

CHAPITRE III:
MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE DU BRAS
MANIPULATEUR ROB03

III.1 Introduction

Le **ROB3** est un robot de haute qualité de formation, particulièrement conçu pour l'usage dans toutes les sphères d'éducation et de formation de robotique. Le bras articulé de **ROB3** a cinq axes et une pince, qui sont actionnés par les servomoteurs à courant continu. La position absolue de tous les axes est déterminée par les capteurs de position rotatoires potentiométriques.

La conception et la commande de notre bras manipulateur (**ROB3**) nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :

- Les modèles de transformation entre l'*espace opérationnel* (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'*espace articulaire* (dans lequel est définie la configuration du robot), c'est ainsi que on va étudier les modèles *géométriques direct* et *inverse* qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction de la configuration du mécanisme et inversement.

Mais ce qui nous intéresse de plus dans notre travail, c'est le modèle géométrique inverse.

III.2 Modèle géométrique direct

III.2.1 Définition

Le modèle géométrique direct est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, les coordonnées opérationnelles, du robot en fonction de ses coordonnées articulaires. Dans le cas d'une chaîne simple ouverte, il peut être représenté par la matrice $T_{0,n}$ qui se calcule par :

$$T_{0,n} = T_{0,1}(q_1) \times T_{1,2}(q_2) \times \dots \times T_{n-1,n}(q_n).$$

Le modèle géométrique direct du robot peut se représenter par la relation :

$$X = f(q)$$

Où X est le vecteur des coordonnées opérationnelles exprimées dans le repère de référence R_0 , et q les variables articulaires.

La matrice $T_{0,n}$ représente la position et l'orientation, exprimées dans le repère de référence R_0 , de l'organe terminal du robot.

La méthode proposée utilise les matrices de transformation homogène.[8]

III.2.2 Principe

- Fixer des repères à chaque corps du robot,
- Calculer les matrices homogènes entre chaque corps,
- Calculer la matrice homogène entre base et organe terminal.[8]

III.2.3 Hypothèses

On suppose que le robot est constitué d'un chaînage de $n+1$ corps liés entre eux par n articulations rotoïdes ou prismatiques. A chaque corps, on associe un repère R_i . Les repères sont numérotés de 0 à n . La $i^{ème}$ articulation, dont la position est notée q_i , est le point qui relie les corps $i-1$ et i .

Pour le **ROB3**, $n= 5$. [2]

III.2.3 Règle de la main droite

Dans la représentation spatiale, la règle de la main droite nous permet de mieux placer les repères R_i de coordonnées $X Y Z$. comme montre figure II.11

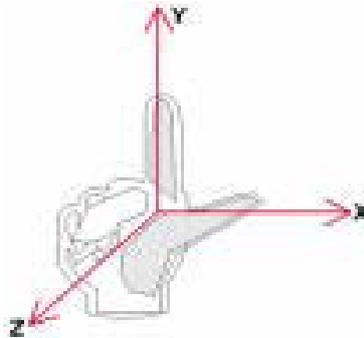


Figure III.1 : Schéma de la main droite.

