 2,5$ , c'est le cas pour les matériaux ductiles.

Pour l'acier "doux" (S235 par exemple) :  $E \approx 200\,000$  MPa et  $G \approx 80\,000$  MPa

En décomposant sur les axes on obtient :

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad \epsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{33} + \sigma_{11}) \quad (\text{I.51})$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{11}), \quad \epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G}, \quad \epsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G}, \quad \epsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \quad (\text{I.52})$$

## I.5) Types particuliers de problème d'élasticité

### I.5.1) Contraintes planes du plan $(x_1, x_2)$

C'est le cas de certaines plaques soumises à des forces parallèles à leur plan moyen.

Les contraintes et les déformations sont indépendantes de  $x_3$ .

Le tenseur des contraintes admet la forme :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.53})$$

Le tenseur des déformations admet la forme :

$$[\varepsilon]_A = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad \varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (\text{I.54})$$

Avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \end{cases} \quad (\text{I.55})$$

### I.5.2) Déformations planes

C'est le cas de certains solides cylindriques d'axe  $\bar{x}_3$ , longs et soumis à des forces de surface et de volume perpendiculaire à  $\bar{x}_3$ . Ces forces sont indépendantes de la coordonnée  $\bar{x}_3$

Le tenseur des déformations admet la forme :

$$[\varepsilon]_A = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.56})$$

Le tenseur des contraintes admet la forme :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad \sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{I.57})$$

Avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} (1-\nu) \sigma_{11} - \nu \sigma_{22} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} (1-\nu) \sigma_{22} - \nu \sigma_{11} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

**II .1) Introduction**

Dans ce chapitre nous étudierons plus en détail le comportement des matériaux dans le régime élastique. Ce régime concerne l'utilisation des structures dans la vie courante sans déformations permanentes (ponts, voitures, avions, trains, structures, du génie civil,...).

**II.2) Les deux états plans d'élasticité**

Les équations de la théorie de l'élasticité se simplifient considérablement dans le cas particulier fréquent où tous les vecteurs contraintes sont parallèles à un même plan. Ce cas se rencontre dans deux types de problèmes nettement distincts, que nous allons étudier. La notation indicielle ne présentant aucun avantage dans les problèmes particuliers, nous emploierons la notation des ingénieurs. [2]

**II.2.1) Etat plan de contrainte**

Considérons un disque mince d'épaisseur constante, sollicité par des forces appliquées sur son contour. Les contraintes  $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$  sont nulles sur les deux faces du disque. Par raison de continuité, elles ne peuvent prendre à l'intérieure du disque que des valeurs très faibles par rapport à  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  l'on ne commet pas une erreur sensible en affirmant qu'elles sont nulles sur tout plan intérieur parallèle aux faces.

Pour la même raison, il est certain que les trois composantes non nulles  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  ne dépendent pratiquement pas de  $z$ , c'est-à-dire qu'elles restent constantes sur toute l'épaisseur du disque. Le tenseur des contraintes n'a que 3 composantes non nulles. La loi de Hooke d'un matériau élastique isotrope montre que la déformation  $\varepsilon_{zz}$  est non nulle:

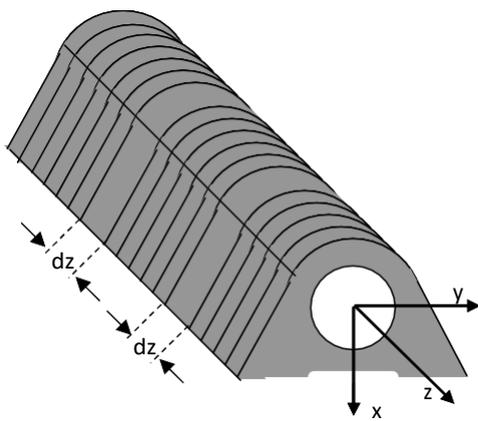
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} & \frac{\sigma_{xy}}{2G} & 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{2G} & \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (II.1)$$

En inversant les expressions de  $\varepsilon_{xx}$  et  $\varepsilon_{yy}$  dans l'équation (II, 1) on obtient :

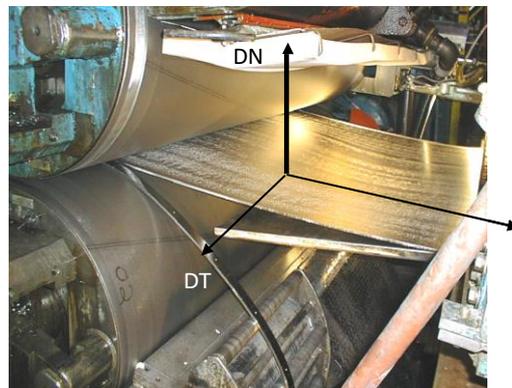
$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

**II.2.2. Etat plan de déformation**

Considérons un tunnel ou un puits de mine (figure (II.1) a) de très grande étendue selon la direction z. Si les sections perpendiculaires à l'axe z sont toutes identiques, deux sections distantes de dz se déforment de façon identique. Sur la figure (II.1)b est représentée une tôle en sortie de laminoir. Dans la direction transversale (DT), il n'y a pas de déformation à cause du frottement entre les cylindres du laminoir et la tôle. Les deux exemples de la figure 1 rentrent dans le cadre des déformation planes.



-a-



-b-

Figure (II.1) Exemples de structures en déformation plane : puits de mine (a) et tôle en laminage (b).

Le tenseur des déformations s'écrit :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) & \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.3})$$

La composante non nulle  $\sigma_{zz}$  du tenseur des contraintes ne s'obtient par la loi de Hooke. Dans un matériau isotrope élastique  $\sigma_{zz}$  vaut :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{II.4})$$

Les autres composantes non nulles du tenseur des contraintes s'écrivent

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G \left[ \varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\ \sigma_{yy} = 2G \left[ \varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Soit en réarrangeant les différents termes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} [-\nu\sigma_{xx} + (1-\nu)\sigma_{yy}] \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Ayant résolu un problème de contraintes planes, il est souvent utile de connaître la solution du problème correspondant de déformation plane. C'est le cas par exemple si l'on veut résoudre expérimentalement un problème de déformation plane. Le moyen le plus simple

consiste à effectuer les mesures sur un disque mince représentant le problème de contraintes planes correspondant, puis à repasser au problème initial. Pour ce faire, point n'est besoin de recommencer tous les calculs. Il suffit de faire les substitutions suivantes

Pour passer de contraintes planes en déformations planes

$$\begin{cases} E \rightarrow \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1-\nu)} \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Et pour passer de déformations planes aux contraintes planes

$$\begin{cases} E \rightarrow \frac{E(1+2\nu)}{(1-\nu)^2} \\ \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1+\nu)} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Les deux transformations précédentes laissent inchangée l'expression du module de cisaillement ou de Coulomb G, en fonction de E et  $\nu$ .

### II.3) Les équations fondamentales de l'élasticité plane

#### II.3.1) Les équations d'équilibre

##### II.3.1.1) Les équations différentielles d'équilibre

En annulant  $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$  et en adoptant X et Y pour les composantes forces volumiques dans la direction X et dans la direction Y respectivement, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

##### II.3.1.2) Les conditions de contour

Soient  $\cos(\alpha)$  et  $\sin(\alpha)$  les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour du disque en chargement plan. Soient  $T_x$  et  $T_y$  les tractions superficielles imposées sur le contour. La définition du tenseur contrainte permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha = T_x \\ \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha = T_y \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

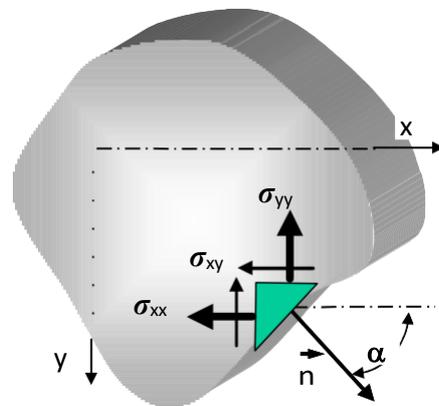


Figure (II.2) : Conditions de contour en contraintes planes.

Ces conditions expriment l'équilibre de translation selon les deux axes coordonnée du prisme élémentaire sur la figure (II.2).

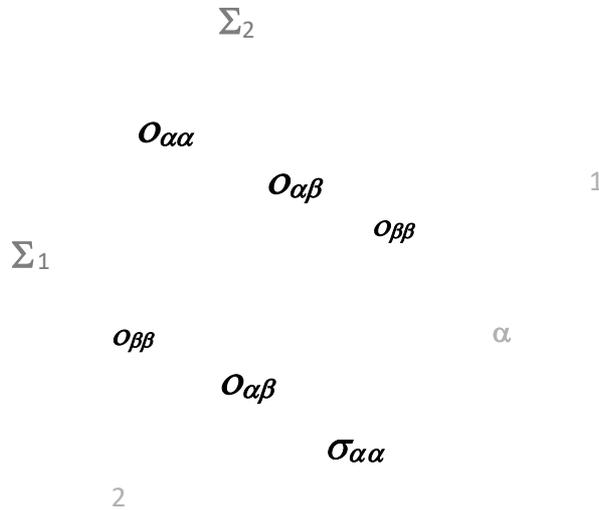


Figure (II.3) Contraintes sur deux facettes orthogonales

II.3.1.3) Changement d'axe

Soient 1 et 2 les directions principales des contraintes ( $\sigma_{12}=0$ ) et  $\Sigma_1, \Sigma_2$  (figure (II.3)) les contraintes principales. Dans ce cas on montre que 1 et 2 sont aussi les directions principales des déformations. Les formules de changement d'axes établies pour le tenseur des contraintes en 3 dimensions prennent des expressions particulièrement simples en contraintes planes ou en déformations planes:

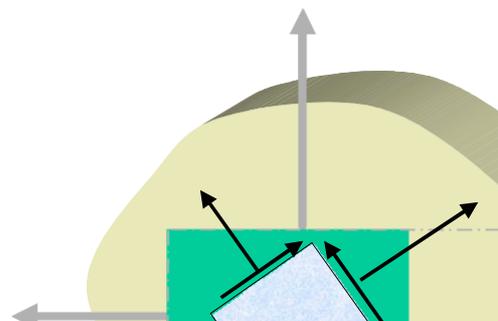
$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\alpha} = \Sigma_1 \cos^2 \alpha + \Sigma_2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} = \left( \frac{\Sigma_2 - \Sigma_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{cases} ; \begin{cases} \epsilon_{\alpha\alpha} = \epsilon_1 \cos^2 \alpha + \epsilon_2 \sin^2 \alpha \\ \epsilon_{\alpha\beta} = \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{cases} \quad (II.11)$$

II.3.2) L'équation de compatibilité et le potentiel des contraintes

Dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité s'écrivent.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \epsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \epsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \epsilon_{jk} = 0 \quad (II.13)$$

(i,j,k=x,y,z)



Si les déformations  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  sont nulles et que toutes les autres déformations sont

Indépendantes de z, les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x} = 0 \quad (\text{II.14})$$

Comme dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité peuvent être exprimées en fonction des contraintes. En contraintes planes ou déformations planes, on part cependant plus souvent de la fonction d'Airy.

