

République Algérienne Démocratiques et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Ibn Khaldoun Tiaret



Faculté des sciences appliquées

Département de génie civil

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie civil

Option : VOA

Présenté par :

Debdab Houari

Bouker Soufiane

Sujet du mémoire :

**Analyse du comportement mécanique des plaques
à gradient de propriétés reposées sur une fondation
de type Winkler-Pasternak**

Soutenu le : 27 Juin 2018

devant le Jury composé de :

Mr. Kh. Bouakkaz

UIK-Tiaret

Président

Mr. R. Benferhat

UIK-Tiaret

Rapporteur

Mr. H. Bouzid

UIK-Tiaret

Examineur

Mme. S. Ait Yahia

UIK-Tiaret

Examineur

Mme. K. Wazzir

UIK-Tiaret

Examineur

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

REMERCIEMENTS

D'abord, La grande reconnaissance et le grand remerciement à Dieu Seigneur de l'univers.

*Ensuite, J'exprime mes profonds remerciements à mon encadreur
Monsieur **BENFERHAT RABIA**, pour son aide précieuse,
sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour
l'aboutissement de ce travail.*

*Je remercie également le président et les membres du jury d'avoir accepté
d'évaluer ce travail.*

*De même, je tiens à remercier Monsieur **BOUAKKAZ KHALED**, pour le
temps accordé et les conseils et discussions que j'avais l'occasion
d'entretenir avec eux.*

*Je désire aussi adresser mes remerciements les plus respectueux à Monsieur
H. BOUZID, qui m'a fait l'honneur de bien vouloir juger ce travail.*

*Je désire aussi adresser mes remerciements à madame **S. AIT YAHIA***

*Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou du loin à réaliser ce
travail.*

DEDICACE

À ma mère qui m'a pris avec amour et tendresse et qui fait tout pour mon succès, sauvée et sauvée par Dieu

Elle a fait plus que la mère peut faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leurs vies et leurs études;

Et mon père du défunt, que Dieu a pitié de lui, et mette son bon esprit et fait de sa tombe un jardin d'enfants du paradis

Rien au monde ne mérite les efforts faits jour et nuit pour mon éducation et mon bien-être;

À tous mes amis et camarades de classe qui ont fait un beau pas dans ma vie;

À tous mes amis, en particulier ABDELHAFID, ADAM ABDRABOU, MOKHTAR, OUSSAMA, MOHAMMED, SOFIANE, BELGANDOUZ, ZOHIER, OTHMANE BENINE, YUCEF

À mon cher ami BENAIISA AHMED

Pour tous les membres de ma famille, en particulier AHMED

Dans cet humble travail, vous trouvez une expression émotionnelle.

À toute la famille NOURDDINE, BENDAOUED, MOHAMMED, LHADJ, CHIHAB AKRAM, CHEMSEDDINE

Donne ce travail

DEBDAB HOUARI

DEDICACE

A ma mère qui m'a entouré d'amour, d'affection et qui fait tout pour ma réussite, que dieu la garde et la protège

as fait plus qu'une mère puisse faire pour que ses enfants suivent le bon chemin dans leur vie et leurs études ;

A mon père qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui, que dieu le garde et le protège ;

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être ;

*A mon oncle et sa femme, source de soutien et de conseils ;
A tous mes amis et collègues de la promotion qui ont fait une belle étape de ma vie ;*

A tous les membres de ma famille, petits et grands

Veillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection ;

Je dédie ce travail

BOUKERSOUFIANE

RÉSUMÉ

L'effet de la forme de distribution de porosité sur le comportement mécanique des plaques en matériaux à gradient de propriétés simplement appuyées reposant sur fondation de type Winkler-Pasternak est étudié analytiquement dans le présent travail. La règle modifiée du mélange couvrant les phases et la forme de porosité est utilisée pour décrire les propriétés des matériaux des plaques FGM poreuses. L'effet de cisaillement transverse est inclus en utilisant une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement de forme hyperbolique. Le nombre de variables inconnues impliqués dans la présente théorie est seulement quatre contre cinq ou plus en cas d'autres théories de déformation de cisaillement. Le coefficient de Poisson est maintenu constant. Les équations d'équilibre pour la plaque FGM reposant sur une fondation élastique est obtenue par le principe des travaux virtuels.

L'effet de la fraction volumique de porosité et sa forme de distribution sur les plaques en Al / Al₂O₃, Al/ZrO₂ sont présentés sous formes numériques et graphiques. Les rôles joués par l'indice de la fraction volumique des constituants, les paramètres de rigidité de la fondation et la géométrie de la plaque sont également étudiés.

Mots-clés : Matériaux à gradient de propriété, Théorie raffinée de déformation de cisaillement, comportement mécanique, Fondation élastique.

ABSTRACT

The effect of the distribution shape of the porosity on the mechanical behavior of the simply supported functionally graded plate based on the Winkler-Pasternak foundation is studied analytically in the present work. The modified mixture rule covering the phases and the porosity form is used to describe the properties of the porous FGM plate materials. The transverse shear effect is included using a new refined theory of hyperbolic shear deformation. The number of unknown variables involved in this theory is only four to five or more in case of other shear deformation theories. The Poisson's ratio is kept constant. The equilibrium equations for the FGM plate based on an elastic foundation are obtained by the principle of virtual works.

The effect of the volume fraction of porosity and its distribution form on Al / Al₂O₃, Al / ZrO₂ plates are presented in numerical and graphical forms. The roles played by the index of the volume fraction of the constituents, the rigidity parameters of the foundation and the geometry of the plate are also studied.

Keywords: Gradient-graded materials, refined theory of shear deformation, mechanical behavior, Elastic foundation.

ملخص

تأثير شكل توزيع المسامات على السلوك الميكانيكي للوحة متدرجة الخصائص موضوعة على أساس من نوع وينكلر-باسترنالك درست في هذا البحث. تم استخدام القانون المعدل للخليط لوصف خصائص المواد التقريبية وشكل توزيع المسامات للوحات متدرجة الخصائص. التأثير المقرر للقص العرضي أخذ بعين الاعتبار باستخدام نظرية جديدة مبسطة للتشوه القصي. عدد المجاهيل في النظرية الحالية هو فقط أربعة مقابل خمسة أو أكثر في حالة النظريات الأخرى للتشوه القصي. يعتبر نسبة بواسون ثابتة. معادلات التوازن للوحات متدرجة الخصائص موضوعة على أساس مرن تم الحصول عليها عن طريق مبدأ مجموع الطاقة الكامنة..

تأثير شكل توزيع المسامات على اللوحات المصنوعة من عدة مواد قد وضح على شكل رقمي و بياني. الدور الذي يقوم به مؤشر حجم جزء التأسيسية، عامل صلابة الاساسات و هندسة اللوحة أيضا تم دراستها.

الكلمات المفتاحية: مواد متدرجة الخصائص، نظرية مبسطة للتشوه القصي، السلوك الميكانيكي، قاعدة مرنة.

SOMMAIRE

Résumé	i
Abstract	ii
الملخص.....	iii
Sommaire.....	iv
Liste de figures.....	viii
Liste des tableaux.....	xi
Liste des abréviations.....	xiii
Liste de notations.....	xiv
Introduction générale:	1
<i>Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites</i>	
I .1. Introduction :	4
I .2. Définition d'un matériau composite :.....	4
I .3. Types de matériau composite :	6
I .3.1.composites à fibres courtes :.....	6
I .3.2.composites à fibre longues :	6
I .4. Les constituants des matériaux composites :.....	7
I .4.1. Les matrices :.....	7
I .4.1.1. Résine thermodurcissable :.....	7
I .4.1.1.1. Résine polyesters :.....	7
I .4.1.1.2. Résines de condensation :.....	8
I .4.1.1.3. Résine époxydes :.....	9
I .4.1.2. Résines thermoplastiques :	10
I .4.2. Les fibres (renforts) :.....	10
I .4.2.1. Fibre de verre :.....	11

I .4.2.1.1. Propriétés mécaniques de fibre de verre :	12
I .4.2.2. Fibre de carbone :	12
I .4.2.2.1. Caractéristiques mécaniques de Fibre de carbone :	12
I .4.2.3. Fibre aramide :	13
I .4.2.3.1. Caractéristiques mécaniques de Fibre d’aramide.	14
I .4.2.4. Fibre céramique :	14
I .4.3. Les additifs :	14
I .5. Demain d’application des matériaux composites :	15
I .5.1. Secteur automobile :	15
I .5.2. Le projet EuroSpring :	15
I .5.3. Le projet Eurobogie :	15
I .5.4. Secteur naval :	16
I .5.5. Secteur aéronautique :	16
I .5.6. Secteur espace :	16
I.5.7. Les composites dans les produits militaires :	16
I.5.8. Les composites dans la construction civile :	17
I.6. Dynamisme et innovation des matériaux composites :	17
I.7.conclusion :	18

Chapitre II : Les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

II.1. Introduction :	20
II.2. Définition d’un matériau à gradient de propriétés (FGM) :	20
II.3. Aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés :	22
II .4. Conception des structures FGM :	23
II.5. Méthodes d’élaboration des FGM :	23
II .6. Le gradient :	24
II.7. Propriétés physiques et mécaniques des FGM :	25
II.7. 1. Aluminium :	25
II.7.1.1. Propriétés physiques de l’aluminium :	25
II.7.1.2. Propriétés mécaniques de l’aluminium :	25
II.7.1.3. Propriétés des alliages d’aluminium :	25
II.7.2. céramique :	25
II.7.2.1. Propriétés physiques de la céramique :	26

II.7.2.2. Propriétés mécaniques de la céramique :	26
II.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM:	26
II.9. Propriétés effectives des matériaux à gradient de propriété :	27
II.9.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :	27
II.9.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :	28
II.9.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :	28
II.10. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM:	29
II.11. Conclusion :	30

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

III.1. Introduction :	32
III.2. Définition des plaques :	32
III.3. Examen des théories récentes:	33
III.4. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (Classical Plate Theory CPT) :	34
III.4.1. Hypothèse de plaque mince (Kirchhoff–Love) :	34
III.4.2. Définition des efforts intérieurs (plaque mince) :	35
III.4.3. Nouvelles équations d'équilibre pour les moments :	35
III.4.4. Déplacements avec hypothèses dans la théorie de Kirchhoff :	36
III.5. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Déformation Theory FSDPT) :	36
III.5.1. Déplacements généralisés, cisaillement transverse et flexion simple :	37
III.6. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé :	38
III.7. Théorie de zig-zig:	39
III.8. Théorie de Poisson :	40
III.9. Conclusion :	44

Chapitre IV : Analyse de la flexion d'une plaque FGM sous l'effet de la forme de distribution de porosité

IV.1. Introduction :	46
IV.2. Formulation du problème :	47
IV.2.1. Théorie des plaques d'ordre supérieur :	47
IV.2.2. Théorie de la plaque de déformation cisailée sinusoïdale actuelle :	48
IV.2.2.1. Hypothèses de base :	48

IV.2.2.2. Champs de déplacement et souches :	48
IV.2.2.3. Propriétés matérielles efficaces des plaques céramiques fonctionnalisées en céramique:	50
IV.2.3. Équations gouvernantes et conditions aux limites:.....	52
IV.3. Résultats :	54
IV.4.conclusion :	64

Chapitre V : Effet de la forme de distribution de porosité sur le comportement statique des plaques FGM reposées sur une fondation élastique

V.1.Introduction :.....	66
V.2. Configuration géométriques et propriétés matérielles :.....	66
V.3. Champ de déplacements et déformations :.....	68
V.4. Les équations d'équilibre:.....	69
V.5. Résultats et discussion :	71
V.6.Conclusion :	82
Conclusions générale et perspectives.....	85

LISTE DES FIGURES

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

Figure I .01 : Schéma d'un matériau composite.	5
Figure I .02 : types de matrice.	7
Figure I .03 : types de renfort	11
Figure I .04 : Exemple de projet EuroSpring.....	15
Figure I .05 : Exemple de Eurobog.....	16

Chapitre II : Les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

Figure. II.01 : schéma d'un système de matériau à gradient de propriétés (FGM)	21
Figure .II.02 : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	21
Figure. II.03 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale.....	21
Figure. II.04 : Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite).....	22
Figure .II.05 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.	23
Figure. II.06 : Changement schématique de la microstructure dans un profile FGM	24
Figure. II.07 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	27
Figure. II.08 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	28
Figure. II.09 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM	29
Figure. II.10 : Principaux domaines d'application des FGM.	Erreur ! Signet non défini.