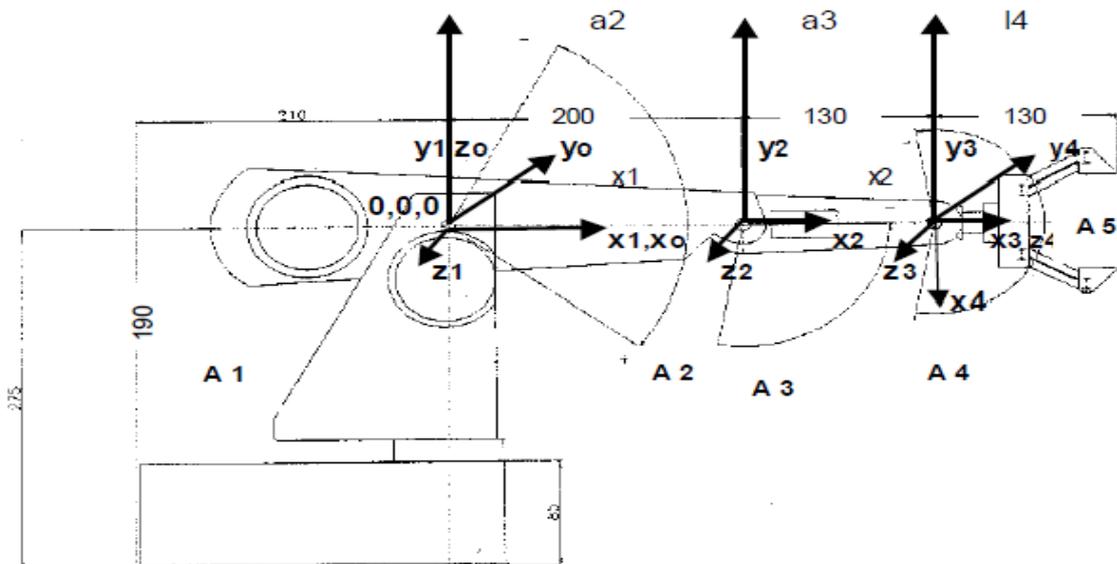


Figure III.2 : Représentation des repères sur le **ROB3**.

III.2.4 Convention de Denavit-Hartenberg (DH)

C'est une méthode destinée à systématiser la modélisation de n'importe quel type de robot série. Ses principaux avantages sont :

- Simplification maximale du modèle géométrique.
- Etablissement d'une norme reconnue par tous.[8]

III.2.4.1 Hypothèse

On peut représenter l'attitude d'un repère R_i par rapport à un repère R_{i-1} à l'aide de 4 paramètres uniques à condition de fixer 2 contraintes :

- DH1 : l'axe x_i de R_i est u à l'axe z_{i-1} de R_{i-1} ,
- DH2 : l'axe x_i coupe l'axe z_{i-1} . [2]

III.2.4.2 Les paramètres de Denavit-Hartenberg

Décomposition en 4 transformations élémentaires :

1. Rotation autour de z d'un angle θ_i ,
2. Translation le long de z d'une longueur d_i ,
3. Translation le long de x d'une longueur a_i ,
4. Rotation autour de x d'angle α_i . [8]