### II.4) LA FONCTION D'AIRY :

#### II.4.1) Forces de volume nulles :

Considérons les équations d'équilibres dans le cas où les forces de volume sont nulles

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Ces équations sont satisfaites d'office pour des contraintes dérivant d'une fonction d'Airy  $\Phi$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

En combinant, la définition des contraintes, la loi de Hooke et les équations de compatibilité, on montre que la fonction potentielle des contraintes doit être biharmonique.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Toute fonction biharmonique permet donc de satisfaire, les équations d'équilibre, la loi de Hooke et l'équation de compatibilité. Or nous avons démontré

que la solution d'un problème d'élasticité est unique sous l'hypothèse des petites perturbations. Donc la fonction  $\Phi$  qui permet de satisfaire les conditions aux limites donne la solution unique du problème.

**II.4.2) Forces de volume dérivant d'un potentiel :**

Nous allons à présent considérer un cas plus général et admettre qu'il existe des forces de volume  $F$  dérivant d'un potentiel  $V$  sous la forme

$$\vec{F} = \text{grad}V = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Les équations d'équilibre en translation s'écrivent dans ce cas sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{xx} + V)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy} + V)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Ces équations ont la même forme que les équations d'équilibre sans forces de volume et sont satisfaites d'office pour des contraintes dérivant d'une fonction d'Airy  $\Phi$  :

$$\sigma_{xx} + V = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} + V = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \quad (\text{II.20})$$

En combinant, la définition des contraintes, la loi de Hooke et les équations de compatibilité, on montre que la fonction potentielle des contraintes doit être biharmonique

En état de déformations planes:

$$\Delta\Delta\Phi = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta V \quad (\text{II.21})$$

En état de contraintes planes:

$$\Delta\Delta\Phi = (1-\nu)\Delta V \quad (\text{II.22})$$

Toute fonction biharmonique permet donc de satisfaire, les équations d'équilibre, la loi de Hooke et l'équation de compatibilité. Or nous avons démontré que la solution d'un problème d'élasticité est unique sous l'hypothèse des petites

perturbations. Donc la fonction  $\Phi$  qui permet de satisfaire les conditions aux limites donne la solution unique du problème.

**II.5) APPLICATION A LA THEORIE DES POUTRES**

**II.5.1) Solution de l'équation biharmonique par des polynômes**

On a montré que la solution des problèmes d'élasticité plane, dans le cas particulier où les forces de volumes sont nulles ou constantes se réduit à l'intégration de l'équation biharmonique. [4]

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (II.23)$$

Et il s'ensuit que tout polynôme de  $x, y$  de degré inférieur à quatre sera biharmonique et est donc approprié en tant que fonction de contrainte cependant pour plus termes polynomiaux d'ordre, l'équation (II.23) n'est pas identiquement satisfaite. Supposer, par exemple, que nous considérons uniquement ces termes dans un polynôme général dont degré combiné (la somme des puissances de  $x$  et  $y$ ) est  $N$ . Nous pouvons écrire ces termes sous la forme

$$P_N(x, y) = A_0 x^N + A_1 x^{N-1} y + A_2 x^{N-2} y^2 + \dots + A_N y^N \quad (II.24)$$

$$= \sum_{i=0}^N A_i x^{N-1} y^i. \quad (II.25)$$

Où on note qu'il y a  $(N + 1)$  coefficients indépendants,  $A_i (i = 0, N)$ . Si nous en remplaçant maintenant  $P_N(x, y)$  par l'équation (II.23), nous obtiendrons un nouveau polynôme de degré  $(N-4)$ , puisque chaque terme est différencié quatre fois. On peut noter ce nouveau polynôme de  $Q_{N-4}(x, y)$

**II.5.2) Problèmes dans les coordonnées rectangulaires**

$$Q_{N-4}(x, y) = \nabla^4 P_N(x, y) \quad (II.26)$$

$$= \sum B_i x^{(N-4-i)} y^i \quad (II.27)$$

Les  $(N - 3)$  coefficients  $B_0, \dots, B_{N-4}$  s'obtiennent facilement en développant à droite de l'équation (II.26) et des coefficients d'équation. Par exemple,

$$B_0 = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot A_0 + 4 \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot A_2 + 24A_4 \quad (\text{II.28})$$

Maintenant, la fonction originale  $P_{N-4}(x, y)$  sera biharmonique si et seulement si  $Q_{N-4}(x, y)$  est zéro pour tous les  $x, y$  et ceci n'est possible que si chaque terme de la série (II.27) est *identique à zéro*, puisque les termes polynomiaux sont tous linéairement indépendants les uns des autres. En d'autres termes

$$B_i = 0; i = 0 \text{ à } (N - 4) \quad (\text{II.29})$$

Ces conditions peuvent être converties en un ensemble correspondant de  $(N - 3)$  équations pour les coefficients  $A_i$ . Par exemple, l'équation  $B_0 = 0$  donne

$$B_0 = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot A_0 + 4 \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot A_2 + 24A_4 = 0 \quad (\text{II.30})$$

À partir de (II.28). Nous appellerons les  $(N-3)$  équations de cette forme des contraintes sur les coefficients  $A_i$ , puisque les coefficients sont contraints de les satisfaire si le polynôme d'origine doit être biharmonique.

Une approche consisterait à utiliser les équations de contrainte pour éliminer  $(N - 3)$  des coefficients inconnus dans le polynôme d'origine - par exemple, nous pourrions traiter les quatre premiers coefficients,  $A_0, A_1, A_2, A_3$ , comme des constantes inconnues et les utiliser les équations de contrainte pour définir tous les coefficients restants en termes de ces inconnues. L'équation (II.30) serait alors traitée comme une équation pour  $A_4$  et les équations de contrainte suivantes définiraient chacune une nouvelle constante dans les séries.

Il peut être utile de considérer un exemple particulier à ce stade. Supposons nous considérons le polynôme du cinquième degré

$$P_5(x, y) = A_0 x^5 + A_1 x^4 y + A_2 x^3 y^2 + A_3 x^2 y^3 + A_4 x y^4 + A_5 y^5 \quad (\text{II.31})$$

Qui a six coefficients indépendants. En substituant dans l'équation (II.26), nous obtenir le polynôme du premier degré

$$Q_1(x, y) = (120A_0 + 24A_2 + 24A_4) \cdot x + (24A_1 + 24A_3 + 120A_5) \cdot y \quad (\text{II.32})$$

Les coefficients de x et y dans  $Q_1$  doivent tous deux être égaux à zéro si  $P_5$  doit être biharmonique et nous pouvons écrire les deux équations de contrainte résultantes sous la forme

$$A_4 = -5A_0 - A_2 \quad (\text{II.33})$$

$$A_5 = -\frac{A_1}{5} - \frac{A_3}{5} \quad (\text{II.34})$$

Enfin, nous utilisons (II.33, II.34) pour éliminer  $A_4, A_5$  dans la définition originale de  $P_5$  obtenant la définition du cinquième degré biharmonique le plus général polynôme

$$P_5(x, y) = A_0(x^5 - 5x \cdot y^4) + A_1(x^4 y - \frac{y^5}{5}) + A_2(x^3 y^2 - x \cdot y^4) + A_3(x^2 y^3 - \frac{y^5}{5}) \quad (\text{II.35})$$

Cette fonction sera biharmonique pour toutes les valeurs des quatre valeurs indépendantes.

Constantes  $A_0, A_1, A_2, A_3$ , Nous pouvons exprimer cela en déclarant que le biharmonique le polynôme  $P_5$  a quatre degrés de liberté.

En général, le polynôme Q est de degré 4 inférieur à P car le biharmonique équation est de degré 4. Il en résulte qu'il y a toujours quatre moins équations de contrainte qu'il n'y a de coefficients dans le polynôme d'origine P et par conséquent, ils peuvent être satisfaits en laissant un polynôme à 4 degrés de liberté.

Cependant, le processus dégénère si  $N < 3$ .

Compte tenu de la discussion qui précède, il pourrait sembler approprié d'écrire une expression pour le polynôme général de degré N sous forme d'équation (II.35) comme préalable à la solution de problèmes polynomiaux en rectangles coordonnées. Cependant, comme le montre l'équation (II.35), les expressions résultantes sont algébriquement désordonnées et cette approche devient ingérable pour des problèmes de toute complexité. Au lieu de cela, il s'avère être plus simple algébriquement pour définir les problèmes en termes de plus simple sans contrainte polynômes comme l'équation (II.24) et d'imposer les équations de contrainte à un stade ultérieur de la solution.

Moyennant les conditions à la surface. Dans le cas des poutres ayant une section rectangulaire de faible épaisseur, on peut trouver des solutions pratiquement intéressantes en adoptant comme expression de  $\Phi$  des polynômes de divers degrés et en ajustant leurs coefficients de façon adéquate. Il est facile de voir que le polynôme quadratique

$$\varphi_2(x, y) = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 \quad (\text{II.36})$$

Est toujours biharmonique. Ils y correspondent des états de traction pure et de cisaillement pur (figure(II.4)).

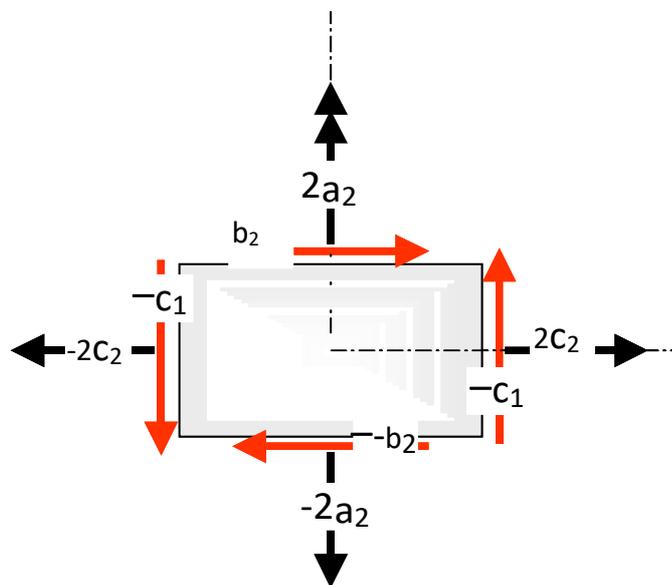


Figure (II.4) : Etat de contrainte généré par une fonction d'aire biquadratique.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 & -b_2 \\ -b_2 & 2a_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.37})$$

La fonction cubique  $\varphi_3(x, y) = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 xy^2 + d_3 y^3$  est aussi toujours biharmonique. Cette fonction permet de générer des contraintes de tractions constantes, des contraintes de cisaillement constantes et des contraintes de traction simulant de la flexion :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_3 x + 6d_3 y & 2b_3 x - 2c_3 y \\ 2b_3 x - 2c_3 y & 6a_3 x + 2b_3 y \end{pmatrix} \quad (\text{II.38})$$

**II.5.3) Détermination des déplacements**

Connaissant les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  on peut en déduire les déformations par la loi de Hooke. Une fois les déformations calculées, il faut en déduire les déplacements  $u$  et  $v$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right] \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

En intégrant les deux premières équations on obtient :

$$\begin{cases} u(x, y) = \int \varepsilon_{xx} dx + f_1(y) \\ v(x, y) = \int \varepsilon_{yy} dy + f_2(x) \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

On dérive en suite ces expressions par rapport à  $y$  et  $x$  respectivement et on introduit ces dérivées dans les définitions de la déformation de cisaillement. Au total on constate que l'intégration introduit certaines constantes d'intégration, et que les expressions de  $u$  et  $v$  contiennent de ce fait les fonctions linéaires arbitraires.

$$\begin{cases} u_1 = a + by \\ v_1 = c - bx \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

Où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constants arbitraires. Les déplacements  $u_1$  et  $v_1$  conduisent à

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0 \quad (\text{II.42})$$

C'est-à-dire que ces déplacements ne donnent pas lieu à une déformation, mais seulement un mouvement d'ensemble. Les constantes d'intégration  $a$  et  $c$  représentent un mouvement de translation du corps et la constante  $b$  un petit angle de rotation autour de l'axe des  $z$ . Il faut, dans chaque problème particulier déterminer les valeurs de ces constantes par les conditions de fixation.