Chapitre III : Les différentes théories des plaques

Figure III.01 : géométries courantes en mécanique des structures.....	32
Figure III.02 : déformation d'une plaque.....	33
Figure III.03 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.	34
Figure III.04 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	37

Figure III.05 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques.....	39
Figure. III.06 : Champ de déplacements du modèle zig-zig d'ordre élevé.	40

Chapitre IV : Analyse de la flexion d'une plaque FGM sous l'effet de la forme de distribution de porosité

Figure IV.01 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ en fonction du rapport de géométrie a/b.....	59
Figure IV.02 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂ en fonction du rapport de géométrie a/b.....	60
Figure IV.03 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ en fonction du rapport d'épaisseur a/h.....	60
Figure IV.04 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂ en fonction du rapport d'épaisseur a/h.....	61
Figure IV.05 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃	61
Figure IV.06 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂	62
Figure IV.07 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂	62
Figure IV.08 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂	63
Figure IV.09 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃	63
Figure IV.10 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂	64

Chapitre V : Effet de la forme de distribution de porosité sur le comportement statique des plaques FGM reposées sur une fondation élastique

Figure V.01 : Géométrie et dimension d'une plaque FGM reposé sur une fondation élastique.....	67
Figure V.02 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie.....	77
Figure V.03 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie.....	78

Figure V.04 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur.....78

Figure V.05 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur.....79

Figure V.06 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique.79

Figure V.07 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique.80

Figure V.08 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique80

Figure V.09 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique.81

Figure V.10 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique.81

Figure V.11 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique82

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

Tableau I .01 : classes des matériaux composites.	6
Tableau I .02 : caractéristiques des résines thermoplastiques.....	10
Tableau I .03 : compositions des verres type E D et R.....	11
Tableau I .04 : Différents types des fibres de verre.....	12
Tableau I .05 : caractéristiques mécaniques des verres type E et R.....	12
Tableau I .06 : caractéristiques de fibre de carbone, comparée à celles des fibres de verre E. ...	13

Chapitre IV : Analyse de la flexion d'une plaque FGM sous l'effet de la forme de distribution de porosité

Tableau IV. 01 : Etude comparative du déplacement central non-dimensionnelle la contrainte dans le plan d'une plaque carré FGM en alumine / aluminium sous des charges uniformément répartie (a/h =10).....	55
Tableau IV.02: Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM poreuse	56
Tableau IV.03: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} d'une plaque FGM poreuse.	56
Tableau IV. 04: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} d'une plaque FGM poreuse.	57
Tableau IV.05: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{yz} d'une plaque FGM poreuse.	58
Tableau IV.06: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} d'une plaque FGM poreuse.	58
Tableau IV.07: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} d'une plaque FGM poreuse.....	59

Chapitre V : Effet de la forme de distribution de porosité sur le comportement statique des plaques FGM reposées sur une fondation élastique

Tableau V.01 : Comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque mince et isotrope simplement appuyée sous un chargement uniforme	72
--	----

Tableau V.02: Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur. $K_\theta=K_I=10$72

Tableau V.03: Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_\theta=K_I=10$ et $a/h=4$73

Tableau V.04: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur. $K_\theta=K_I=10$74

Tableau V.05: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_\theta=K_I=10$74

Tableau V.06: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur. $K_\theta=K_I=10$75

Tableau V.07: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_\theta=K_I=10$ et $a/h=4$76

Tableau V.08: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur. $K_\theta=K_I=10$76

Tableau V.09: effet de porosité et sa forme de distribution sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_\theta=K_I=10$ et $a/h=4$77

LISTE DES ABREVIATIONS

FGM :	Functionally graded material.
ZrO ₂ :	Zirconia.
Al ₂ O ₃ :	Alumine ou oxyde d'aluminium.
ESL :	Les théories des couches équivalentes.
CLPT :	La théorie classique de la plaque laminée.
FSDT :	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.
HSDT :	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé.
LW :	L'approche par couche.
TSDT :	La théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre.
ESDPT :	La théorie de déformation de cisaillement exponentielle de la plaque.

LISTE DES NOTATIONS

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du métal
w	Déplacement transversale
w_b	Déplacement dû à la flexion
w_s	Déplacement dû au cisaillement
ν	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
K	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
q	La charge trigonométrique transverse
q_0	L'intensité de la charge au centre de la plaque
D	La rigidité de la plaque à la flexion
z_{ms}	Mesurée à partir de la surface intermédiaire de la plaque
z_{ns}	Mesurée à partir de la surface neutre de la plaque

a	Le volume fraction de porosité
f_e	La densité de la force de réaction de la fondation
U	L'énergie de déformation de la plaque
K	L'énergie cinétique de la plaque
U_F	L'énergie de déformation de la fondation
K_0	Rigidité de Winkler
K_1	Rigidité de cisaillement
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δW_{int}	Travail virtuel intérieur
δW_{ext}	Travail virtuel extérieur
$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinal virtuel
$\delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Les rotations autour des axes x, y et $z,$

$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement
Q_{xz}, Q_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	Sont des nombres naturels.
A_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de membrane
B_{ij}	Termes de rigidité de la matrice de couplage
D_{ij}	Termes de la matrice de flexion
A_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
F_{ij}^a	Termes de rigidité de la matrice
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la matrice
$\{\Delta\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
$\{f\}$	Le vecteur des efforts généralisés

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale:

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort. Les propriétés physiques d'un matériau composite sont complètement différentes de celles de leurs composantes. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort, elle joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Mais l'optimisation locale des propriétés de ce mélange, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de composition peut générer localement de fortes concentrations des contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ").

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques, pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, constructions, couches minces optiques, etc.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le développement de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés dans les structures nécessite une bonne compréhension du comportement mécanique des structures FGM afin d'offrir un profil optimum aux concepteurs.

Actuellement, plusieurs articles concernant l'étude du comportement mécanique des plaques FGM sont annoncés sur l'analyse de la vibration libre, flambement et la flexion des plaques et sur l'étude de l'effet thermique du comportement non linéaire des plaques circulaires FGM.

De nombreux travaux de recherche ont traité le comportement mécanique des plaques composites, la mise en évidence de l'effet du cisaillement transverse dans l'étude du comportement en flexion et en vibration des plaques FGM permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et des déformations induites à travers leur épaisseur.

L'objectif de cette investigation est de présenter l'effet de la forme de distribution de porosité sur le comportement statique des plaques FGM reposant sur une fondation élastique

en utilisant une théorie raffinée de forme hyperbolique. Cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement et seulement quatre fonctions de déplacements inconnus sont utilisées contre cinq ou plusieurs fonctions de déplacements inconnues utilisées dans celles correspondantes. Ce nouveau modèle satisfait la nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. La distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverse suivant l'épaisseur de la plaque est prise en considération dans cette analyse, les propriétés matérielles de la plaque FGM varient selon une distribution de loi de puissance en termes de fraction volumique des constituants.

Le premier chapitre présente une étude bibliographique sur les matériaux composites et ses caractéristiques avantageux ainsi que leur utilisation dans les différents domaines.

Le chapitre II présente un état de connaissance et un aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés. Cette partie présente aussi les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du FGM suivant l'épaisseur de la plaque.

Dans le chapitre III, on a présenté une revue bibliographique sur les différentes théories des plaques utilisées.

Le chapitre IV consiste à présenter l'effet de la forme de distribution de porosité sur le comportement mécanique des plaques FGM en utilisant une théorie raffinée de forme hyperbolique. La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM poreuses. Les plaques sont fabriquées d'un matériau isotrope ayant des propriétés matérielles différentes dans seulement la direction d'épaisseur. Les propriétés matérielles de la plaque FGM composée de deux matériaux différents: céramique et métal varient selon une distribution de loi de puissance en termes de fraction volumique des constituants.

L'effet de la forme de distribution de porosité sur le comportement statique des plaques FGM reposée sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak est également présenté dans le chapitre V. Des exemples numériques et graphiques sont fournis pour montrer l'effet des paramètres de fondation (K_0 et K_1) sur les plaques minces et épaisses.

L'étude se conclura par une conclusion relative à ce travail ainsi que des perspectives envisagées à l'avenir.

CHAPITRE I
GENERALITES SUR LES
MATERIAUX COMPOSITES

I.1. Introduction :

L'utilisation des matériaux composites dans les applications industrielles tend à augmenter depuis plusieurs années, et cela dans toutes les industries : automobile, aéronautique, spatiale, marine, ferroviaire ou encore sportive, médicale et nucléaire. Les performances en termes gain massique, de propriétés mécaniques et de fabrication offrent de nombreuses possibilités d'application, parfois très complexes. Les activités de recherche propres à ces matériaux sont également très présentes dans les laboratoires du monde entier pour permettre de mieux comprendre le comportement des structures composites à travers de nombreux thèmes d'études, dans le but d'optimiser leur utilisation et leur adéquation avec l'application industrielle.

Parmi eux, on peut citer les travaux liés à l'analyse du comportement mécanique des structures hétérogènes et multicouches. Les premiers développements effectués sur ce sujet, qui remontent aux années 1950, ont permis de proposer des d'entre elles sont actuellement pleinement reconnues et utilisées industriellement par l'intermédiaire des outils de simulation numérique commerciaux. L'analyse du comportement mécanique continue d'être étudiée et enrichie de manière à faire progresser la maîtrise des matériaux composites dans le contexte industriel.

Une autre discipline est également en évolution constante depuis plusieurs dizaines d'années, il s'agit de la mesure en mécanique expérimentale. Le développement de techniques nouvelles, parfois basées sur des interactions physiques complexes, offrent de plus en plus de possibilités d'investigation des matériaux et de leur comportement mécanique, thermique ou aérodynamique par exemple. Parmi les nombreuses techniques de mesures existantes, les mesures de champs permettent l'analyse sans contact du comportement.