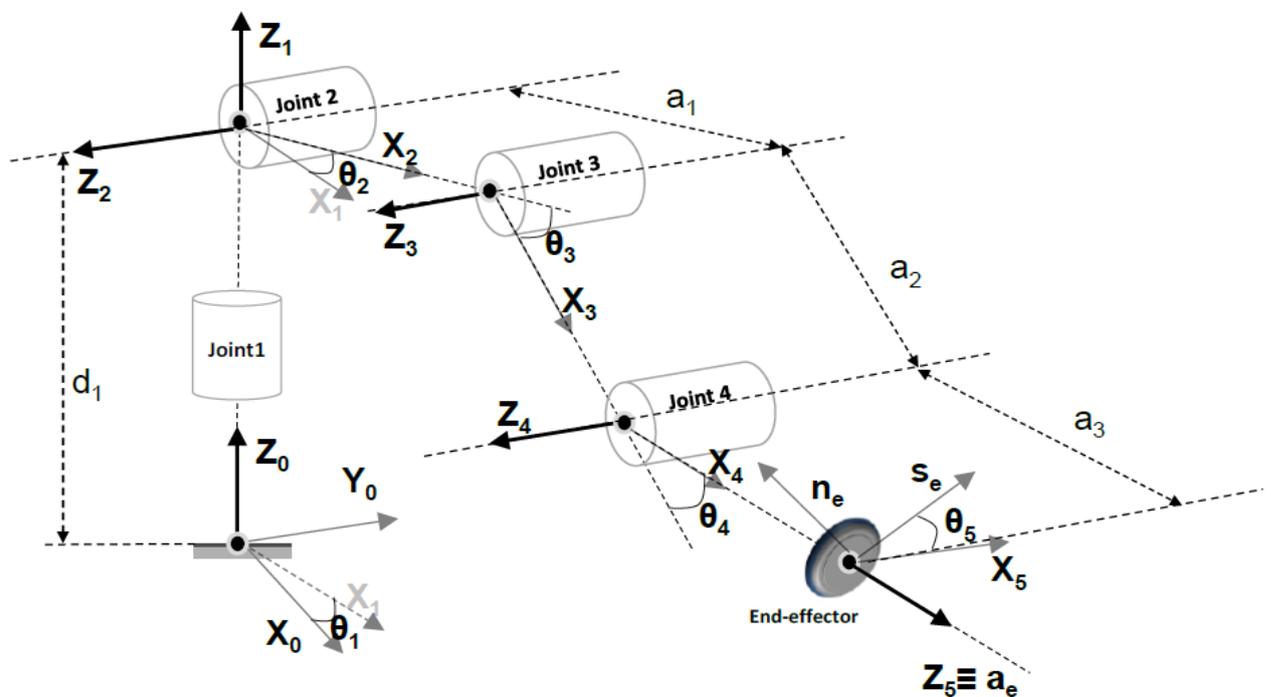


Figure III.3 : Représentation graphique des paramètres de Denavit-Hartenberg *ROB3*.

Proposition

Soit une matrice homogène $DH_{i-1, i}$, i de transformation entre 2 repères vérifiant les conditions DH1 et DH2. Il existe 4 paramètres uniques $a_i, d_i, \theta_i, \alpha_i$ vérifiant :

$$DH_{i-1, i} = R(z_{i-1}, \theta_i) T(z_{i-1}, d_i) T(x_i, a_i) R(x_i, \alpha_i)$$

Les termes $a_i, d_i, \theta_i, \alpha_i$ sont appelés les paramètres de Denavit-Hartenberg.

III.2.4.3 Matrice homogène de Denavit-Hartenberg

$$DH_{i-1, i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i * \cos\alpha_i & \sin\theta_i * \sin\alpha_i & \alpha_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i * \cos\alpha_i & -\cos\theta_i * \sin\alpha_i & \alpha_i * \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