### III.1 Introduction

Ce chapitre est consacré en premier lieu à la proposition de la fonction d'Airy relative au problème d'une poutre console soumise aux différentes charges en flexion et de déterminer les paramètres inconnus de cette fonction correspondants tout en vérifiant les équations de conditions de chargement au contour de la poutre. En second lieu, nous avons présenté les trois cas de chargements à savoir concentrée, répartie et linéaire appliqués directement sur la face supérieure de la poutre afin de prédire la répartition des contraintes et des déplacements suivant la hauteur et le long de la poutre respectivement.

### III.2 Solution d'élasticité

Pour la résolution des problèmes des poutres, Il est souvent plus facile de choisir une fonction des contraintes appelée fonction d'Airy comme un polynôme. Le degré de ce polynôme importe peu puisqu'il suffit juste que la fonction choisie vérifie l'équation biharmonique.

Pour donner plus de détails on va choisir un polynôme de degré six (06) .

Soit :

$$P(x,y) = A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2 + A_4x^3 + A_5x^2y + A_6xy^2 + A_7y^3 + A_8x^4 + A_9x^3y + A_{10}x^2y^2 + A_{11}xy^3 + A_{12}y^4 + A_{13}x^5 + A_{14}x^4y + A_{15}x^3y^2 + A_{16}x^2y^3 + A_{17}xy^4 + A_{18}y^5 + A_{19}x^6 + A_{20}x^5y + A_{21}x^4y^2 + A_{22}x^3y^3 + A_{23}x^2y^4 + A_{24}xy^5 + A_{25}y^6$$

Le degré de la charge maximale est linéaire pour cela on se limite par élimination les constantes suivantes  $A_8x^4, A_{13}x^5, A_{14}x^4y, A_{19}x^6, A_{20}x^5y, A_{21}x^4y^2$  nous obtenons :

$$\Phi(x,y) = C_1y^2 + C_2y^3 + C_3y^4 + C_4y^5 + C_5y^6 + C_6xy + C_7xy^2 + C_8xy^3 + C_9xy^4 + C_{10}xy^5 + C_{11}x^2 + C_{12}x^2y + C_{13}x^2y^2 + C_{14}x^2y^3 + C_{15}x^2y^4 + C_{16}x^3 + C_{17}x^3y + C_{18}x^3y^2 + C_{19}x^3y^3 \quad (III.1)$$

Avec :  $C_i$  ( $i = 1..19$ ) sont des constantes à déterminer.

En substituant  $\Phi(x,y)$  Dans l'équation bi-harmonique  $\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}\right) = 0$  , on arrive à :

$$24C_3 + 24C_9x + 120C_4y + 360C_5y^2 + 24C_{15}x^2 + 120C_{10}xy + 8C_{13} + 24C_{18}x + 24C_{14}y + 72C_{19}xy + 48C_{15}y^2 = 0 \quad (III.2)$$

$$24C_3 + 8C_{13} = 0 \quad (\text{III.2.a})$$

$$24C_9 + 24C_{18} = 0 \quad (\text{III.2.b})$$

$$24C_{15} = 0 \quad (\text{III.2.c})$$

$$120C_4 + 24C_{14} = 0 \quad (\text{III.2.d})$$

Soient :

$$360C_5 + 48C_{15} = 0 \quad (\text{III.2.e})$$

$$120C_{10} + 72C_{19} = 0 \quad (\text{III.2.f})$$

Donc, les expressions des contraintes s'écrivent comme :

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$\sigma_y = 2C_{11} + 6C_{16}x + 2C_{12}y + 6C_{17}xy + 2C_{13}y^2 + 6C_{18}xy^2 + 2C_{14}y^3 + 6C_{19}xy^3 + 2C_{15}y^4 \quad (\text{III.3})$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_x = 2C_1 + 2C_7x + 6C_2y + 2C_{13}x^2 + 6C_8xy + 12C_3y^2 + 2C_{18}x^3 + 6C_{14}x^2y + 12C_9xy^2 + 20C_4y^3 + 6C_{19}x^3y + 30C_5y^4 + 12C_{15}x^2y^2 + 20C_{10}xy^3 \quad (\text{III.4})$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial xy}$$

$$\tau_{xy} = -C_6 - 2C_{12}x - 2C_7y - 3C_{17}x^2 - 4C_{13}xy - 3C_8y^2 - 6C_{18}x^2y - 6C_{14}xy^2 - 4C_9y^3 - 9C_{19}x^2y^2 - 8C_{15}xy^3 - 5C_{10}y^4 \quad (\text{III.5})$$

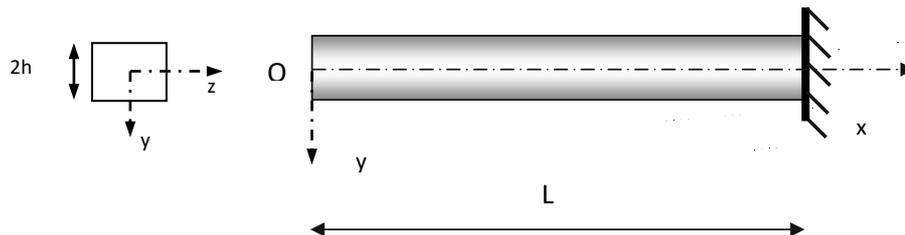


Figure (III.1) : geometrie de la poutre console

On applique les équations de conditions aux limites sur les faces de la poutre montré en figure (III.1) qui s'expriment par les relations suivantes :

Face superieure (  $y = -h$  )

$$\tau xy_s = -\tau(x, y = -h)$$

$$\tau xy_s = C_6 + 2C_{12}x - 2C_7h + 3C_{17}x^2 - 4C_{13}xh + 3C_8h^2 - 6C_{18}x^2h + 6C_{14}xh^2 - 4C_9h^3 + 9C_{19}x^2h^2 - 8C_{15}xh^3 + 5C_{10}h^4 \quad (\text{III.6})$$

Face inferieure (y = h)

$$\tau xy_i = \tau(x, y = h)$$

$$\tau xy_i = -C_6 - 2C_{12}x - 2C_7y - 3C_{17}x^2 - 4C_{13}xy - 3C_8y^2 - 6C_{18}x^2y - 6C_{14}xy^2 - 4C_9y^3 - 9C_{19}x^2y^2 - 8C_{15}xy^3 - 5C_{10}y^4 \quad (\text{III.7})$$

$$\tau xy_s + \tau xy_i$$

$$-4C_7h - 8C_{13}xh - 12C_{18}x^2h - 8C_9h^3 - 16C_{15}xh^3 \quad (\text{III.8})$$

$$-4C_7h - 8C_9h^3 = 0 \quad (\text{III.8.a})$$

$$-8C_{13}h - 16C_{15}h^3 = 0 \quad (\text{III.8.b})$$

$$-12C_{18}h = 0 \quad (\text{III.8.c})$$

$$\tau xy_s - \tau xy_i$$

$$2C_6 + 4C_{12}x + 6C_{17}x^2 + 6C_8h^2 + 12C_{14}xh^2 + 18C_{19}x^2h^2 + 10C_{10}h^4 \quad (\text{III.9})$$

$$2C_6 + 6C_8h^2 + 10C_{10}h^4 = 0 \quad (\text{III.9.a})$$

$$4C_{12} + 12C_{14}h^2 = 0 \quad (\text{III.9.b})$$

$$6C_{17} + 18C_{19}h^2 = 0 \quad (\text{III.9.c})$$

Face superieure (y = -h)

$$\sigma y_s = -\sigma(y = -h)$$

$$\sigma y_s = -2C_{11} - 6C_{16}x + 2C_{12}h + 6C_{17}xh - 2C_{13}h^2 - 6C_{18}xh^2 + 2C_{14}h^3 + 6C_{19}xh^3 - 2C_{15}h^4 \quad (\text{III.10})$$

Face inferieure (y = h)

$$\sigma y_i = \sigma(y = h)$$

$$\sigma y_i = 2C_{11} + 6C_{16}x + 2C_{12}h + 6C_{17}xh + 2C_{13}h^2 + 6C_{18}xh^2 + 2C_{14}h^3 + 6C_{19}xh^3 + 2C_{15}h^4 \quad (\text{III.11})$$

$$\sigma y_s + \sigma y_i = 4C_{12}h + 12C_{17}xh + 4C_{14}h^3 + 12C_{19}xh^3 \quad (\text{III.12})$$

$$4C_{12}h + 4C_{14}h^3 = f_{vcs} + f_{vci} \quad (\text{III.12.a})$$

$$12C_{17}h + 12C_{19}h^3 = f_{vls} + f_{vli} \quad (\text{III.12.b})$$

$$\sigma y_s - \sigma y_i = -4C_{11} - 12C_{16}x - 4C_{13}h^2 - 12C_{18}xh^2 - 4C_{15}h^4 \quad (\text{III.13})$$

$$-4C_{11} - 4C_{13}h^2 - 4C_{15}h^4 = f_{vcs} - f_{vci} \quad (\text{III.13.a})$$

$$-12C_{16} - 12C_{18}h^2 = f_{vls} - f_{vli} \quad (\text{III.13.b})$$

Avec :  $f_{vcs}$  et  $f_{vci}$  sont des charges uniformes appliquées sur les faces superieure et inferieure

$f_{vls}$  et  $f_{vli}$  sont des charges lineares appliquées sure les faces superieure et inferieure

Les indices i et s indiquent les faces inférieure et superieure respectivement.