I.2. Définition d'un matériau composite :

Qu'est-ce que c'est un matériau composite ?

Un matériau composite est constitué de deux matériaux différents et complémentaires permettant d'obtenir un matériau dont la performance dépasse celle des composants pris individuellement. Le matériau composite étudié est donc constitué de fibres qui représentent le renfort et de résine qui représente la matrice. Les comportements mécaniques et physiques peuvent être modulés en modifiant les éléments suivants : la nature des constituants, la proportion des constituants et l'orientation des fibres. Les fibres procurent les principales propriétés mécaniques de matériau composite, comme la rigidité, la résistance et la dureté. Les fibres de verre, de carbone et d'aramide sont les principaux matériaux de renfort utilisés

dans le domaine de la réhabilitation et du renforcement des structures de ponts ou de bâtiments. La matrice constitue le matériau de liaison assurant la cohésion et le transfert des contraintes à l'ensemble du matériau composite, elle procure aussi une protection contre les agressions du milieu. La matrice de type époxy occupe présentement la plus grande part du marché pour ce qui est de l'application de renfort structuraux externes. D'autres types de résines, tels que les résines à base de polyester et vinylester, sont également utilisés. [Benzaid. 2010]. En outre, les fibres de renfort ont des propriétés mécaniques nettement meilleures, en termes de rigidité et de résistance, du même matériau en forme massive, parce que la diminution des dimensions caractéristiques implique une amélioration des prestations mécaniques due, d'un côté au fait que la fibre a, par le procédé de fabrication, une structure plus parfaite du matériau massif et de l'autre à la diminution de la probabilité de trouver des défauts importants dans des corps de petites dimensions. [Paolo. 2007]

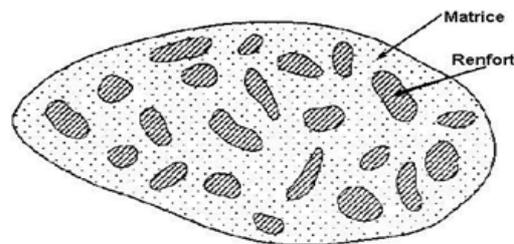


Figure I .01 : Schéma d'un matériau composite. [Jean-Marie. 2010]

Par exemple :

Les arcs mongols, dans lesquels les parties comprimées sont en corne, et les parties tendues sont en bois, soies collées et tendons de bœuf.

Les épées damassées ou sabres japonais dont les lames sont en acier et en fer doux.

Le matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à la performance des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibre. La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc....). Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice permet de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures. Le mélange entre eux est réalisé par polymérisation (réaction chimique).

En effet, les matériaux composites ont un comportement particulier, et ceci est dû essentiellement à deux facteurs. Le premier facteur résulte du comportement anisotrope du matériau utilisé dans la couche élémentaire : contrairement aux matériaux isotropes, les matériaux composites sont peu rigides en cisaillement. Le deuxième facteur dérive de la stratification qui consiste en l'empilement de plusieurs couches, ce qui favorise l'effet de cisaillement, et particulièrement du cisaillement transversal. [Tafla. 1997]

I.3. Types de matériau composite :

Généralement, les composites sont employés sous forme de corps bidimensionnels, plaques ou coques, et en ce qui concerne leur comportement mécanique et l'usage structurel, peuvent être distingués

I.3.1.Composites à fibres courtes :

Les fibres sont dispersées aléatoirement dans une matrice isotrope; le comportement mécanique macroscopique est isotrope

I.3.2.Composites à fibre longues :

Tableau I .01 : Classes des matériaux composites. [Paolo. 2007]

Classe	exemple	composantes	applications
Composites à matrice organique	Carton Pneus Stratifiés	Cellulose, caoutchouc, acier, résines, organiques.	Emballage etc. Transports Structures légères
	Plastiques renforcée	Résines, fibres, courtes.	diverses
Composites à matrice minérale	Béton	Ciment, sable, additifs	génie civil aérospatial, aviation, sport,
	Composites C-C Composites	C, fibre de C Céramique et fibre	biomécanique composantes thermomécaniques
Composites à matrice métallique		Al /fibre de B Al /fibre de C	aérospatial

Les fibres sont disposées de façon ordonnée et orientée dans une matrice isotrope; le comportement mécanique macroscopique est globalement anisotrope. Ces matériaux sont

normalement assemblés pour constituer des macro-matériaux composites, qui sont essentiellement de deux types (stratifiés – sandwich). [Paolo. 2007]

I.4. Les constituants des matériaux composites :

Matériau composite Contient deux composants de base ils sont : matrice, fibre et additifs.

I.4.1. Les matrices :

La matrice fournit le mécanique nécessaire au transfert de la charge de part et d'autre des fibres. Elle protège également les fibres des risques d'abrasion et des autres attaques environnementales et chimiques. Il existe deux principaux de matrices. [Benzaid. 2010]

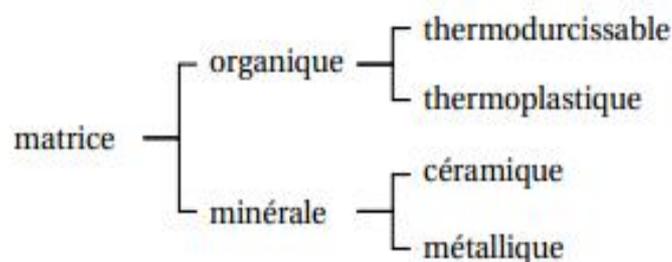


Figure I .02 : Types de matrice. [Laurent. 2008]

I.4.1.1. Résine thermodurcissable :

Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage :

- Résines polyesters insaturées : polyesters condensés, vinylesters, dérivés allyliques.
- Résines de condensation : phénoliques, aminoplastes, furaniques (peu utilisées en France), etc.,
- Résines époxydes.

I.4.1.1.1. Résine polyesters :

Les résines polyesters insaturées viennent de très loin en tête dans la mise en œuvre des matériaux composites. Leur développement est le résultat :

- D'un faible cout de production,
- De leur diversité offrant de multiples possibilités,

- D'une adaptation à des procédés de fabrication faciles à mettre en œuvre et à automatiser

Suivant leur module d'élasticité, les résines polyesters sont classées en : résines souples, résines semi-rigides et résines rigides. Les résines habituellement utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont du type rigide. Parmi les avantages des polyesters insaturés, nous retiendrons :

- Une bonne rigidité résultant d'un module d'élasticité assez élevé,
- Une bonne stabilité dimensionnelle, Une bonne mouillabilité des fibres et des tissus,
- La facilité de mise en œuvre,
- Une bonne tenue chimique,
- Un faible cout de production,
- Une bonne résistance chimique aux hydrocarbures (essence, fuel, etc.) à température ambiante, etc.

Parmi les inconvénients, nous noterons :

- Une tenue médiocre en température : inférieur à 120°C en service continu,
- Une sensibilité à la fissuration, essentiellement dans le cas de chocs,
- Un retrait important de l'ordre de 8 à 10%,
- Un mauvais comportement à la vapeur, à l'eau bouillante avec risque d'hydrolyse, d'où la nécessité de recouvrir les matériaux composites à résines polyesters d'une couche de « gel-codât » de manière à les rendre étanches,
- Une dégradation à la lumière par les rayons ultraviolets,
- Une inflammabilité. [Jean-Marie. 2010]

I.4.1.1.2. Résines de condensation :

Les résines de condensation comportent les résines phénoliques, les aminoplastes et les résines furaniques.

Parmi les avantages, nous citerons :

- Une excellente tenue stabilité dimensionnelle,
- Une bonne tenue à la chaleur et au fluage,
- Une bonne résistance aux agents chimiques,

- Un faible retrait,
- Bonne caractéristiques mécaniques,
- Un faible cout.

Parmi les inconvénients, nous noterons :

- Une mise en œuvre sous pression, donc à faible cadences,
- Les couleurs foncées des résines,

Un non adaptation à des utilisations alimentaires. [Jean-Marie. 2010]

I.4.1.1.3. Résine époxydes :

Les résines les plus utilisées après les résines polyesters insaturées sont les résines époxydes. Elles ne représentent cependant que de l'ordre de 5% du marché composite, à cause de leur prix élevé (de l'ordre de cinq fois plus que celui des résines polyesters)

Du fait de leurs bonnes caractéristiques mécaniques, les résines époxydes, généralement utilisées sans charges, sont les matrices des composites à hautes performances (constructions aéronautiques, espace, missiles, etc.).

Les résines époxydes conduisent donc à un ensemble de performances élevées. Toutefois, pour bénéficier réellement de ces performances, il est nécessaire d'avoir des durées de transformation et surtout de cuisson très longues (de plusieurs heures à plusieurs dizaines d'heures), à des températures relativement élevées (50 à 100°C).

Parmi les avantages des résines époxydes, nous retiendrons :

- De bonnes propriétés mécaniques (en traction, flexion, compression, choc, fluage, etc.) supérieurs à celles des polyesters,
- Une bonne tenue aux températures élevées : jusqu'à 150°C à 190°C en continu ;
- Une excellente résistance chimique,
- Un faible retrait au moulage (de 0,5 à 1%),
- Une très bonne mouillabilité des renforts,
- Une excellente adhérence aux matériaux métalliques.

Parmi les inconvénients, nous citerons :

- Un temps de polymérisation long,

- Un cout élevé,
- La nécessité de prendre des précautions lors de la mise en œuvre,
- Une sensibilité à la fissuration. [Jean-Marie. 2010]

I.4.1.2. Résines thermoplastiques :

Polymère pouvant être alternativement ramollie par chauffage et durci par refroidissement dans un intervalle de température spécifique du polymère étudié. Les résines thermoplastiques présentent l'aptitude à l'état ramolli, de se mouler aisément par plasticité. La transformation est réversible. [Benzaid. 2010]

Les résines thermoplastiques ont des prospérités mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Les résines thermoplastiques classiquement rencontrées sont PEEK, K3B.