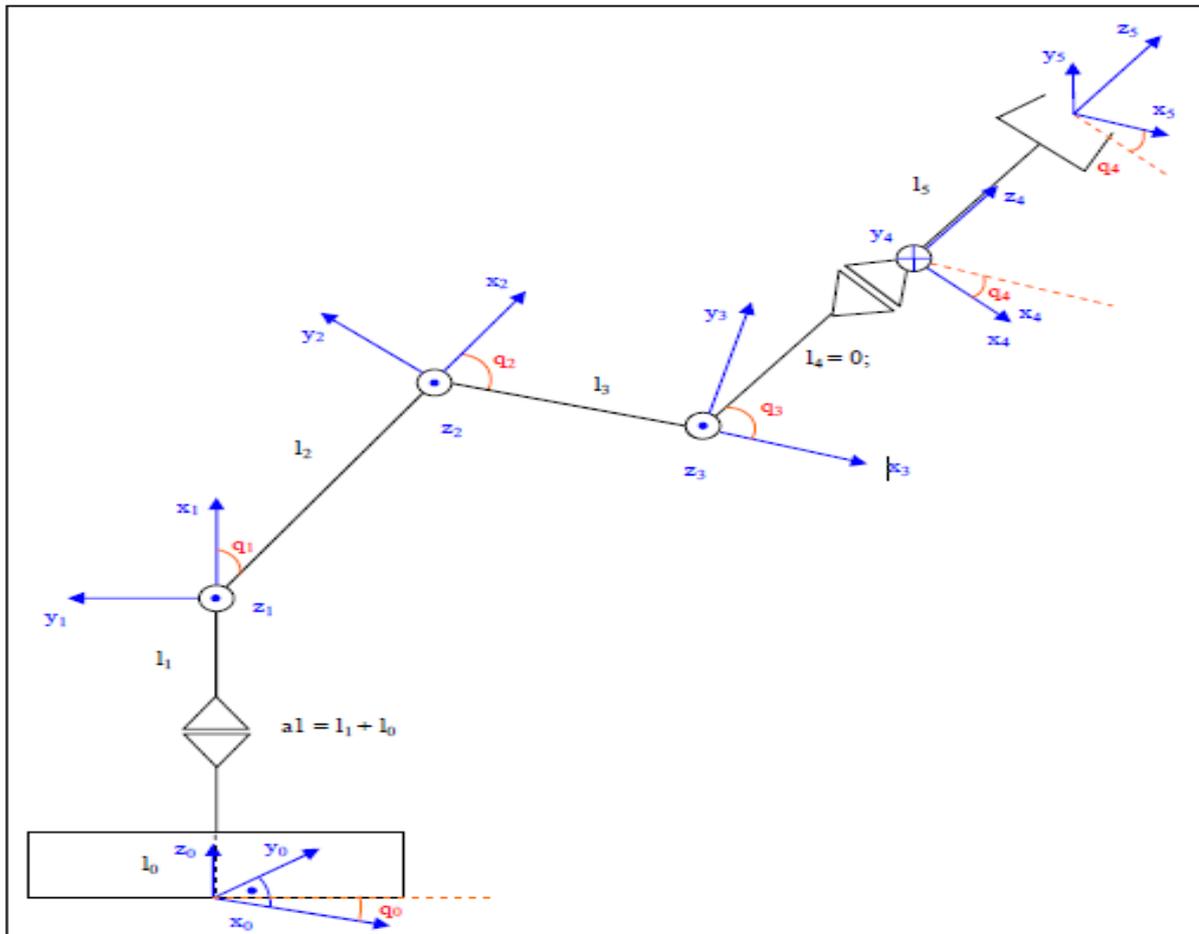


Figure III.4 : Représentation graphique du ROB3.

III.2.4.4 Obtention du modèle géométrique direct

Il existe plusieurs méthodes pour calculer le modèle géométrique direct à savoir :

Méthode de paramètres de Denavit-Hartenberg.

Méthode de paramètres de Denavit-Hartenberg modifié.

Méthode classique.

Parmi ces méthodes, on utilise la méthode de paramètres de Denavit-Hartenberg.[8]

Articulateur	A_i	a_i	d_i	θ_i
1	$\frac{\pi}{2}$	0	27.5	θ_1
2	0	20	0	θ_2
3	0	13	0	θ_3
4	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\theta_4 + \frac{\pi}{2}$
5	0	0	13	θ_5

Tableau III.1: Paramètres de Denavit-Hartenberg.

Après l'utilisation de la méthode de Denavit-Hartenberg, on a obtenu les résultats suivants :

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 275 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 20 * \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 20 * \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 13 * \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 13 * \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{34} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4 + \frac{\pi}{2}) & 0 & -\sin(\theta_4 + \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(\theta_4 + \frac{\pi}{2}) & 0 & \cos(\theta_4 + \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{45} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{05} = T_{01} * T_{12} * T_{23} * T_{34} * T_{45}$$

$$T_{05} = \begin{bmatrix} C1C5C234 & -C1S5C234 & -C1S234 & -C1(d5S234 + a3C23 + a2C2) \\ S1C5C234 & -S1S5C234 & -S1S234 & -S1(d5S234 + a3C23 + a2C2) \\ C5S234 & S5S234 & C234 & d5C234 + a3S23 + a2S2 + d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sachant que:

$$\cos(\theta_1) = C1 ; \sin(\theta_1) = S1 ; \cos(\theta_2) = C2 ; \sin(\theta_2) = S2 ; \cos(\theta_3) = C3 ; \sin(\theta_3) = S3$$

$$\cos(\theta_4 - \frac{\pi}{2}) = C4 ; \sin(\theta_4 - \frac{\pi}{2}) = S4 ; \cos(\theta_5) = C5 ; \sin(\theta_5) = S5 ; \cos(\theta_2 + \theta_3) = C23$$

$$\sin(\theta_2 + \theta_3) = S23 ; \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = C234 ; \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = S234$$