Face verticale libre (  $x=0$  )

$$-\int_{-h}^h \sigma x . dy$$

$$-4C_1 h - 8C_3 h^3 - 12C_5 h^5 = Ne \quad (\text{III.14})$$

$$-\int_{-h}^h \sigma x . y . dy$$

$$-8C_4 h^5 - 4C_2 h^3 = Me \quad (\text{III.15})$$

$$-\int_{-h}^h \tau xy . dy$$

$$2C_6 h + 2C_8 h^3 + 2C_{10} h^5 = Qe \quad (\text{III.16})$$

Ne : (effort normal), Me : (moment de flexion), et Qe : (force tangentielle) sont les efforts appliqués sur la face verticale

Enfin, nous résolvons les équations de (III.2) à (III.16) pour obtenir les constantes inconnues C1, ..., C19

D' où :

$$C_1 = \frac{-\frac{1}{12}(h^2 f_{tls} + h^2 f_{tli} + 3Ne)}{h} ; C_2 = -\frac{1}{20} \frac{-h^3 f_{tls} + h^3 f_{tli} + h^2 f_{vcs} + h^2 f_{vci} + 5Me}{h^3} ; C_3 = 0;$$

$$C_4 = \frac{1}{40} \frac{(-h . f_{tls} + h . f_{tli} + f_{vcs} + f_{vci})}{h^3} ; C_5 = 0;$$

$$C_6 = \frac{1}{40} \frac{-2h^3 f_{tps} + 2h^3 f_{tpi} + h^2 f_{vls} + h^2 f_{vli} - 10h f_{tcs} + 10h f_{tci} + 30Qe}{h} ;$$

$$C_7 = 0 ; C_8 = -\frac{1}{20} \frac{-2h^3 . f_{tps} + 2h^3 . f_{tpi} + h^2 . f_{vls} + h^2 . f_{vli} - 5h . f_{tcs} + 5 . h . f_{tci} + 5 . Qe}{h^3} ; C_9 = 0;$$

$$C_{10} = \frac{1}{40} \frac{-2 . h . f_{tps} + 2 . h . f_{tpi} + f_{vls} + f_{vli}}{h^3} ;$$

$$C_{11} = \frac{h . (f_{tls} + f_{tli})}{8} - \frac{f_{vcs} + f_{vci}}{4} ; C_{12} = \frac{1}{8} \cdot \frac{h f_{tls} + h f_{tli} + 3 f_{vcs} + 3 f_{vci}}{h} ; C_{13} = 0;$$

$$C_{14} = -\frac{1}{8} \frac{-h . f_{tls} + h . f_{tli} + f_{vcs} + f_{vci}}{h^3} ; C_{15} = 0;$$

$$C_{16} = \frac{h . (f_{tps} + f_{tpi}) - f_{vls} + f_{vli}}{12} ; C_{17} = \frac{1}{24} \cdot \frac{-2 . h . f_{tps} + 2 . h . f_{tpi} + 3 . f_{vls} + 3 . f_{vli}}{h} ; C_{18} = 0;$$

$$C_{19} = -\frac{1}{24} \cdot \frac{-2 . h . f_{tps} + 2 . h . f_{tpi} + f_{vls} + f_{vli}}{h^3} . \quad (\text{III.17})$$

Après avoir déterminé les composantes des contraintes, on peut tirer les composantes de déplacements  $u$  et  $v$  en intervenant les équations de Hooke en relation des déplacements suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= S_{11}\sigma_{xx} + S_{12}\sigma_{yy} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= S_{12}\sigma_{xx} + S_{22}\sigma_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\quad (\text{III.18})$$

$$\gamma_{xy} = S_{66}\tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{Avec : } S_{11}=S_{22}=\frac{1}{E} \quad , \quad S_{12}=-\frac{\nu}{E} \quad , \quad S_{66}=\frac{2(1+\nu)}{E}$$

$E$  est le module d'élasticité longitudinal.

$\nu$  est le coefficient de poisson.

Par intégration des équations III.18, on tire :

$$u = \int \varepsilon_{xx} \cdot dx + f(y)$$

$$v = \int \varepsilon_{yy} \cdot dx + g(x) \quad (\text{III.19})$$

Ou:  $f(y)$  et  $g(x)$  sont des fonctions inconnues se déterminent à partir des conditions de déplacements au niveau de l'encastrement pour  $x = L$  :  $u = 0$ ,  $v = 0$  et  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .

### III.3 Traitement et présentation des résultats

Dans cette section, trois cas de chargements sur la même poutre console sont réalisés comme il est montré ci-dessous

#### III.3.1 Exemple 1

La figure (III.2) montre un domaine rectangulaire,  $0 < x < L$  ;  $-h < y < h$ , soumis à une force concentrée  $P$  à l'extrémité libre  $x = 0$ . Les conditions aux limites pour ce problème est plus naturellement écrit sous la forme

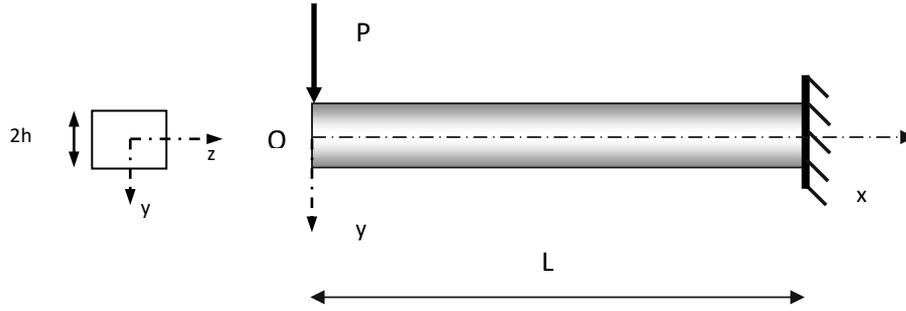


Figure (III.2) : Poutre Console Soumis A Une Force Concentree P

$$\begin{cases} \tau_{xy} = 0; y = \pm h \\ \sigma_y = 0; y = \pm h \\ \sigma_x = 0; x = 0 \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

On prend :  $f_{vls} = 0; f_{vli} = 0; f_{vcs} = 0; f_{vci} = 0; Ne = 0; Me = 0; Qe = P$  les équations (III.17) Deviennent comme :

$$\begin{aligned} C_6 &:= \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{h}; C_8 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{P}{h^3}; C_1 = 0; C_2 = 0; C_3 = 0; C_4 = 0; C_5 = 0; C_7 = 0; C_9 = 0; C_{10} = 0; C_{11} = 0; C_{12} = 0; \\ C_{13} &= 0; C_{14} = 0; C_{15} = 0; C_{16} = 0; C_{17} = 0; C_{18} = 0; C_{19} = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Pour ce cas de chargement on tire les expressions suivantes :

La fonction d'Airy correspondante est :

$$\Phi_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{P \cdot x \cdot y \cdot (3h^2 - y^2)}{h^3} \quad (\text{III.22})$$

Etat de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{x_1} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{P \cdot x \cdot y}{h^3} \\ \sigma_{y_1} = 0 \\ \tau_{xy_1} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{P \cdot (h-y) \cdot (h+y)}{h^3} \end{cases} \quad \text{(III.23)}$$

Etat de déplacements :

$$u = \int S_{11} \cdot \sigma_x + S_{12} \cdot \sigma_y dx + f(y)$$

$$u = -\frac{3}{4} \frac{S_{11} \cdot P \cdot x^2 \cdot y}{h^3} + f(y) \quad \text{(III.24)}$$

$$v = \int S_{12} \cdot \sigma_x + S_{11} \cdot \sigma_y dy + g(y)$$

$$v = -\frac{3}{4} \frac{S_{12} \cdot P \cdot x \cdot y^2}{h} + g(y) \quad \text{(III.25)}$$

$$\gamma_{xy} = S_{66} \cdot \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$S_{66} \cdot \tau_{xy} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$-\frac{3}{4} \frac{S_{11} \cdot p \cdot x^2}{h^3} + \frac{d}{dy} f(y) - \frac{3}{4} \frac{v \cdot S_{11} \cdot p \cdot y^2}{h^3} + \frac{d}{dx} g(x) + \frac{3}{2} \frac{S_{11} \cdot p}{h} - \frac{3}{2} \frac{S_{11} \cdot p \cdot y^2}{h^3} + \frac{3}{2} \frac{v \cdot S_{11} \cdot p}{h} = 0 \quad \text{(III.26)}$$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{3}{4} \frac{S_{11} \cdot p \cdot x^2}{h^3} \Leftrightarrow g(x) = \int \frac{3}{4} \frac{S_{11} \cdot p \cdot x^2}{h^3}$$

$$g(x) = \frac{1}{4} \frac{S_{11} \cdot p \cdot x^3}{h^3} + \alpha x + \alpha_1 \quad \text{(III.27)}$$

$$v = \frac{3}{4} \frac{v \cdot S_{11} \cdot P \cdot x \cdot y^2}{h^3} + \frac{1}{4} \frac{S_{11} \cdot p \cdot x^3}{h^3} + \alpha x + \alpha_1$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3}{4} \frac{v \cdot S_{11} \cdot P \cdot y^2}{h^3} + \frac{3}{4} \frac{S_{11} \cdot p \cdot x^2}{h^3} + \alpha$$

$$\frac{d}{dy} f(y) = \frac{3 S_{11} \cdot p \cdot y^2}{2 h^3} + \frac{3 \nu \cdot S_{11} \cdot p \cdot y^2}{4 h^3}$$

$$f(y) = \int \frac{3 S_{11} \cdot p \cdot y^2}{2 h^3} + \frac{3 \nu \cdot S_{11} \cdot p \cdot y^2}{4 h^3} dy + \beta y + \beta_1 \quad (\text{III.28})$$

$$f(y) = \frac{1 S_{11} \cdot p \cdot y^3}{2 h^3} + \frac{1 \nu \cdot S_{11} \cdot p \cdot y^3}{4 h^3} + \beta y + \beta_1$$

$$u = -\frac{3 S_{11} \cdot P \cdot x^2 \cdot y}{4 h^3} + \frac{1 S_{11} \cdot p \cdot y^3}{2 h^3} + \frac{1 \nu \cdot S_{11} \cdot p \cdot y^3}{4 h^3} + \beta y + \beta_1$$

$$cst = -\frac{3 \nu \cdot S_{11} \cdot p}{2 h} - \frac{3 S_{11} \cdot p}{2 h}$$

Enfin, nous résolvons les équations suivant  $\left\{ u=0 ; v=0 ; \frac{dv}{dx}=0 ; \alpha + \beta = cst \right\}$  pour obtenir les constantes inconnues  $\{ \alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \}$