De même que pour les résines thermoplastiques. Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau. [Laurent. 2008]

Tableau I .02 : caractéristiques des résines thermoplastiques. [Laurent. 2008]

Résines	T_f (°C)	ρ (kg/m ³)	σ_t^R (MPa)	E(GPa)
Polyamide	65 à 100	1140	60 à 85	1,2 à 2,5
Polypropylène	900	1200	20 à 35	1,1 à 1,4

I.4.2. Les fibres (renforts) :

Les fibres (renforts) contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée à la fibre continue que donne au matériau un effet directif (Berreur et al. 2002). Les propriétés des composites sont principalement influencées par le choix des fibres (Teng et al. 2002, Carolin 2003). Parmi les fibres plus connues en génie civil, on peut citer : le carbone

(haute module élastique et résistances mécaniques importantes à la fatigue), le verre (résistances moyennes, très utilisé pour renforcer les bétons) et l'aramide (de haute résistance à la traction, utilisée en câbles de hautes performances). [Benzaid. 2010]

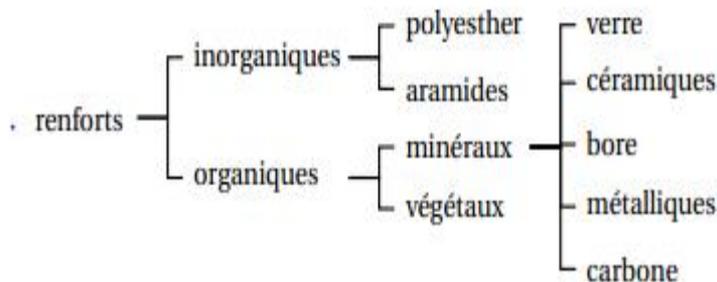


Figure I .03 : Types de renfort. [Laurent. 2008]

I.4.2.1. Fibre de verre :

Les fibres de verre sont moins chères que les fibres de carbone et fibres d'aramide. Par conséquent, les composites en fibres de verre sont devenu la solution la plus utilisée dans plusieurs applications, tel que le génie civil, l'industrie des bateaux et d'automobiles. Les modules d'élasticité des fibres sont de 70 à 85 GPa avec un allongement ultime de 2 à 5% Selon la qualité. Par contre les fibres de verre peuvent avoir des problèmes de relaxation. Elles sont aussi sensibles à l'humidité, mais avec le choix correct de matrice les fibres sont protégées. [Benzaid. 2010]

Tableau I .03 : Compositions des verres type E D et R. [Jean-Marie. 2010]

Constituants		Composition en masse (%)			
		Verre E	Verre D	Verre R	
Slice	SiO ₂	53–54	73–74	60	
Alumine	Al ₂ O ₃	14–15,5		25	
Chaux	CaO Magnésie	} 20-24	} 0,5-0,6	9	
MgO Oxyde de bore	B ₂ O ₃			6	
Fluor	F	6,5–9			
Oxyde de fer	Fe ₂ O ₃	0-0,7	22–23		
Oxyde de titane	TiO ₂	} < 1			
Oxyde de sodium	Na ₂ O Oxyde de			0,1–0,2	
potassium K ₂ O				1,3	
			1,5		

Tableau I .04 : Différents types des fibres de verre. [Jean-Marie. 2010]

Type	Caractéristiques générales
E	à usage général; bonnes propriétés électriques
D	hautes propriétés diélectriques
A	haute teneur en alcali
C	bonne résistance chimique
R, S	haute résistance mécanique

I .4.2.1.1. Propriétés mécaniques de fibre de verre :

Il est de coutume de donner comme caractéristiques mécaniques de référence les caractéristiques mesurées sur mono filaments prélevés à la sortie de la filière.

À la suite du fibrage, les filaments de verre sont soumis à diverses sollicitations mécaniques (abrasion, etc.), chimiques (humidité, etc.) qui réduisent leurs caractéristiques mécaniques initiales. Le tableau 2.4 donne les valeurs de la contrainte à la rupture, mesurée sur monofilaments et fils de base ayant subi un ensimage. Les valeurs obtenues semblent indiquer une chute des caractéristiques lorsque le nom. [Jean-Marie. 2010]

Tableau I .05 : caractéristiques mécaniques des verres type E et R. [Jean-Marie. 2010]

Caractéristiques			Verre E	Verre R
Masse volumique	ρ	kg/m ³	2 600	2 550
Module d'Young	E_f	GPa	73	86
la rupture	σ_{fu}	MPa	3 400	4 400
Allongement à la rupture	ϵ_{fu}	%	4,4	5,2

I .4.2.2. Fibre de carbone :

Les fibres de carbone ont un haut module d'élasticité, de 200 à 800 GPa. L'allongement ultime est de 0,3 à 2,5%. Les fibres de carbone n'absorbent pas l'eau et elles résistent à plusieurs solutions chimiques. Elles présentent une résistance excellente à la fatigue, et une faible relaxation comparée à celle des aciers extensibles précontraints. La fibre de carbone est un conducteur électrique et, par conséquent, peut donner la corrosion galvanique si elle est en contact direct avec l'acier. Il faut signaler également le mauvais comportement au choc et à l'abrasion des stratifiés renforcés par des fibres de carbone. Les fibres de carbone se différencient par le taux de carbone plus ou moins élevé qui modifie les allongements et les contraintes à la rupture et les modules d'élasticité. On trouvera des fibres dites « à haute résistance » HR et des fibres « à haute module » HM ou même « à très haut module » THM, et des fibres intermédiaires (Châtain 2201). [Benzaid. 2010]

I.4.2.2.1. Caractéristiques mécaniques de Fibre de carbone :

Les fibres de carbone possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques, d'autant plus que leur masse volumique est faible (généralement inférieure à 2 000 kg/m³). Le tableau 2.6 compare les caractéristiques des fibres de carbone à celles des fibres de verre E. En outre, il faut noter que les fibres de carbone ont une excellente tenue en température, en atmosphère non oxydante. En effet, leurs caractéristiques mécaniques sont maintenues jusqu'à 1500 °C environ. Cette propriété a conduit à développer des composites fibres de carbone/matrice de carbone, à haute tenue thermique, utilisés dans les tuyères de fusée, les plaquettes de freins (camions, formule 1, avions), les éléments de fours, etc. Ces matériaux, revêtus d'une couche protectrice anti-oxydante, trouvent également des applications en atmosphère oxydante dans le domaine spatial : bords d'attaque, tuiles, etc. [Jean-Marie. 2010]

Tableau I .06 : caractéristiques de fibre de carbone, comparée à celles des fibres de verre E. [Jean-Marie. 2010]

Caractéristiques	Verre E	Carbone HR	Carbone HM	Carbone THM	Carbone HM
Masse volumique ρ (kg/m ³)	2 600	1 750 5	1 810 5	1 950 5	2 000
Diamètre (μm)	10 à 20	à 7	à 7	à 7	12
Module d'Young E_f (GPa)	73	230	400	600	280
Module spécifique E_f/ρ (MNm/kg)	28	130	210	310	140
Contrainte à la rupture σ_{fu} (MPa)	3 400	3 000–4 000	2 800	2 000	2 000–2 400
Contrainte spécifique σ_{fu}/ρ (kNm/kg)	1 300	1 710–2 290	1 550	1 030	1 000–1 200
Prix de revient rapporté aux fibres de verre E	1*	10–15	30–50	200–400	50–100

I.4.2.3. Fibre aramide :

Appelés aussi polyamide aromatique, une marque bien connue des fibres d'aramide est « kevlar » mais il existe d'autres marques aussi tel que « twaron », et « SVM ». Les modules d'élasticité de ces fibres sont de 70 à 20 GPa avec une haute énergie de fracture et un allongement ultime de 1,5 à 5% selon la qualité. Les fibres d'aramide sont sensibles aux températures élevées, à l'humidité et aux radiations « ultra violet » et par conséquent, ne sont

pas largement utilisées dans les applications de génie civil. Plus loin, les fibres d'aramide ont des problèmes avec la relaxation et la corrosion, mais avec une bonne résistance au choc et à la fatigue. Berreur et al. (2002) ont présenté les principaux matériaux de renfort. [Benzaid. 2010]

I.4.2.3.1. Caractéristiques mécaniques de Fibre d'aramide

Les caractéristiques mécaniques des fibres aramides sont reportées dans le tableau 2.7 pour des monofilaments. Sur fils multifilaments, les caractéristiques sont généralement

Plus faibles. Le tableau montre une contrainte spécifique à la rupture élevée, du même ordre de grandeur que les fibres de carbone haute résistance HR (tableau 2.6), toutefois avec un prix de revient 4 à 6 fois moindre. Néanmoins, leur utilisation est limitée par diverses faiblesses des matériaux composites à fibres aramides :

- Résistances faibles à la compression, à la flexion, au flambement;
- Sensibilité au cisaillement interlaminaire. [Jean-Marie. 2010]

I.4.2.4. Fibre céramique :

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renforts et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

- fibres de carbone de Silicium ;
- fibres de bore ;
- fibres de bore carbone de silicium. [Jean-Marie. 2010]

I.4.3. Les additifs :

Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- lubrifiants et agents de démoulage,
- pigments et colorants,
- agents anti-retrait,
- agents anti-ultraviolets. [Jean-Marie. 2010]

Et Inconvénients Par exemple :

- Vieillessement sous l'action de l'eau et de la température,
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes,

- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques,
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre),
- Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs.

I.5. Demain d'application des matériaux composites :

Voyons maintenant comme exemples d'application une série de réalisations en matériaux composites à caractère structural, essentiellement dans les secteurs suivants :

- automobile;
- ferroviaire;
- naval;
- aéronautique;
- espace;
- sport. [Paolo. 2007]

I.5.1. Secteur automobile :

Suspensions à lamelles en fibre de verre. Utilisation de plastiques renforcés dans des nombreuses parties moulées (portières, pare-choc etc.).[Paolo. 2007]

I.5.2. Le projet EuroSpring :

Taxi Spring, suspensions en fibre de verre pour les taxis de Londres. [Paolo. 2007]



Figure I .4.Exemple de projet EuroSpring. [Paolo. 2007]

I.5.3. Le projet Eurobogie :

Suspensions à deux étages en fibre de verre pour wagons marchandises.

Bogies des wagons marchandises entièrement en fibre de verre, pour la diminution de la pollution sonore. [Paolo. 2007]



Figure I .5.Exemple de Eurobog. [Paolo. 2007]

I .5.4. Secteur naval :

Coque en sandwich structures en composites Mat et viles en carbone.

I .5.5. Secteur aéronautique :

Plusieurs parties structurales et aérodynamiques sont en stratifié ou sandwich (dans l'A380, la pièce qui opéra la jonction entre ailes et fuselage est en composite).

Freins en carbone (brevet messier-Bugatti) : matrice en carbone et fibres non tissées en carbone aussi. [Paolo. 2007]

I .5.6. Secteur espace :

Parties structurales de stellites et vecteurs (sandwich Al-C, stratifiés en C et B). Protections thermiques et structures à déformation thermique directionnelle nulle. L'épargne d'un kg de poids structural dans un satellite pour télécommunications permet sa substitution avec du matériel électronique pour la réalisation de canaux de transmission dont la location permet de financer le cout de mise en orbite du satellite. [Paolo. 2007]

I.5.7. Les composites dans les produits militaires :

Pour les produits militaires (missiles), le premier avantage, c'est la performance des matériaux composites, ensuite l'utilisation des composites sur les ailettes de guidage.

De missiles permet de garder une bonne maîtrise de la trajectoire jusqu'à la cible finale à cause de l'échauffement cinétique provoqué par le frottement de sur la structure des ailettes de missile, en fin de trajectoire les ailettes en alliage d'aluminium peuvent fondre dans certaines conditions et les missiles poursuit sa trajectoire sans contrôle ce qui entraîne une perte précise de tir

I.5.8. Les composites dans la construction civile :

L'utilisation des composites dans la construction civile est un nouveau créneau, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites. L'handicap majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif. L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur à 6€/kg. [Menail. 2009]

I.6. Dynamisme et innovation des matériaux composites :

La production de matériaux composites se développe rapidement, en France comme dans le monde : environ + 6 % par an, en quantité. Ces matériaux associent matière plastique et renfort en fibres, généralement de verre ou de carbone. Bien que leur coût soit plus élevé que celui des matériaux traditionnels, ils apportent à leurs utilisateurs des avantages importants grâce à leurs propriétés, notamment de légèreté ou de résistance. Ces avantages leur ont ouvert des marchés importants dans la construction automobile, l'aéronautique, ou encore le bâtiment. Composé de petites entreprises dynamiques, ce secteur s'adapte, par l'innovation et le partenariat. Les voies du développement durable passent désormais par la maîtrise de l'ensemble du cycle du produit, de la conception au recyclage, et par une meilleure caractérisation des produits et de leurs performances.