III.3 Modèle géométrique inverse:

III.3.1 Définition :

Modèle géométrique inverse consiste à déterminer les coordonnées articulaires q permettant d'obtenir une situation désirée pour l'organe terminal et spécifiée par les coordonnées opérationnelles X . Il peut être représenté par la relation :

$$q = f(x). [8]$$

III.3.2 Obtention du modèle géométrique inverse

Il n'existe pas de méthode systématique d'inversion du modèle géométrique. Lorsqu'elle existe, la forme explicite, issue d'une inversion mathématique, qui donne toutes les solutions possibles au problème inverse (il y a rarement unicité de la solution) constitue le *modèle géométrique inverse*. Il existe un certain nombre de méthodes pour calculer le modèle géométrique inverse, notamment la méthode classique qui traite séparément chaque cas particulier et qui convient pour la plupart des robots industriels.

Lorsque le modèle géométrique inverse n'existe pas, c'est-à-dire qu'il n'existe pas une forme explicite, on peut calculer une solution particulière du problème inverse par des procédures numériques, qui est une solution locale au sens où elle dépend des conditions initiales. Notons que de telles méthodes sont pénalisantes du point de vue du temps de calcul.[8]

$$\frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)} = \frac{y}{x} \rightarrow \theta_0 = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{III.1})$$

Calcul de θ_1

$$Px = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - Px = 0 & (\text{III.2}) \\ t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - z = 0 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \cos \alpha - Px = 0 \\ t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \sin \alpha - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) = u_1 \\ t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2) = u_2 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

$$\text{Avec } u_1 = Px - t_3 \cdot \cos \alpha$$

$$u_2 = z - t_3 \cdot \sin \alpha$$

On sait que

$$\cos^2 (\theta_1 + \theta_2) + \sin^2 (\theta_1 + \theta_2) = 1 \quad (\text{III.4})$$

En reportant, les équations (III.2) dans l'équation (III.3).

$$(u_1 - t_1 \cdot \cos \theta_1)^2 + (u_2 - t_1 \cdot \sin \theta_1)^2 = t_1^2 \quad (\text{III.5})$$

Nous obtenons

$$u_1 \cdot \cos \theta_1 + u_2 \cdot \sin \theta_1 = \frac{t_1^2 - t_2^2 + u_1^2 + u_2^2}{2 \cdot t_1} \quad (\text{III.6})$$

Sachant que pour l'équation $X \cdot \sin\theta + Y \cdot \cos\theta = Z$ (II.7)

$$\text{Avec } X = u_2, \quad Y = u_1 \quad \text{et } Z = \frac{t_1^2 - t_2^2 + u_1^2 + u_2^2}{2 \cdot t_2}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{YZ - \varepsilon X \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{XZ + \varepsilon Y \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2}$$

Avec $\varepsilon = +/ - 1$.

Pour $\varepsilon = +1$, on a :

$$\theta_{11} = \arctg(\sin\theta_1 / \cos\theta_1)$$

Et pour $\varepsilon = -1$, on a :

$$\theta_{12} = \arctg(\sin\theta_1 / \cos\theta_1)$$

$$\theta_1 = \max(\theta_{11}, \theta_{12})$$

Calcul de θ_2

$$\cos\beta = \frac{Px - t_1 \cos\theta_1}{t_2}$$

$$\sin\beta = \frac{Z - t_1 \cos\theta_1}{t_2}$$

$$\beta = \arctg(\sin\beta / \cos\beta)$$

$$\theta_2 = \beta - \theta_1$$

$$\theta_3 = \alpha - \theta_1 - \theta_2$$

III.4 Résultats de simulation

Partant de la modélisation géométrique qu'on a eu à faire dans le chapitre précédent, nous allons programmer et simuler notre bras manipulateur **ROB3** sous l'interface Matlab. Ce logiciel est basé sur le calcul matriciel numérique. Et on a obtenu les résultats suivants:

III.4.1 Simulation

Les figures ci-dessous représentent la simulation du ROB3 sous Matlab

III.4.1.1 Simulation du model géométrique directe:

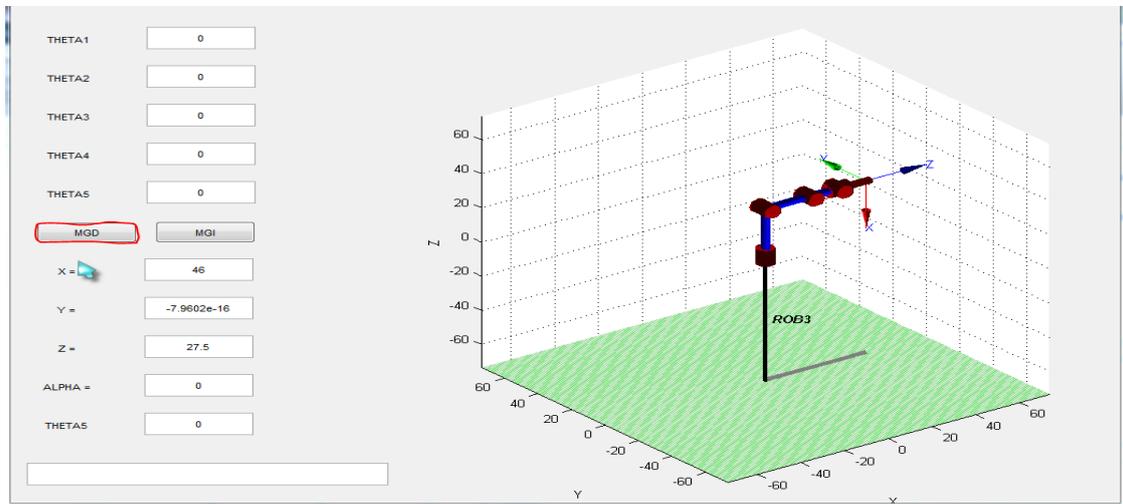


Figure. III.5 : Représentation du ROB3 position initiale.

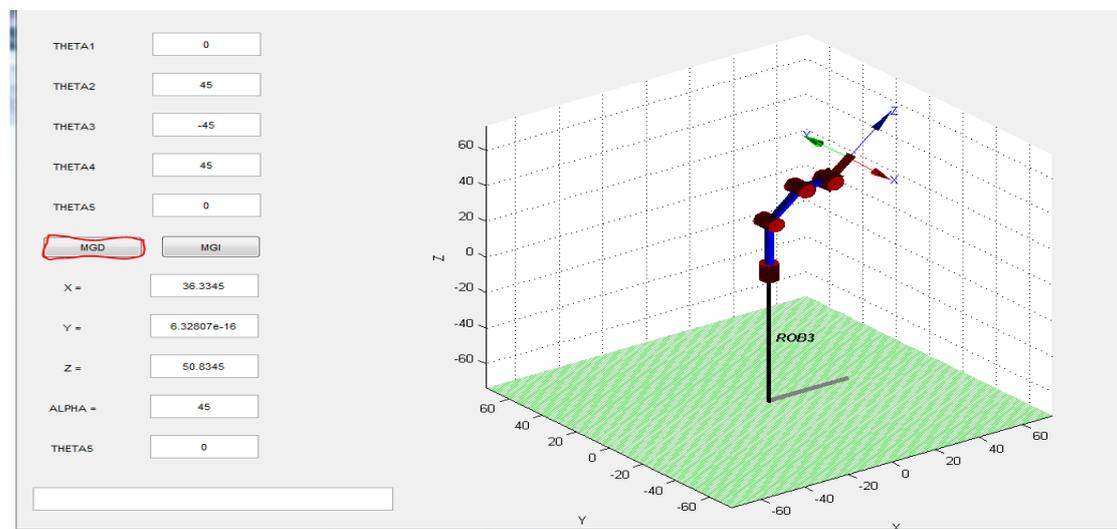


Figure. III.6 : Représentation du ROB3 dans une position désirée.