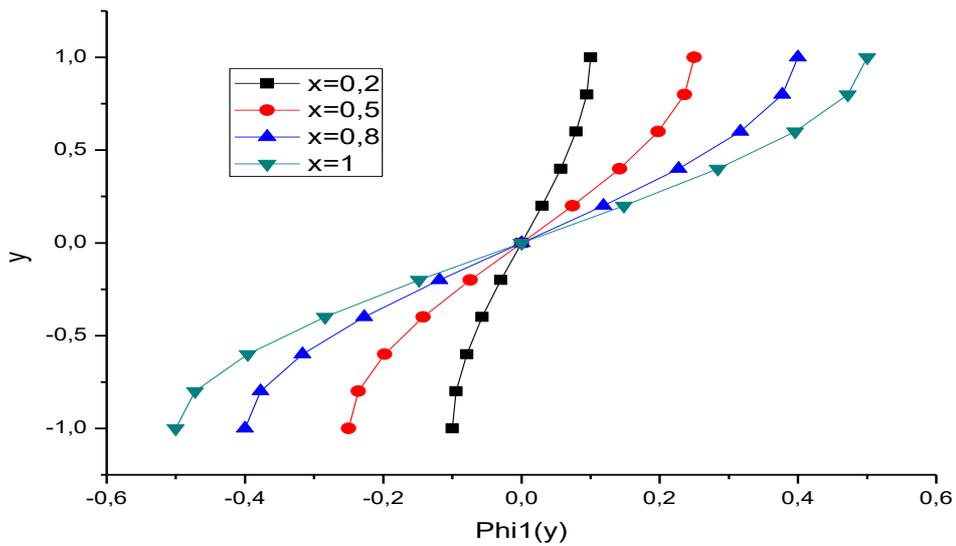
D' où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{3 S_{11} \cdot p \cdot L^2}{4 h^3} \\ \alpha_1 = -\frac{1 S_{11} \cdot p \cdot L^3}{2 h^3} \\ \beta = \frac{3}{4} S_{11} \cdot p (L^2 - 2 \cdot \nu \cdot h^2 - 2 \cdot h^2) \\ \beta_1 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.29})$$

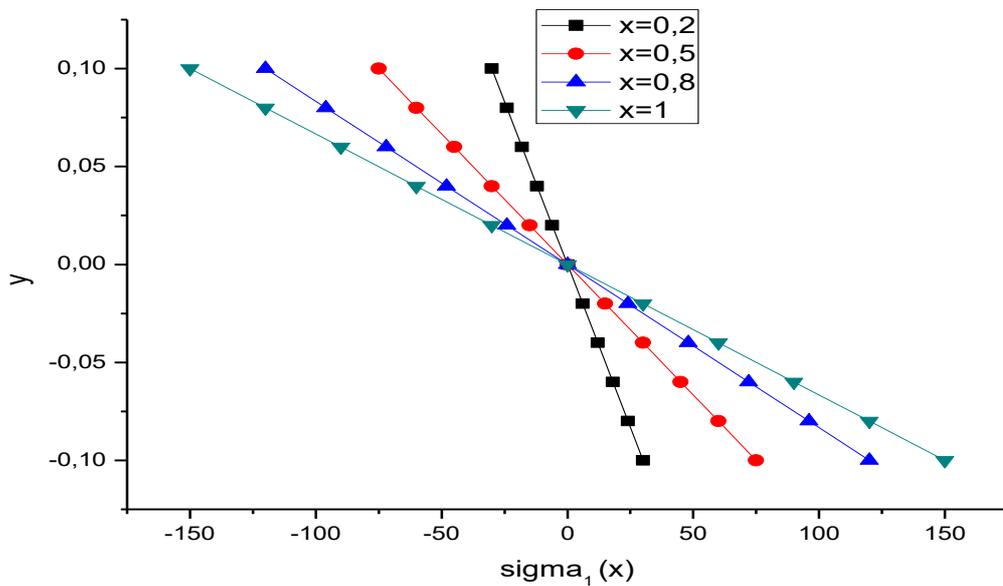
D' où on tire les composantes de déplacements suivantes :

$$v = \frac{3 \nu \cdot S_{11} \cdot P \cdot x \cdot y^2}{4 h^3} + \frac{1 S_{11} \cdot p \cdot x^3}{4 h^3} - \frac{3 S_{11} \cdot p \cdot L^2 \cdot x}{4 h^3} - \frac{1 S_{11} \cdot p \cdot L^3}{2 h^3} \quad (\text{III.30})$$

$$u = -\frac{3 S_{11} \cdot P \cdot x^2 \cdot y}{4 h^3} + \frac{1 S_{11} \cdot p \cdot y^3}{2 h^3} + \frac{1 \nu \cdot S_{11} \cdot p \cdot y^3}{4 h^3} + \frac{3}{4} S_{11} \cdot p (L^2 - 2 \cdot \nu \cdot h^2 - 2 \cdot h^2) \cdot y \quad (\text{III.31})$$



**Figure (III.3) :** Variation de  $\Phi_1$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console  
Soumis à une force concentrée P



**Figure (III.4) :** Variation de  $\sigma(x)_1$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console  
Soumis à une force concentrée P

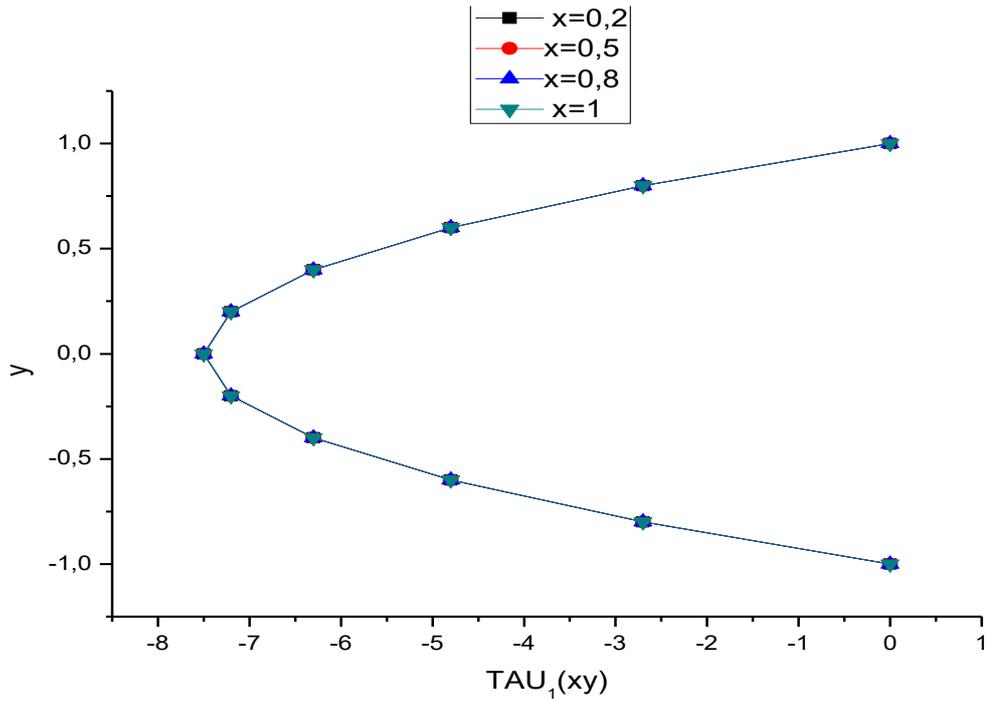


Figure (III.05) : Variation de  $\tau_{xy}$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console  
Soumis à une force concentrée  $P$

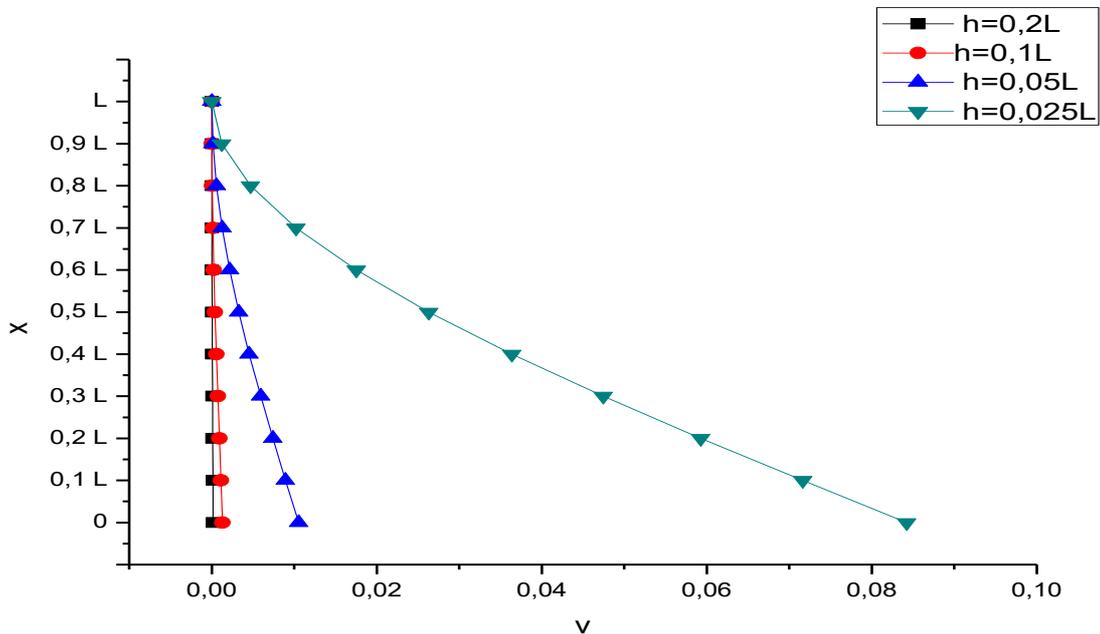


Figure (III.6) : déplacements verticaux pour différentes hauteurs et le long de la poutre console  
Soumis à une force concentrée  $P$

La figure (III.3) montre la variation de la fonction d'Airy pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console sous une charge concentrée. On remarque bien que cette variation est cubique en  $y$  et qui

donne symétriquement des valeurs de signe opposés par rapport à la fibre moyenne, par ailleurs elle optimale au voisinage de l'encastrement.

La figure (III.4) montre que la distribution des contraintes normales relatives à l'axe des x est parfaitement linéaire pour différentes sections avec des valeurs de traction et de compression dans les parties supérieure et inférieure respectivement ainsi sont maximales aux faces supérieure et inférieure en s'approchant de l'encastrement.

Concernant la répartition des contrainte tangentielle est paraboliquement symétrique qui donne des valeurs maximales au niveau de la fibre moyenne comme il est représenté en figure (III.5) et par conséquent ces allures sont les mêmes pour différentes sections ce qui implique que la contrainte de cisaillement dans ce cas est indépendante de la longueur de la poutre.

On a présenté en figure (III.6) les déplacements verticaux le long et pour différentes hauteurs de la poutre. On constate que ces déplacements sont importants plus qu'on diminue la hauteur et maximaux à l'extrémité de la poutre console.

### III.3.2 Exemple 2

La figure (III.7) montre un domaine rectangulaire,  $0 < x < L$  ;  $-h < y < h$ , soumis à une charge transversale uniforme q. Les conditions aux limites pour ce problème est écrit sous la forme.