Le marché mondial des composites croît, en quantité, de 5,7 % par an depuis 1994. En 2000, sept millions de tonnes ont été produites, dont plus de 95 % sont des composites de grande diffusion. Cette production pourrait atteindre 10 millions de tonnes en 2006. La croissance est plus favorable pour les composites thermoplastiques que pour les composites thermodurcissables respectivement 9 % et 3 % par an. Les composites thermoplastiques sont apparus au début des années quatre-vingt. Plus récents, ils sont aussi plus prometteurs.

Cependant, les composites thermodurcissables représentent encore plus des deux tiers du

Marché. Le marché nord-américain, de loin le plus important, représente 47 % de la transformation mondiale de composites (3,4 Mt). Il est suivi par l'Europe (28 %, soit 2 Mt) et l'Asie (23 %, soit 1,6 Mt). La croissance du marché est plus forte en Asie et en Europe qu'aux Etats-Unis (respectivement 7 % et 4,5 % par an). Le marché sud-américain est très dynamique, avec une augmentation annuelle de plus de 8 %. Il est néanmoins réduit (2 % de la consommation mondiale). [Elomari. 2011].

I.7.Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté une synoptique sur les matériaux composites. On s'est intéressé à ceux résultant de l'assemblage d'une matrice et d'un renfort se présentant sous forme de fibres. Cette présentation montre les caractères avantageux de ces matériaux à savoir légèreté et une grande résistance à la traction.

CHAPITRE II

LES MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES

II.1. Introduction :

Depuis le début du 20ème siècle, l'usage des matériaux composites sous la forme de plaques et de poutres s'est considérablement développé. Que ce soit dans l'industrie automobile, la construction, et plus récemment en aéronautique. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme et durée de vie prolongée.

Mais l'inconvénient c'est l'existence de concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches en raison du changement brutal des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre.

Pour surmonter ces difficultés une équipe de chercheurs japonais (1980) a proposé de nouveaux matériaux dits matériau à gradient de propriété (FGM), ces matériaux sont des composites de pointe, dont la microstructure est hétérogène et qui règle le problème des contraintes d'interface entre les couches.

Généralement ces matériaux sont fabriqués à partir de composants isotropes tels que les métaux et la céramique, et trouvent leur application dans divers domaines tels que les avions, les secteurs biomédicaux et les constructions civiles et industrielles.

II.2. Définition d'un matériau à gradient de propriétés (FGM) :

Un matériau à gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatif à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces matériaux FGM sont généralement fait à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure II.1) par un processus de métallurgie de poudre, le côté métal riche est

Typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. En revanche, le céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est placé dans les régions de grands gradient de la température.

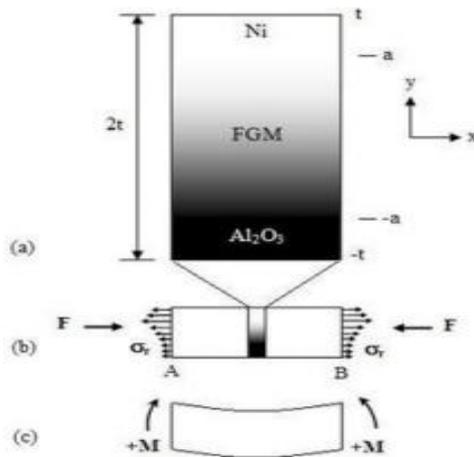


Figure. II.01 : schéma d'un système de matériau à gradient de propriétés (FGM)

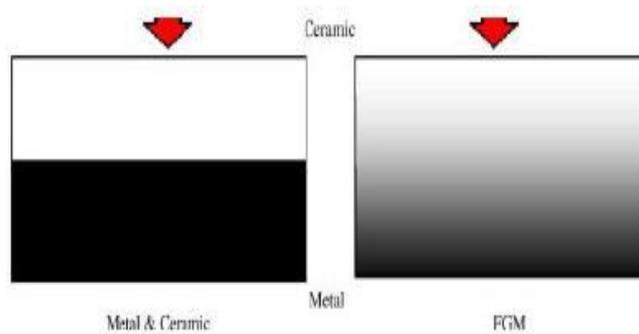


Figure .II.02 : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Hirai. 1999, Chan. 2001, Uemura. 2003]. Un exemple d'un tel matériau est montré sur la figure II.2 où des particules sphériques ou presque sphériques sont incrustées dans une matrice isotrope.

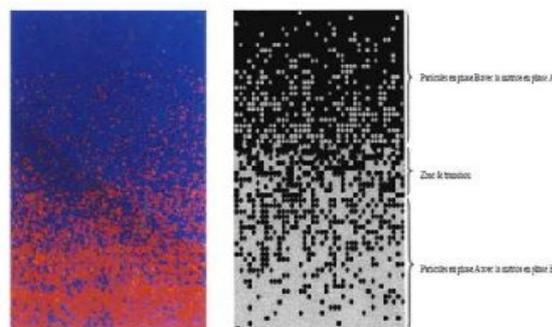


Figure. II.03 Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale. [Yin. 2004].

En variant graduellement la fraction de volume des matériaux constitutifs, leurs propriétés matérielles montrent un changement minime et continu d'un point à un autre, de ce fait en remédient aux problèmes d'interface et en atténuant des concentrations de contraintes thermique. C'est dû au fait que les constituants en céramique de FGM peuvent résister aux hautes températures que le produit final possède de meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que les constituants métalliques fournissent une résistance mécanique plus forte et réduisent la possibilité de rupture catastrophique. Donc un FGM (Matériaux à Gradient de propriétés) typique est un composé non homogène constitué de différentes phases matérielles (habituellement en céramique-métal). Cette solution permet une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition,

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz. Des armures métal et céramique [Liu. 2003], des détecteurs photoélectriques [Paszkiewicz. 2008] et des implants dentaires [Watari. 2004]. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques [Hui. 2009].

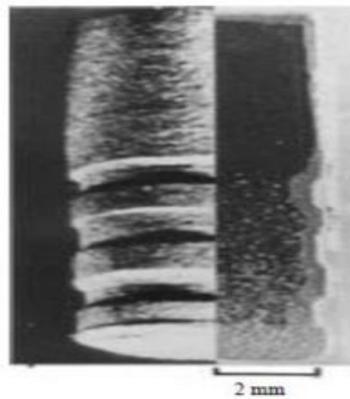


Figure. II.04 : Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP). Aspect externe (gauche) et section transversale (droite). [Watari. 2004]

En outre, Birman, Bird présenté une étude des principaux développements de ces matériaux et ont abordé plusieurs problèmes: transfert de chaleur, distribution de pression, stabilité, analyse dynamique, essais, conception de fabrication, fractions. [Birman. 2007]

II.3. Aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés :

Ces dernières années, les matériaux à gradients de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grande performances et capables de

résister aux températures ultra hautes. Un groupe de scientifiques, à Sendai (japon) a proposé pour la première fois le concept FGM en 1984, comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuge (isolation thermique). Au début, les FGM ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrières dans les applications aéronautiques et les réacteurs.

Nous pouvons donner la composition microscopique de ces matériaux dans figure II.4. [Morinaga. 1993]

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure .II.05 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels. [Morinaga. 1993]

II .4.Conception des structures FGM :

Dans la plupart des cas, les investigateurs considèrent le FGM comme étant un matériau composé particulier pour lesquels la fraction de volume varie sans interruption dans la direction de l'épaisseur. Quelques études considèrent également le FGM comme étant un composé renforcé par un tissu dans lesquels l'orientation de fibre varie à travers l'épaisseur.

Un matériau FGM est un type de matériaux composites classé par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Les distributions de propriété sont trouvées dans une variété de produits communs qui doivent avoir des fonctions multiples (c'est-à-dire multifonctionnelles) comme les liaisons entre les particules ; qui doivent être assez dures a l'intérieur pour résister à la rupture ; mais doivent également être assez dures sur l'extérieur pour empêcher l'usure.

II.5. Méthodes d'élaboration des FGM :

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques

sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

II .6. Le gradient :

Contrairement aux matériaux homogènes, les propriétés des FGM varient non seulement avec leur composition, mais dépendent également de la connectivité de la structure du réseau interne. (Fig. II.5) montre une représentation schématique de la microstructure commune produisant dans un matériau tel que le contenu de la deuxième phase est augmentée.

À des fractions de faible volume, la seconde phase existe sous forme des particules isolées dispersées dans une matrice (a). Comme le contenu de la deuxième phase augmente, les particules commencent à avoir des contacts et former des amas agglomérés (b).

Comme il augmente encore, une transition microstructurale critique a lieu, où la deuxième phase n'est plus dispersée, mais devient plutôt reliés entre eux sur de longues distances (c, d, e)., par exemple, conductivité thermique ou électrique, et un petit changement de composition va donc se traduire par une variation distincte des propriétés [Morinaga. 1993].

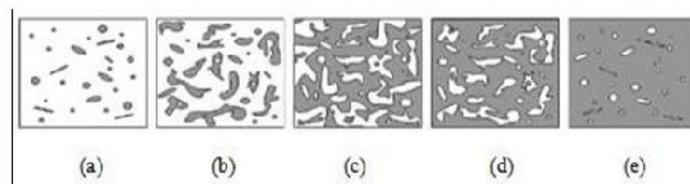


Figure. II. 06 : Changement schématique de la microstructure dans un profile FGM.

II.7. Propriétés physiques et mécaniques des FGM :

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

II.7. 1.Aluminium :

II.7.1.1. Propriétés physiques de l'aluminium :

L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant. Et l'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m³. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

II.7.1.2. Propriétés mécaniques de l'aluminium :

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes. Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction.
- Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser:

- La malléabilité (mise en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

II.7.1.3. Propriétés des alliages d'aluminium :

L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Entièrement recyclable.
- Bonnes caractéristiques de finition.

II.7.2.céramique :

II.7.2.1. Propriétés physiques de la céramique :

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m³. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

II.7.2.2. Propriétés mécaniques de la céramique :

Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.
- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité Élevée).
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction(Résistance à la compression = 200 MPa.[KHETAF. 2013])

II.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM:

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés à la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [Shen. 2009], Les propriétés effectives des matériaux en FGM, comme module de Young, peuvent alors être exprimées comme suit :

$$P = \sum P_i * V_i \quad (II.01)$$

Avec :

P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , et

$$\sum_{i=1}^5 V_i = 1 \quad (II.02)$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions volumiques. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure

II.9. Propriétés effectives des matériaux à gradient de propriété :

II.9.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \tag{II.03}$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque

Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées pour un mélange de céramique et métal par la loi suivante [Shen. 2009]

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) * V(z) \tag{II.04}$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure et de la surface supérieure de la plaque FGM.