III.4.1.2 Simulation du model géométrique inverse

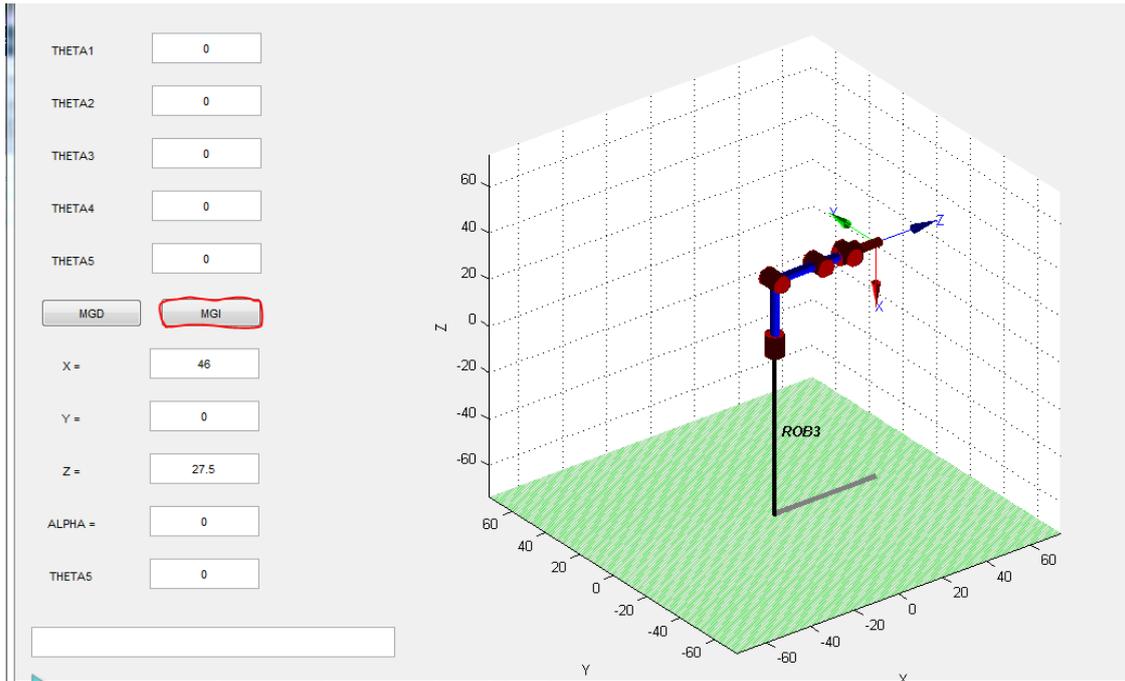


Figure. III.7 : Représentation du ROB3 position initiale.