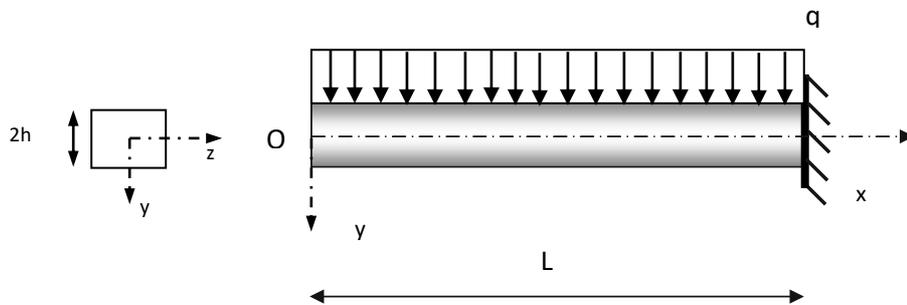


Figure (III.7) : Poutre console soumise à une charge uniformément répartie q

On prend :  $f_{vls} = 0; f_{vli} = 0; f_{vcs} = q; f_{vci} = 0; Ne = 0; Me = 0; Qe = 0$  les équations III.17 Deviennent comme :

Pour ce cas de chargement on tire les expressions suivantes :

$$C_6 = 0; C_8 = 0; C_1 = 0; C_3 = 0; C_5 = 0; C_7 = 0; C_9 = 0; C_{10} = 0; C_{13} = 0; C_{15} = 0; C_{16} = 0; C_{17} = 0; C_{18} = 0;$$

$$C_{19} = 0; C_2 = -\frac{1}{20} \cdot \frac{q}{h}; C_4 = \frac{1}{40} \cdot \frac{q}{h}; C_{11} = -\frac{1}{4} q; C_{12} = \frac{3 \cdot q}{8 \cdot h}; C_{14} = -\frac{1 \cdot q}{8 \cdot h^3}; \quad (III.32)$$

La fonction d'Airy correspondante est :

$$\Phi_2 = -\frac{1}{40} \cdot \frac{q \cdot (10 \cdot x^2 \cdot h^3 - 15 \cdot x^2 \cdot y \cdot h^2 + 2 \cdot y^3 \cdot h^2 + 5 \cdot x^2 \cdot y^3 - y^5)}{h^3} \quad (\text{III.33})$$

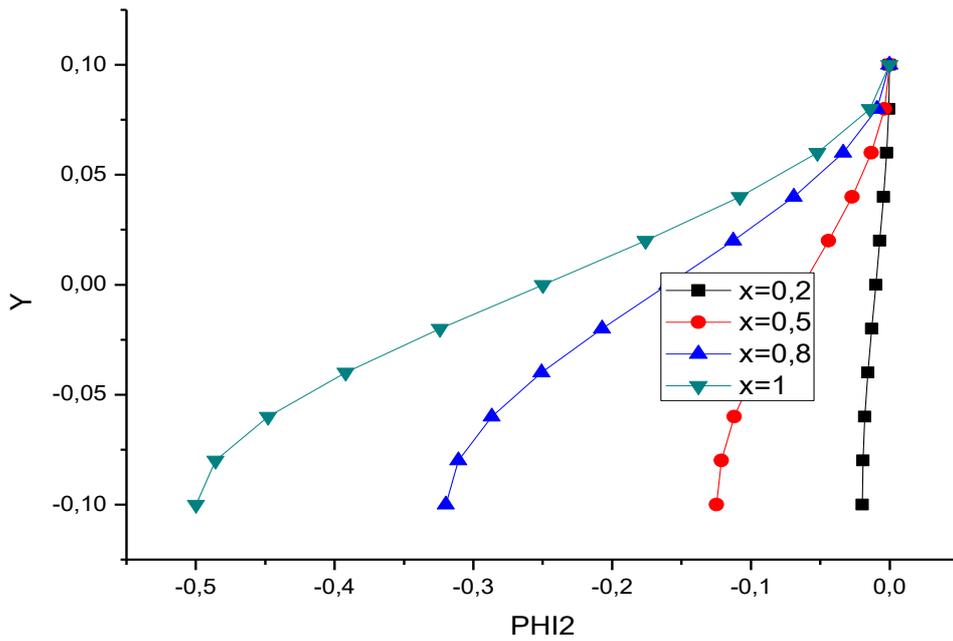
Etat de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{x_2} = -\frac{1}{20} \cdot \frac{q \cdot y \cdot (6 \cdot h^2 + 15 \cdot x^2 - 10 \cdot y^2)}{h^3} \\ \sigma_{y_2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{q \cdot (2 \cdot h + y) \cdot (h - y)^2}{h^3} \\ \tau_{xy_2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{q \cdot x \cdot (h - y) \cdot (h + y)}{h^3} \end{cases} \quad (\text{III.34})$$

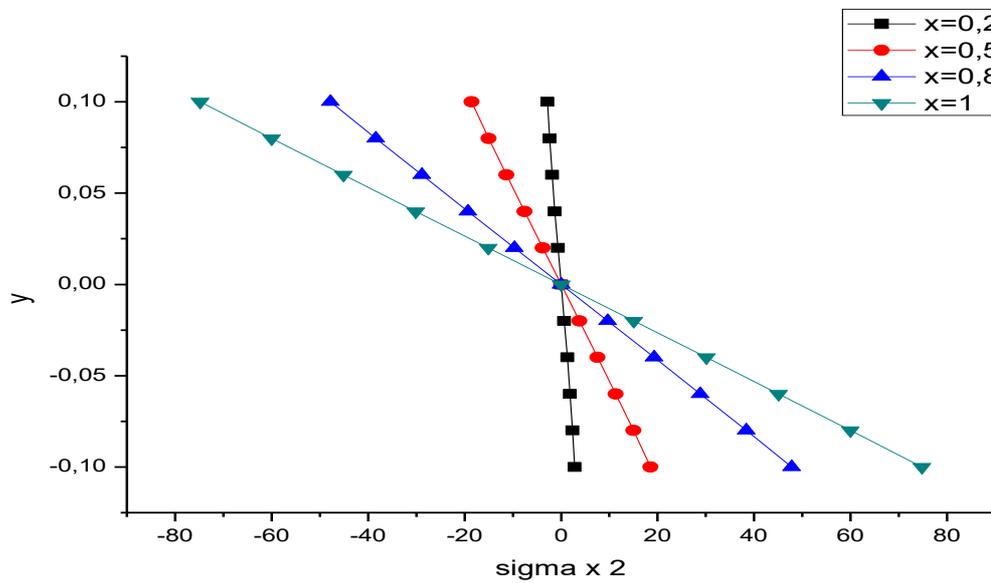
Etat de déplacements :

$$u = \frac{1}{2} \nu \cdot S_{11} \cdot q \cdot (L - x) \quad (\text{III.35})$$

$$v = \frac{3 S_{11} \cdot q \cdot x^2}{5 h} - \frac{3 S_{11} \cdot q \cdot x^4}{16 h^3} + \frac{3 \nu \cdot S_{11} \cdot q \cdot x^2}{8 h} - \frac{3 S_{11} \cdot q \cdot L^2}{5 h} + \frac{3 S_{11} \cdot q \cdot L^4}{16 h^3} - \frac{3 \nu \cdot S_{11} \cdot q \cdot L^2}{8 h} \quad (\text{III.36})$$



**Figure (III.8) :** Variation de  $\Phi_2$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console soumise à une charge uniformément répartie  $q$



**Figure (III.09) :** Variation de  $\sigma_{x_2}$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console soumise à une charge uniformément répartie  $q$

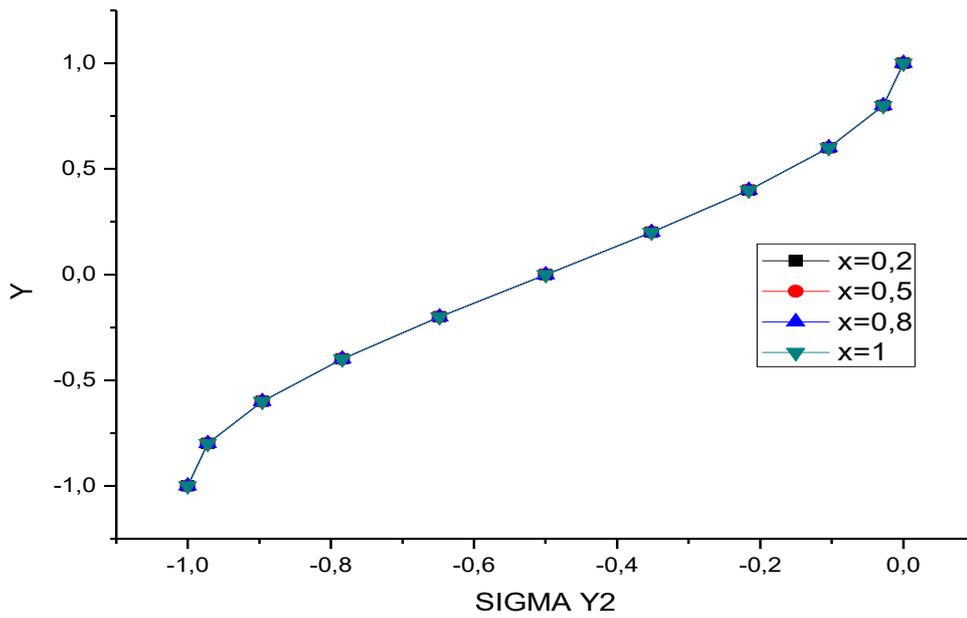


Figure (III.10) : Variation de  $\sigma_{y2}$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console soumise à une charge uniformément répartie  $q$