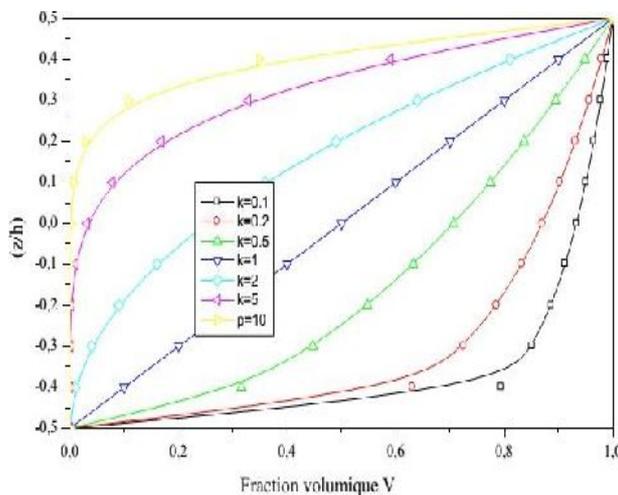


Figure II.07 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est

représentée sur la figure II.5. Il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $1 < p$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $1 > p$.

II.9.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Deux fonctions de loi de puissance sont utilisées pour définir la fraction volumique de la plaque, afin d'assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{z}{h} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.05})$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{z}{h} + z}{\frac{h}{2}} \right) \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.06})$$

Le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 + V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.07})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 + V_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.08})$$

La figure II.5 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (II.5) et (II.6) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

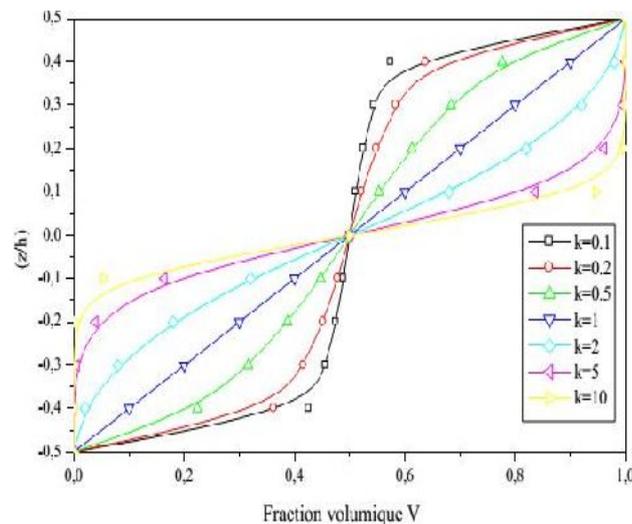


Figure II.08: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

II.9.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme

$$A=E_2, \text{ et } \beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2} \quad (\text{II.09})$$

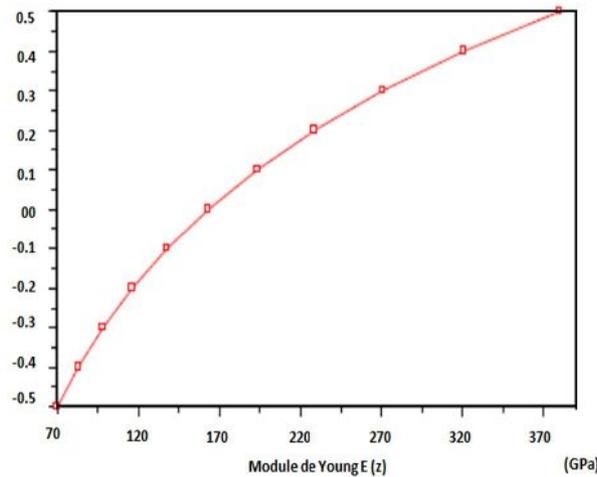


Figure II.09 : Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

II.10. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM:

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- **Aéronautique** : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.
- **Chimique** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.
- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- **Électronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.

- **Optique** : fibres optiques, lentilles.
 - **Conversion d'énergie**: générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique.
 - **Matières biologiques** : implants, peau artificielle,
 - **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verres fenêtre
- [Adim. 2013]

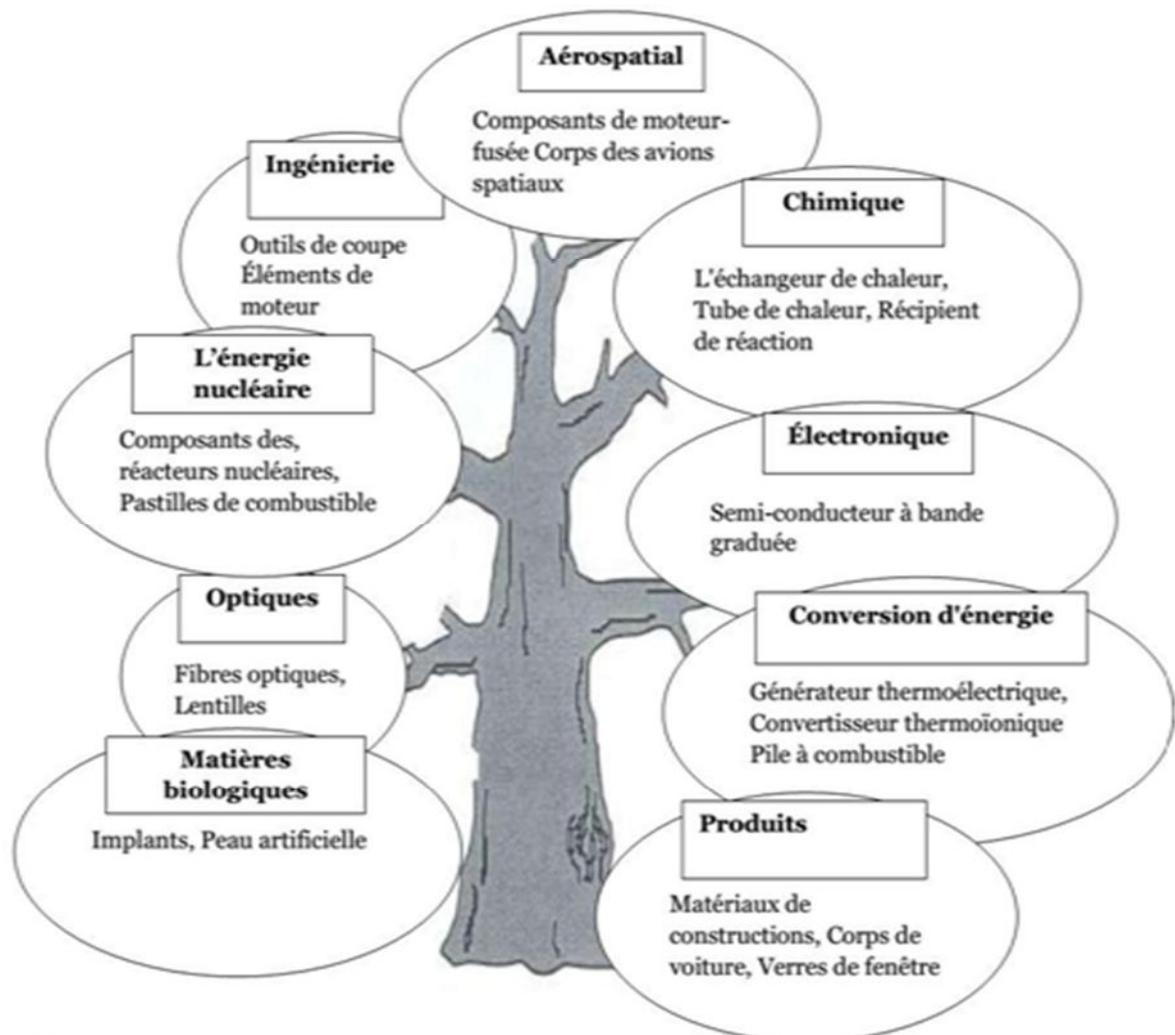


Figure II.10 : Principaux domaines d'application des FGM.

II.11. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion d'un matériau FGM. Dans un premier temps, nous avons présenté l'historique de la fabrication des FGM dont les premiers pas de la naissance du FGM. Et puis en est passé à décrire les différentes méthodes modernes d'usinage à savoir la méthode d'injection des poudres. Après nous avons cités les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM, et à la fin nous

avons terminés par les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM.

CHAPITRE III
LES DIFFERENTES THEORIES
DES PLAQUES

III.1.Introduction :

L'examen des théories de la plaque dans ce chapitre est explicitement limité aux plaques sous la flexion dans la théorie de l'élasticité à petite déformation. Toute nouvelle théorie, en particulier, sur la flexion des plaques doit être en référence à l'élimination des déficiences dans la théorie classique de Kirchhoff (bien connue et largement utilisée même aujourd'hui) appliquée au simple problème de flexion des plaques carrées simplement supportées (type dur). L'analyse de plaques ayant des géométries et des propriétés matérielles différentes dans des conditions de cinématique et de charge différentes n'offre guère de possibilités de développement de nouvelles théories autres que celles qui concernent l'analyse des problèmes primaires d'une plaque carrée. Comme Ghugal et Shimpi l'ont mentionné dans leur article de synthèse, le développement de théories structurales affinées pour les plaques stratifiées (composées de matériaux composites avancés renforcés par des fibres) trouve son origine dans les théories raffinées des plaques isotropes. [Bernard.2009]

III.2.Définition des plaques :

Une plaque est un élément structural de forme plane avec des dimensions qui sont importantes par rapport à son épaisseur et est soumis à des charges qui provoquent une déformation de flexion en plus de l'étirement. Dans la plupart des cas, l dans le plan. En de les modéliser en utilisant des équations d'élasticité 3D. Les théories simples 2D de la plaque peuvent être développées pour étudier la déformation et les contraintes dans les structures de la plaque.

Une plaque est définie comme étant un solide délimité par deux plans parallèles appelés faces et dont l'épaisseur h est petite par rapport aux deux autres dimensions. Les plaques sont généralement employées pour modéliser des structures minces, car seule une dimension est faible par rapport aux deux autres. Par contre, si la structure présente une courbure géométrique, ce sont les éléments de coque qui sont privilégiés plutôt que les éléments de plaque qui sont plans. Autrement dit, si l'élément n'est pas plan au repos, nous parlons de coque plutôt que de plaque. Voir Fig.). [Florence.2017]

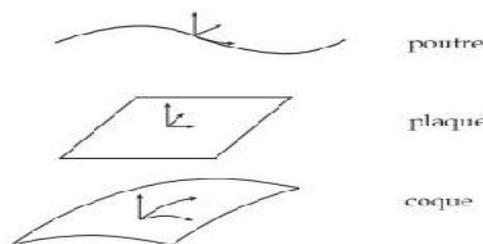


Figure III.01 : géométries courantes en mécanique des structures [Florence.2017].

Pour étudier le comportement de la plaque, nous définissons son *plan moyen* auquel nous associons un repère orthonormé (O, x, y, z) tangent à ce plan. Le plan moyen est ainsi situé dans le plan $(0, x, y)$ à équidistance entre les deux faces. L'origine du repère étant située sur le plan moyen avec z la direction de l'épaisseur, la face inférieure est ainsi positionnée en $z = -h/2$ et la face supérieure en $z = h/2$. Dans la théorie des plaques, le plan moyen représente l'équivalent de la courbe moyenne dans la théorie des poutres.