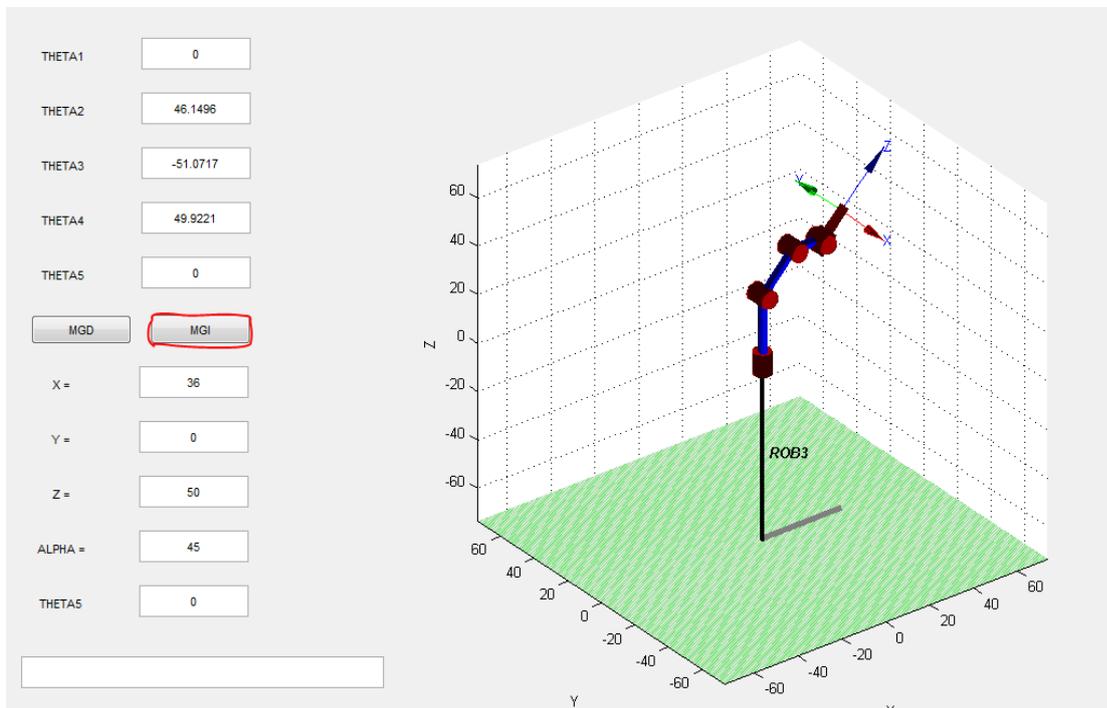


Figure. III.8 : Représentation du ROB3 dans une position désirée

III.4.2 Résultats

III.4.2.1 Résultats des simulations du model géométrique directe:

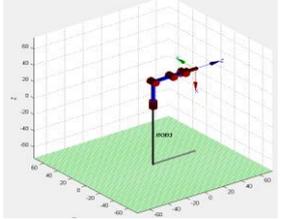
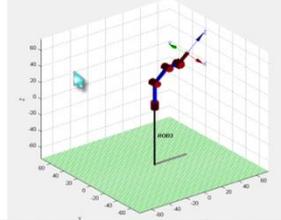
Essais	Position désirée	X	Y	Z	α	$\theta 5$	Images	états
Essai 1 MGD	$\theta 1 = 0$ $\theta 2 = 0$ $\theta 3 = 0$ $\theta 4 = 0$ $\theta 5 = 0$	46	-7.9602e-16	27,5	0	0		valide
Essai 2 MGD	$\theta 1 = 0$ $\theta 2 = 45$ $\theta 3 = -45$ $\theta 4 = 45$ $\theta 5 = 0$	36.3345	6.32807-16	50.83 45	45	0		valide

Tableau. III. 2 : Résultats des simulations du model géométrique directe.

III.4.2.1 Résultats des simulations du model géométrique inverse:

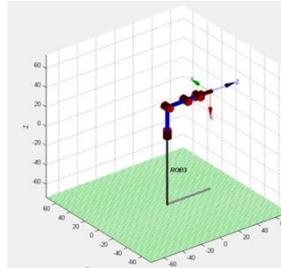
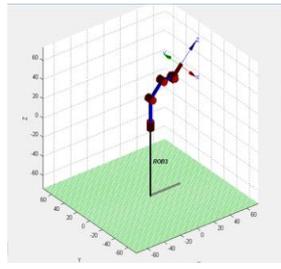
Essais	Position désirée	$\theta 1$	$\theta 2$	$\theta 3$	$\theta 4$	$\theta 5$		
Essai 3 MGI	$X = 46$ $Y = 0$ $Z = 27.5$ $\alpha = 0$ $\theta 5 = 0$	0	0	0	0	0		valide
Essai 4 MGI	$X = 36$ $Y = 0$ $Z = 50$ $\alpha = 45$ $\theta 5 = 0$	0	46.1496	-51.0717	49.9 221	0		valide

Tableau. III. 3 : Résultats des simulations du model géométrique inverse.

III.4.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait la modélisation géométrique directe et inverse de notre bras de robot (**ROB3**) qui consiste à déterminer la position de l'organe terminal en fonction de ses coordonnées articulaires et vice versa. Ainsi la programmation et la simulation de notre bras manipulateur **ROB3** sous l'interface **Matlab**.