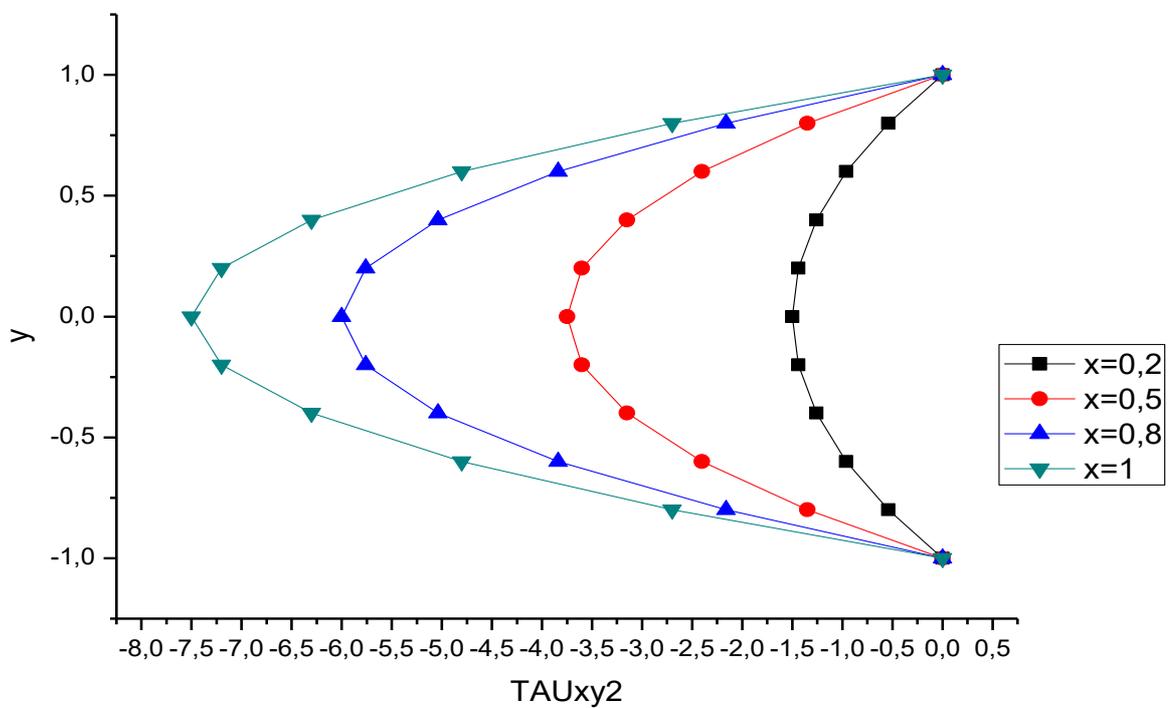
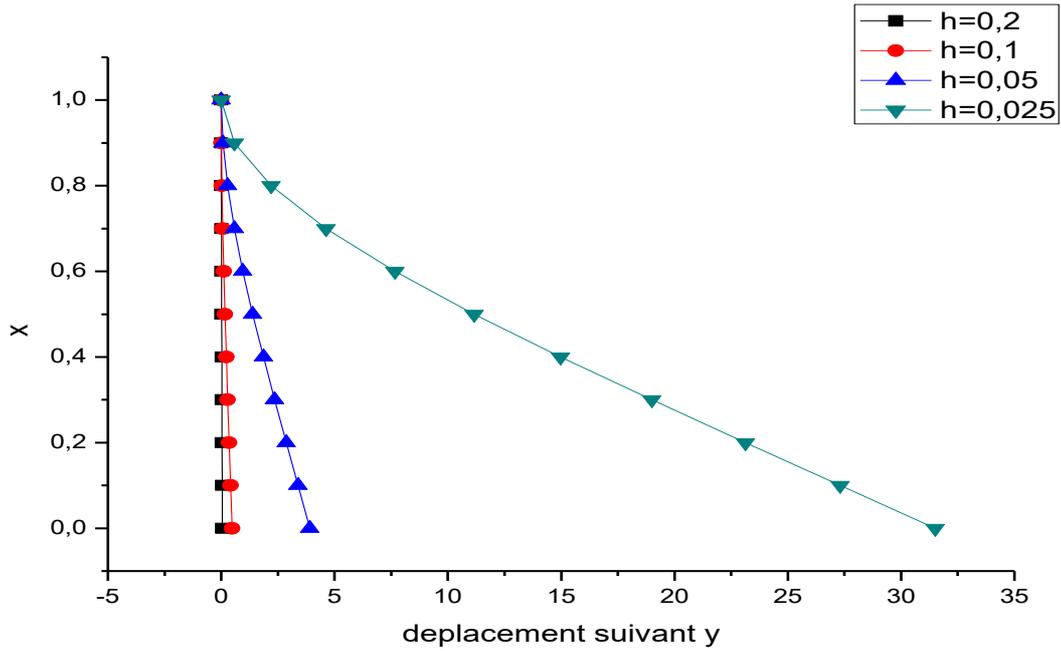


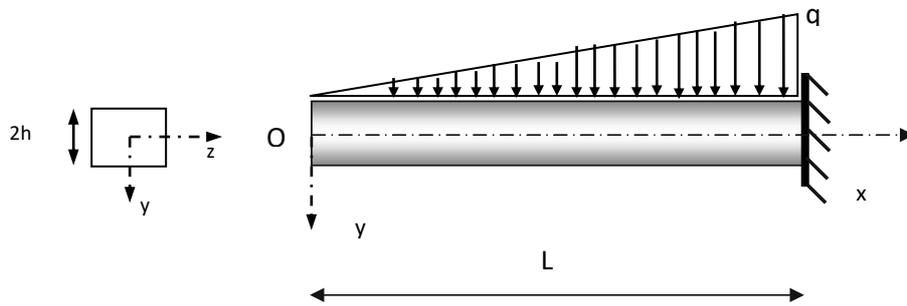
Figure (III.11) : Variation de  $\tau_{xy1}$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre console soumise à une charge uniformément répartie  $q$



**Figure (III.12) :** déplacements verticaux pour différentes hauteurs et le long de la poutre console soumise à une charge uniformément répartie  $q$

### III.3.3 Exemple 3

La figure (III.13) montre un domaine rectangulaire,  $0 < x < L$  ;  $-h < y < h$ , soumis à une charge transversale linéaire  $q$ . Les conditions aux limites pour ce problème est écrit sous la forme



**Figure (III.13) :** Poutre Console Soumise à Une Charge Linéairement Répartie  $q$

On prend :  $f_{vls} = q x/L$ ;  $f_{vli} = 0$ ;  $f_{vcs} = 0$ ;  $f_{vci} = 0$ ;  $Ne = 0$ ;  $Me = 0$ ;  $Qe = 0$  les équations III.17 Deviennent comme :

Pour ce cas de chargement on tire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} C_6 &= \frac{1}{40} \cdot \frac{h \cdot q}{L}; C_8 = -\frac{1}{20} \cdot \frac{q}{h \cdot L}; C_1 = 0; C_3 = 0; C_5 = 0; C_7 = 0; C_9 = 0; C_{10} = \frac{1}{40} \cdot \frac{q}{L \cdot h^3}; C_{13} = 0; C_{15} = 0; C_{16} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{q}{L}; \\ C_{17} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{q}{h \cdot L}; C_{19} = -\frac{1}{24} \cdot \frac{q}{L \cdot h^3}; C_{18} = 0; C_2 = 0; C_4 = 0; C_{11} = 0; C_{12} = 0; C_{14} = 0; \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

La fonction d'Airy correspondante est :

$$\Phi_3 = \frac{1}{120} \cdot \frac{q \cdot (h-y)^2 \cdot (3 \cdot y \cdot h^2 - 10 \cdot h \cdot x^2 + 6 \cdot h \cdot y^2 - 5 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot y^3)}{h^3} \quad (\text{III.38})$$

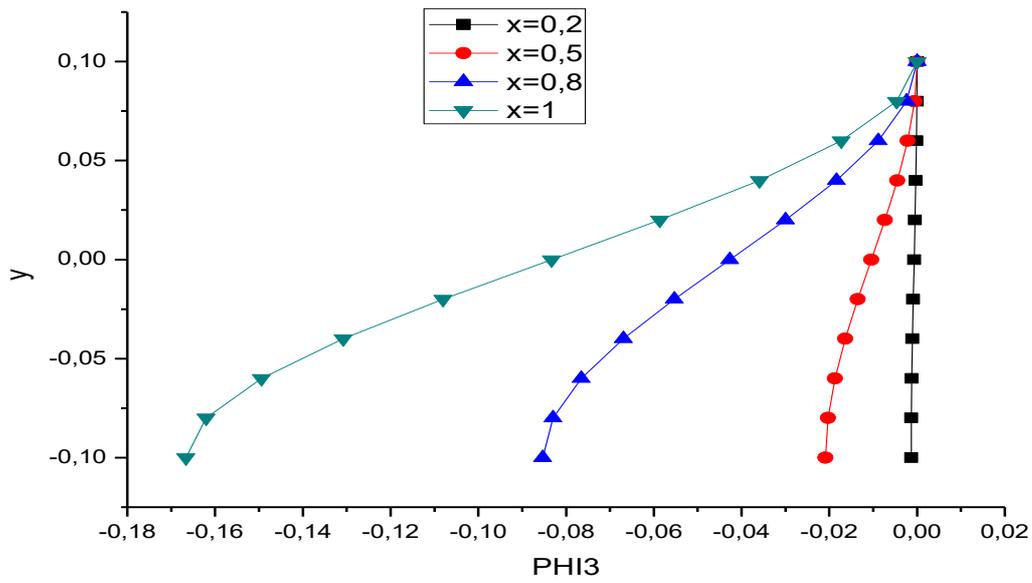
Etat de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{x_3} = -\frac{1}{20} \cdot \frac{q \cdot y \cdot (6 \cdot h^2 + 5 \cdot x^2 - 10 \cdot y^2)}{h^3} \\ \sigma_{y_3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{q \cdot (2 \cdot h + y) \cdot (h-y)^2}{h^3} \\ \tau_{xy_3} = -\frac{1}{40} \cdot \frac{q \cdot L \cdot (h-y) \cdot (h+y) \cdot (h^2 + 15 \cdot x^2 - 5 \cdot y^2)}{h^3} \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

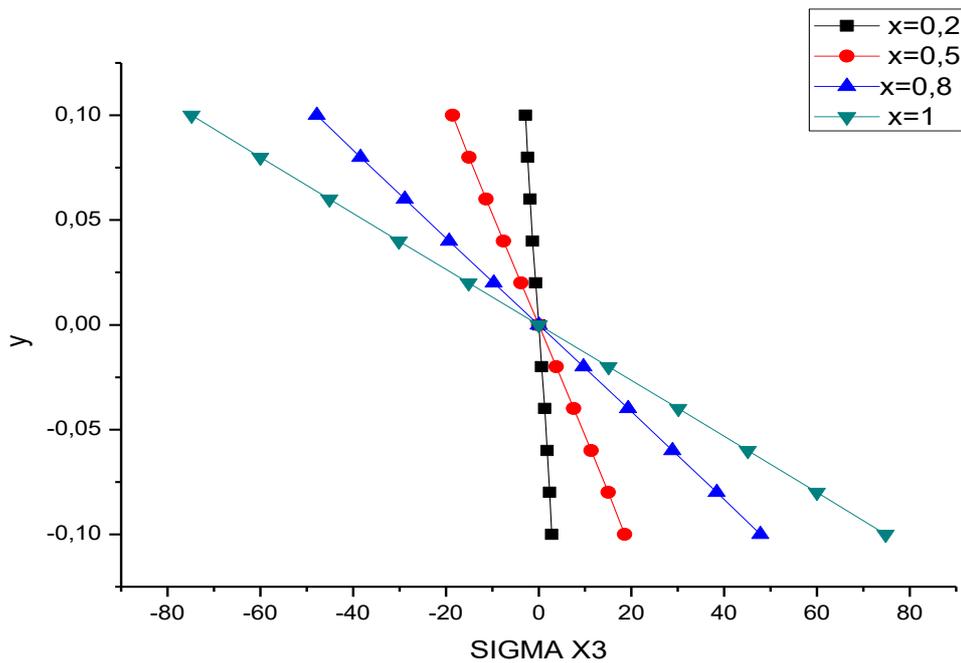
Etat de déplacement :

$$u = -\frac{1}{4} \frac{v \cdot S_{11} \cdot q \cdot (L-x) \cdot (L+x)}{L} \quad (\text{III.40})$$