Autour du plan moyen, le feuillet neutre (ou feuillet moyen) constitue un élément de matière d'épaisseur infinitésimale (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres). Une fibre normale est ensuite définie comme l'ensemble des points situés sur une normale au plan moyen (ayant ainsi pour direction z) à une position (x, y) dans le plan $(0, x, y)$.

Pour illustrer ces notions, la Fig.2 présente la déformation d'une plaque mince (pointillés gris) en mettant en évidence le déplacement d'un élément de matière (contour noir), de son feuillet moyen (rouge) et d'une fibre normale (bleue). [Florence.2017]

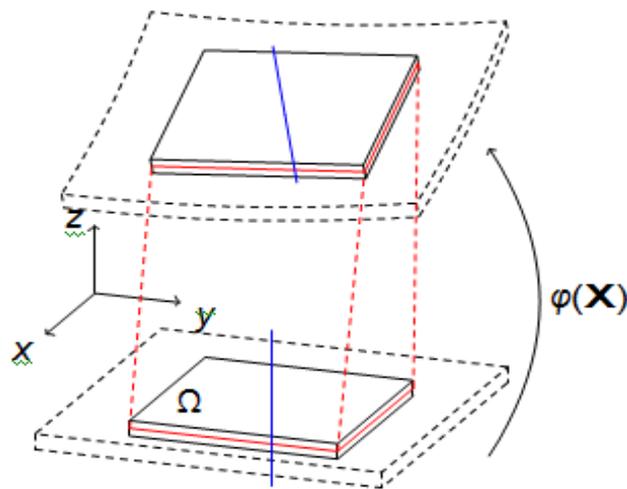


Figure III.02 : déformation d'une plaque [Florence.2017].

III.3. Examen des théories récentes:

La théorie d'Ambartsumyan basée sur le déplacement (les théories de Reissner et de Reddy) consiste en une représentation à deux termes des déplacements. Seule la théorie de Kirchhoff et FSDT sont avec un terme représentation des déplacements (basé sur une variable $w_0(x, y)$ dans le premier et trois variables primaires $[w_0, u_1, v_1]$ dans le dernier). La présente revue se réfère à plusieurs déformations de cisaillement et à des théories d'ordre supérieur de ce type. Bien que la plupart d'entre elles soient utilisées dans les analyses de plaques laminées et fonctionnalisées, la discussion de ces théories se limite aux analyses de plaques homogènes. En outre, nous rappelons la tentative de Jemielita, dans son article inspirant, de répondre à la question générale «Étudier ou créer». Ainsi, la discussion se limite aux analyses

des problèmes primaires d'une plaque carrée. , la présence des forces du corps, les conditions limites cinématiques et statiques appartiennent à la catégorie d'étude de divers problèmes et ne jouent pas beaucoup de rôle dans la création de nouvelles théories de la plaque.

III.4.La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (Classical Plate Theory CPT) :

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement (L/h).

La théorie CPT (Classic alplate Theory) se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, (Figure III.3), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

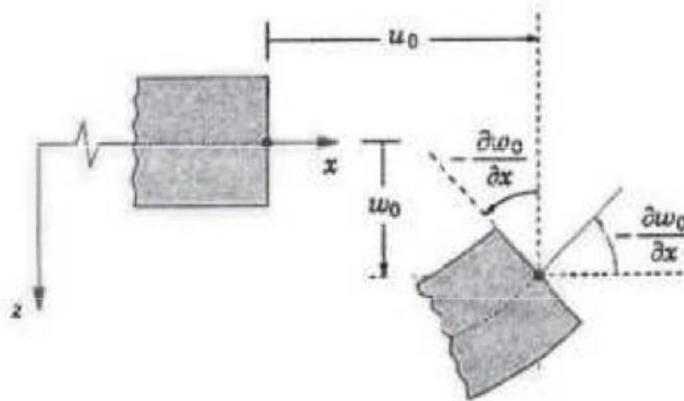


Figure III.03 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.

III.4.1. Hypothèse de plaque mince (Kirchhoff–Love) :

Une normale à la surface de la plaque reste normale pendant la déformation, ce qui implique [Jean. 2011]. Dans :

$$u = U + W e_3 + x_3 \Phi \quad (\text{III.01})$$

Que $\text{grad } W + \Phi = 0$. Les cisaillements 23 et 31 sont donc nuls.

➤ Condition cinématique :

$$-Q_1 + W_{,2} = 0 \quad Q_2 + W_{,1} = 0 \quad (\text{III.2})$$

- On ne considère plus les contraintes de cisaillement transverse :

$$T_1 = 0 \quad T_2 = 0$$

- Tenseur de courbure :

$$K = \begin{pmatrix} \Phi_{2,1} & (\Phi_{2,2} - \Phi_{1,1})/2 \\ (\Phi_{2,2} - \Phi_{1,1})/2 & -\Phi_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_{,11} & -W_{,12} \\ -W_{,21} & -W_{,22} \end{pmatrix} \quad (III.3)$$

$$K_{\alpha\beta} = -W_{,\alpha\beta}$$

III.4.2. Définition des efforts intérieurs (plaque mince) :

Variable associée	définition :	
$U_{1,1}$	$N_{11} = \int \sigma_{11} d_{x3}$	(III.4)
$-W_{,11}$	$M_{11} = \int \sigma_{11 x_3} d_{x3}$	(III.5)
$U_{2,2}$	$N_{22} = \int \sigma_{22} d_{x3}$	(III.6)
$W_{,22}$	$M_{22} = \int \sigma_{22 x_3} d_{x3}$	(III.7)
$(U_{1,2} + U_{2,1})/2$	$N_{12} = \int \sigma_{12} d_{x3}$	
$-W_{,12}$	$M_{12} = \int \sigma_{12 x_3} d_{x3}$	

N_{11} et N_{12} efforts normaux, N_{12} cisaillement dans le plan de la plaque M_{11} et M_{22} moments de flexion, M_{12} moment de torsion. [Jean. 2011]

III.4.3. Nouvelles équations d'équilibre pour les moments :

$$T_{1,1} + T_{2,2} + P_3 = 0 \quad (III.8)$$

$$M_{11,1} + M_{12,2} - T_1 = 0 \quad (III.9)$$

$$M_{21,1} + M_{22,2} - T_2 = 0 \quad (III.10)$$

Donne :

$$M_{11,11} + 2M_{12,21} + M_{22,22} + P_3 = 0 \quad (III.11)$$

Soit :

$$\text{div } \underline{\text{div}} M + P_3 = 0 \quad (III.12)$$

$$M_{\alpha\beta, \alpha\beta} + P_3 = 0 \quad (III.13)$$

III.4.4. Déplacements avec hypothèses dans la théorie de Kirchhoff :

Nous notons que $[w_0, u_1, v_1]$ sont des variables primaires dans les problèmes de flexion (les contraintes de cisaillement sont aussi des variables primaires dans les problèmes de torsion associés). De manière correspondante, les déformations transversales de cisaillement provenant des relations de déformation-déplacement sont $[u_1 + \alpha w_{0,x}, v_1 + \alpha w_{0,y}]$ avec $[u_1, v_1]$ qui sont négatives de $\alpha [w_{0,x}, w_{0,y}]$ de l'hypothèse de zéro souches transversales. La déformation normale ε_z de la relation constitutive avec $e = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ est proportionnelle à e_1 ($e = z e_1$) qui n'est pas nulle dans la plaque. Il est négligé pour des raisons de conception dans des problèmes d'ingénierie pratiques. Son inclusion est, cependant, nécessaire pour obtenir des solutions appropriées de problèmes 3D. [Kirchhoff. 1850]

Les variables primaires sont déterminées à partir des équations d'équilibre intégrées, c'est-à-dire des équations d'équilibre des éléments de la plaque avec un coefficient de rigidité réduit $2E/3(1 - \nu^2)$. Le terme $[E/(1 - \nu^2)]$ provient de relations contrainte-déformation semi-inversées dans le plan en négligeant ε_z dans les relations de comportement. Compte tenu de ces hypothèses, la densité d'énergie de déformation est uniquement due aux contraintes et déformations dans le plan. On peut facilement montrer que les distributions de déplacements dans le plan ainsi obtenues restent les mêmes avec les déplacements $z^{2k} w_{2k}$ et $(z^{2k+1} / 2k + 1)$ $[u, v]_{2k+1}$ ($k \geq 1$) en référence à la flexion d'une plaque soumise aux mêmes conditions de cinématique et de contrainte résultante dans la théorie de Kirchhoff. Par conséquent, les distributions z des déplacements ne sont pas uniques en raison des hypothèses de la théorie de Kirchhoff. Il faut noter, cependant, que la déflection verticale de la face est la même pour tous les k mais que les faces $[u, v]$ sont au maximum de la théorie de Kirchhoff. En raison d'une satisfaction préalable de zéro conditions de cisaillement de face, $[u_1, v_1]$ sont négatifs de $\alpha [w_{0,x}, w_{0,y}]$ résultant d'une équation du quatrième ordre régissant w_0 avec deux conditions de bord au lieu de trois conditions de contour requises dans un problème 3D. Prescrit τ_{xy} le long d'un bord est sous la forme de son gradient tangentiel contribuant à un cisaillement vertical artificiel supplémentaire. Ce cisaillement supplémentaire est dû à l'annulation partielle de l'intérieur τ_{xy} dans le problème de flexion. [Vijayakumar. 2011, Vijayakumar. 2013a]

III.5. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Déformation Theory FSDPT) :

Aussi appelé modèle de Mindlin-Reissner ou encore "théorie des plaques épaisses", ce modèle pose pour hypothèse une déformation de cisaillement transverse constante au travers de l'épaisseur de la plaque, le déplacement d'un point de la plaque dépend cette fois de u_0, v_0 ,

des dérivées de la flèche w_0 et des cisaillements. Celui-ci, développé par Reissner [Reissner. 1945], fut le premier modèle de plaque prenant en compte les contraintes de cisaillement transverse ; Mindlin [Mindlin. 1951] développa la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre basé sur les déplacements.

Le plus souvent, le champ de déplacement lié à la FSDT est écrit en fonction des rotations $\phi_x(x, y)$ et $\phi_y(x, y)$. Il est donc commun de rencontrer le champ de déplacement associé sous la forme suivante :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad (\text{III.14})$$

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre continué la théorie classique des plaques en tenant compte l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction (Figure III.4). [Reddy. 1997]

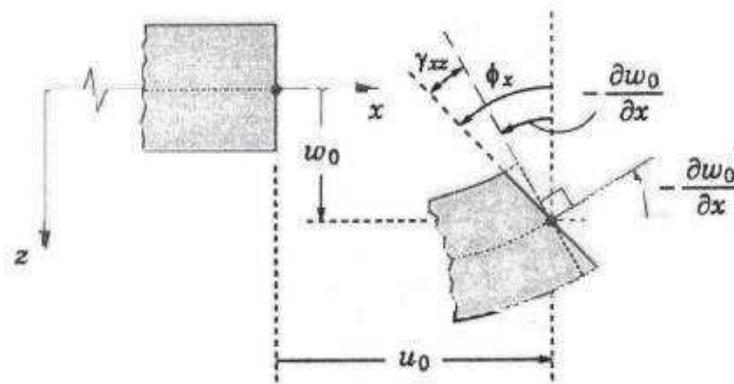


Figure III.04: Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin. [Reddy. 1991]

Cette théorie a été utilisée par Yaghoobi et Yaghoobi [Yaghoobi. 2013] pour analyser le flambement des plaques sandwichs en FGM sur fondation élastique sous chargement thermique et mécanique.