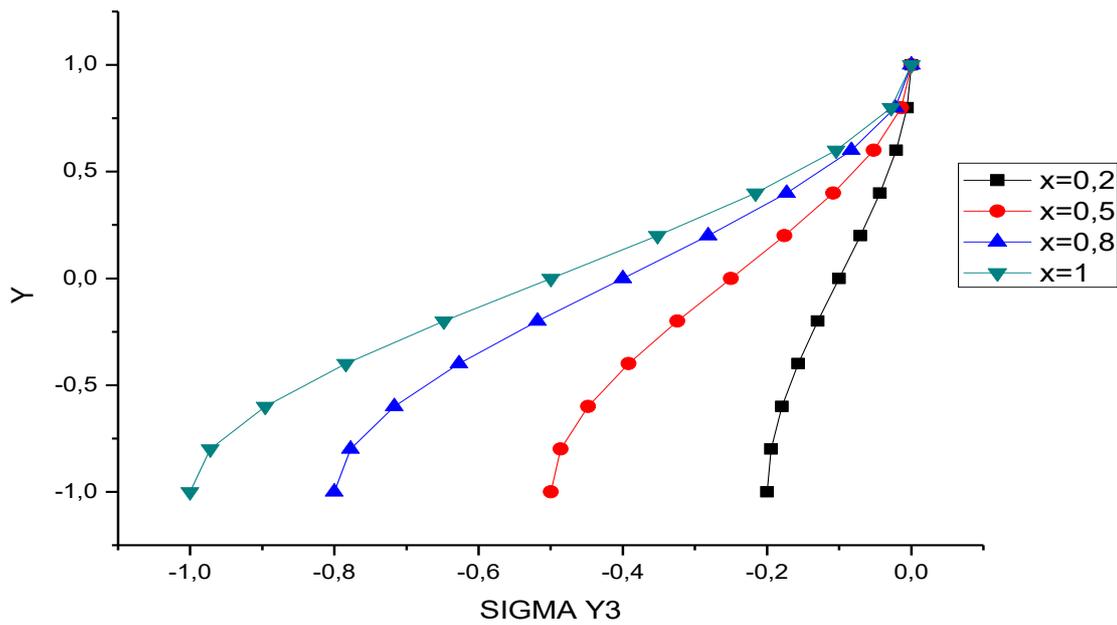
$$v = \frac{1}{20} \frac{S_{11} \cdot q \cdot (L-x)^2 (4 \cdot L^3 + 3 \cdot L^2 \cdot x - 32 \cdot L \cdot h^2 - 20 \cdot L \cdot v \cdot h^2 + 2 \cdot L \cdot x^2 - 16 \cdot x \cdot h^2 - 10 \cdot v \cdot h^2 \cdot x^3)}{L \cdot h^3} \quad (\text{III.41})$$



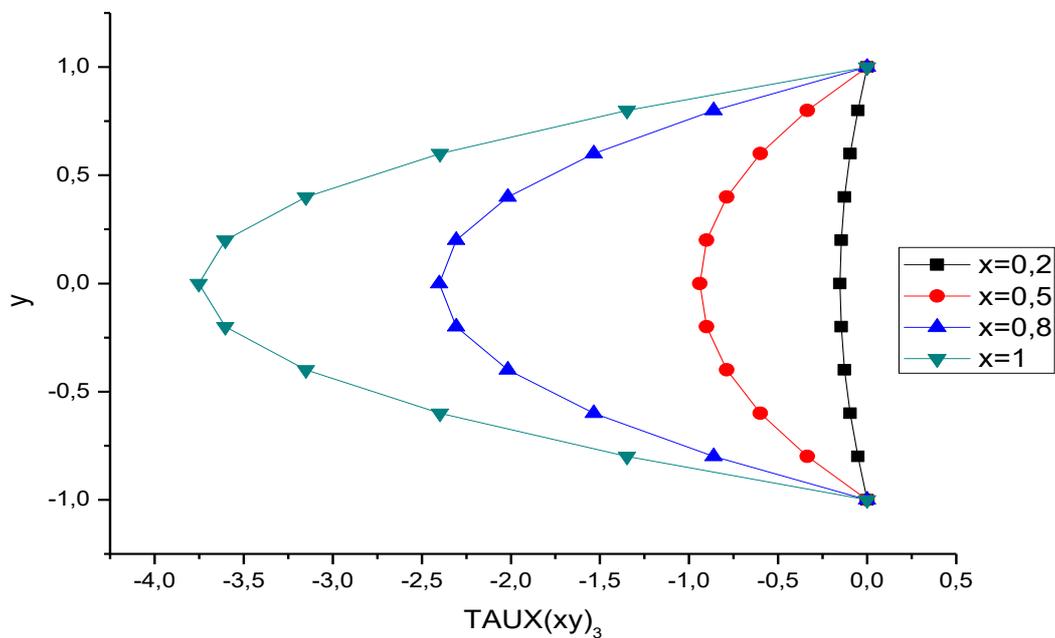
**Figure (III.14) :** Variation de  $\Phi_3$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre Console  
Soumis à Une charge Linéairement Réparte q



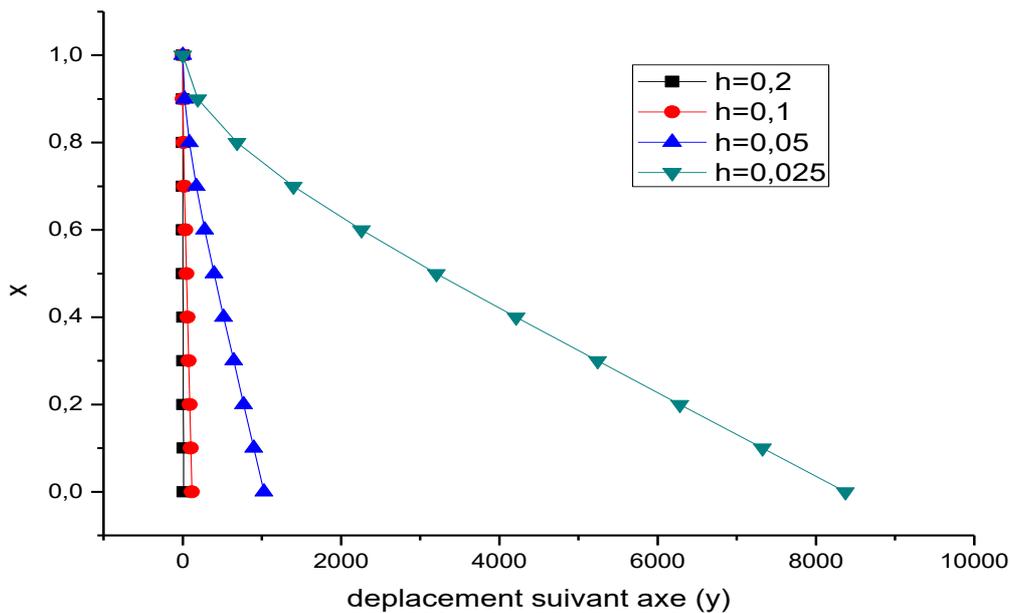
**Figure (III.15) :** Variation de  $\sigma_{x3}$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre Console  
Soumis à Une charge Linéairement Réparte q



**Figure (III.16) :** Variation de  $\sigma_{y_3}$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre Console Soumis à Une charger Linéairement Réparte q



**Figure (III.17) :** Variation de  $\tau_{xy_3}$  pour différentes sections et suivant la hauteur de la poutre Console Soumis à Une Charger Linéairement Réparte q



**Figure (III.18) :** déplacements verticaux pour différentes hauteurs et le long de la poutre Console Soumis à Une Charger Linéairement Réparte  $q$

Les figures (III.8) et (III.14) représentent les variations de la fonction d'Airy relatives aux charges uniformément et linéairement réparties respectivement. Dans ce cas, on constate que ces distributions sont de degré supérieur et qui donnent des valeurs maximales au niveau de l'encastrement et de mêmes signes contrairement au cas d'une charge concentrée de l'exemple 1.

En ce qui concerne les variations de la contrainte normale et tangentielle pour ces cas de chargement montrés en figures (III.9) , (III.15),(III.11) et (III.17) sont commentés de la même façon qu'au cas précédent par conséquent ces distributions sont différentes le long de la poutre et qui sont maximales au niveau de l'encastrement.

Si cette poutre est soumise aux charges réparties (uniforme ou linéaire) sur la face supérieure, on remarque dans ces cas la présence des contraintes normales associées à l'axe des  $y$  et qui sont maximales à la face supérieure. Par ailleurs le long de la poutre ces contraintes sont identiques pour le cas d'une charge uniforme de la figure (III.10), par contre sont différentes pour le cas d'une charge linéaire de la figure (III.16) .

Il est remarqué que les déplacements verticaux pour les deux cas de charges réparties représentés en figures (III.12) et (III.18) sont commentés de façon similaire du cas d'une charge concentrée.

### ***III.4 Conclusion***

Dans ce chapitre une solution d'élasticité est développée pour le problème d'une poutre console en état de contrainte plane, tout en utilisant des fonctions d'Airy correspondantes aux différentes conditions de chargement de la poutre en sollicitation de flexion. En tenant compte de ces diverses conditions de charges effectuées aux exemples 1,2 et 3, on a représenté la prédiction en premier lieu des fonctions d'Airy et en second lieu les contraintes normales et tangentielles ainsi en dernier lieu les déplacements verticaux ou plutôt les flèches.

# Conclusion Générale

Au cours de ce travail, une analyse statique en sollicitation de flexion a été effectuée sur des poutres consoles. Nous avons développé au chapitre trois la solution analytique pour la résolution du problème d'une poutre console soumise aux différentes charges (concentrée, uniformément répartie et linéairement répartie). Cette solution est basée sur l'introduction de la fonction d'Airy qui a été déterminée complètement afin de prédire les contraintes et par suite les déplacements dans cette poutre.

L'utilisation de la fonction d'Airy est nécessaire pour la résolution des problèmes de poutres en contraintes planes soumises à des charges réparties, on peut également noter que la variation des conditions de chargement influe directement sur le degré de la fonction d'Airy.

Les résultats obtenus présentés au chapitre trois, montrent que l'évolution des contraintes suivant la hauteur de la poutre est caractérisée par une forme linéaire pour les contraintes normales relatives à la longueur et par une forme parabolique pour les contraintes de cisaillement. Les valeurs des déformées obtenues pour la poutre console sont petites en augmentant la hauteur. A partir de ces constatations, on peut dire que les résultats obtenus pour la poutre console mettent clairement en évidence l'influence du dimensionnement sur la distribution des contraintes et des déplacements.

À partir de cette étude réalisée, il est important de tirer les conclusions suivantes :

- La méthode de contrainte d'Airy est très utile et pratique pour résoudre des problèmes de poutres soumises à des charges spécifiques ou plutôt réparties selon un polynôme d'ordre supérieur.
- L'évolution de la fonction d'Airy est importante au niveau des zones de concentration des contraintes.

Et à la fin, nous nous recommandons les futurs masters d'utiliser cette fonction d'Airy pour l'analyse statique des poutres composites ou fonctionnellement graduées avec diverses conditions aux bords.



# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] DJAFOUR Mustapha : Cours génie civil « Elasticité Générale». 09/1994  
Université Tlemcen.
- [2] Helmut Hlöcker: Mécanique de milieu contenu « Elasticité Plan». 2010
- [3] Yves DEBARD (IUT Le Mans): RDM 5 Module Elasticité Plan. 2009
- [4] Exact Elasticity Solution for the Density Functionally Gradient Beam by Using  
Airy Stress Function [10.4028/www.scientific.net/AMM.110-116.4669](http://www.scientific.net/AMM.110-116.4669) . 2012