Des solutions analytiques de la vibration libres par la méthode de Levy des plaques sur fondation élastique ont été données par Hosseini-Hashemi et al [Hosseini-Hashemi. 2010]. Ils ont confirmés leurs précédent travail par la prise en compte de l'effet de couplage entre les déplacements en plan et transverse [Hosseini-Hashemi. 2011]

III.5.1. Déplacements généralisés, cisaillement transverse et flexion simple :

On peut construire une théorie des plaques indépendantes de celle du solide tridimensionnel et dans lesquelles l'être mécanique élémentaire n'est pas la particule matérielle de coordonnées (x_1, x_2, z) mais la "normale matérielle" de coordonnées (x_1, x_2) c'est-à-dire la partie du segment :

$$N(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2, z) / |z| \leq h(x_1, x_2)/2\} \quad (\text{III.15})$$

Effectivement occupée par la matière de la plaque ; dans les théories classiques elle se déplace comme un corps rigide ; on note \vec{k} son vecteur unitaire qui coïncide avec \vec{e}_3 dans la configuration de référence.

Ce point de vue est proche de celui des frères Cosserat. Une plaque est donc une famille de segments de droite rigides $N(x_1, x_2)$ qui, dans la configuration de référence, sont parallèles à l'axe des z et centrés sur le plan (x_1, O, x_2) . Pour les frères Cosserat une "surface matérielle" est une famille de trièdres qui dépend continument des deux variables d'espace x_1 et x_2 , tandis que pour nous la rotation de la normale autour de son axe est indifférente ; ainsi sa position dépend-elle de cinq paramètres seulement : trois de translation et deux de rotation.

Le déplacement rigide (et infinitésimal) d'une normale est alors défini par le vecteur déplacement \vec{U}_C de son centre, dont on note ordinairement $^5 (v_1, v_2, w)$ les composantes. [Bernard. 2009]

III.6. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé :

Une fois introduits dans les modèles du premier ordre, les facteurs de correction du cisaillement transversal ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leurs évaluations dépendent malheureusement du nombre de stratifications c.à.d. du problème à résoudre. Pour écarter à jamais ce type de contrainte, des théories d'ordre élevé ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney, qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à trois. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique; elle exige en effet un grand nombre de paramètres. D'autres théories sont apparues par la suite, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles

peuvent être trouvées dans Reddy [Reddy. 1984]; Kantet Swaminathan [Kant. 2002].

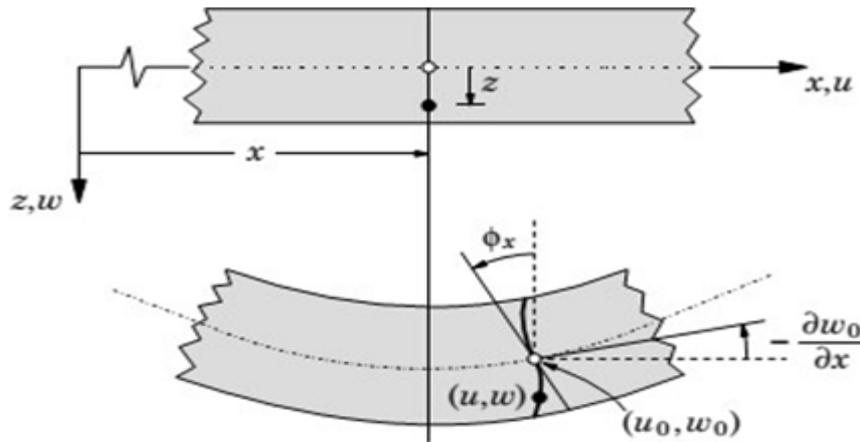


Figure III.05 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques [Reddy. 2007].

La théorie des plaques de troisième ordre de cisaillement (TSDPT) est la théorie d'ordre élevé la plus utilisée due à sa simplicité. Cette théorie a été adoptée par Saidi et al. [Saidi. 2012] pour dériver des solutions analytiques pour la déflexion et les contraintes des plaques en FGM soumises à des charges transversales par la méthode de Levy. Thai et Kim [Thai. 2013] ont reformulé la TSDT basée sur la surface neutre, ont dérivée par la solution de Levy la charge de flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique.

Nguyen et Pham [Nguyen. 2013] ont étudié le comportement post flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique. Des solutions analytiques pour la charge de flambement et la température de flambement des plaques FGM sous sollicitations mécaniques et thermiques ont été obtenues en utilisant la TSDT et la méthode de Galerkin.

III.7. Théorie de zig-zag:

Pour mieux décrire la déformation en cisaillement des matériaux composites, certains auteurs ont associé la théorie d'ordre élevé à celle dite de zig-zag, Cette dernière est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches. L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne

modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de Di Sciuva, plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zig. [ADIM. 2013]

L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zig (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) (Figure II.4).

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

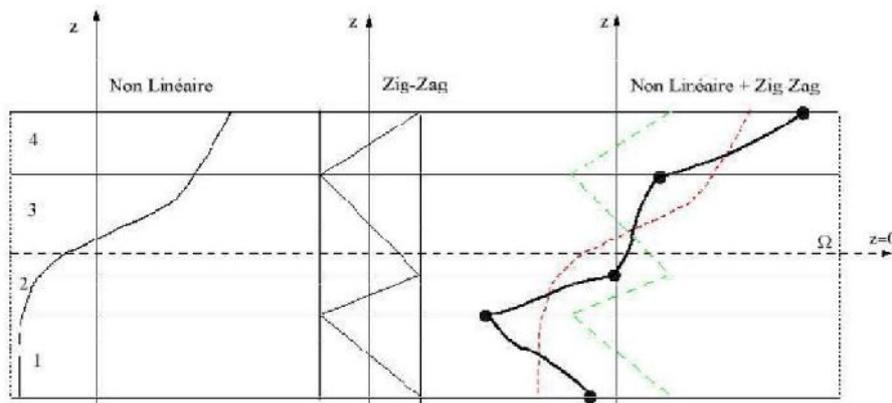


Figure. III.06 : Champ de déplacements du modèle zig-zig d'ordre élevé. [ADIM. 2013]

III .8. Théorie de Poisson :

Dans les recherches récentes de l'auteur, $w_0(x, y)$ est utilisé comme variable de visage. Une nouvelle théorie traitant de la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transverses réactives est appelée «théorie de Poisson des plaques en flexion» et son extension dans laquelle les contraintes de cisaillement transversales supposées sont indépendantes de la coordonnée z , comme $w_0(x, y)$ dans la théorie de Kirchhoff. Les théories de déformation de cisaillement, est désignée comme "la théorie de Poisson étendue"[Vijayakumar. 2013a, Vijayakumar. 2013b]

Dans la théorie de Kirchhoff, la variable de base est $w_0(x, y)$ et $[u, v]$ proviennent de $[\gamma_{xz}, \gamma_{yz}] \equiv 0$ dans la plaque. Dans FSDT, w_0 est associé à $z [u_1, v_1]$ à $[\gamma_{xz}, \gamma_{yz}]$. Dans ces théories et autres théories de déformation par cisaillement, σ_z est négligé dans les relations constitutives.

Dans la présente analyse comme dans la théorie de Kirchhoff et FSDT, σ_z est d'abord négligé dans les relations constitutives semi-inversées.

$$\sigma_x = E' (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \mu_{\sigma z} \varpi (x, y), \quad (\text{III.16})$$

$$\varepsilon_z = -\mu e + (1-2\nu\mu) \sigma_{zE} \quad (\text{III.17})$$

Dans lequel

$$e = (\varepsilon_x + \varepsilon_y), E' = E / (1 - \nu^2), \text{ et } \mu = \nu / (1 - \nu). \quad (\text{III.18})$$

Les variables dans le plan (u_1, v_1) découplées de w_0 sont des variables de base comme dans [Vijayakumar. 2013a, Vijayakumar. 2013b, Vijayakumar. 2011]. En raison de la condition $\omega_z = 0$ nécessaire pour découpler les problèmes de flexion et de torsion, on obtient des contraintes transversales réactives à partir de l'intégration en épaisseur des équations d'équilibre.

$$\tau_{xz} = E' f_2(z) \alpha e_1, \quad \varpi(x, y), \quad (\text{III.19})$$

$$\sigma_{z3} = -E' f_3(z) \alpha^2 \Delta e_1. \quad (\text{III.20})$$

La relation constitutive donne $\varepsilon_z = -\mu f_1 e_1$. À partir de la condition de charge frontale satisfaisante, on obtient l'équation gouvernant e_1 comme.

$$(\alpha^2) E' \alpha^2 \Delta e_1 + q = 0. \quad (\text{III.21})$$

Dans la théorie de Poisson, e_1 dans l'équation ci-dessus est remplacé par $\psi_2(x, y)$ et il est résolu avec la condition de bord $\psi_2 = 0$ dans le problème de plaque simplement supporté. Comme mentionné précédemment, la fonction ψ_2 est liée à la déformation normale ε_z et $\Psi_2 = 0$ implique $\varepsilon_z = 0$.

Les équations régissant u_1 et v_1 sont données par

$$\alpha (u_{1,x} + v_{1,y}) = \psi_2, \quad \alpha (u_{1,y} - v_{1,x}) = 0 \quad (\text{III.22})$$

Pour que

$$\alpha^2 \Delta u_1 = \alpha \psi_{2,x}, \quad \alpha^2 \Delta v_1 = \alpha \psi_{2,y}. \quad (\text{III.23})$$

Les équations (22) sont homogènes sans ψ_2 et les fonctions harmoniques conjuguées u_1 et v_1 sont couplées par des conditions de front constantes x (et y) avec T_x et T_{xy} prescrites.

$$u_1 = 0 \quad \text{ou} \quad E' u_{1,x} = T_x(y) \varpi(x, y), \quad (u, v), \quad (\text{III.24})$$

$$v_1=0 \text{ ou } Gv_{1,x} = T_{xy}(y) \rightleftharpoons (x, y), (u, v). \quad (\text{III.25})$$

A partir de zéro conditions de cisaillement de face, on obtient $w_0(x, y)$ en termes de connu $[u_1, v_1]$ sous la forme

$$\alpha w_0(x, y) = -\int [u_1 dx + v_1 dy]. \quad (\text{III.26})$$

Déviations verticale qui a permis aux correspondants de faire face à la déflexion (notez que les conditions de cisaillement nul ne participent pas aux équations du domaine 3D contrairement à la théorie de Kirchhoff). Sa valeur nulle le long du bord nécessite simplement un support pour empêcher la déflexion verticale de l'intersection de la face avec la paroi de la plaque. Un tel support assure également une déflexion nulle du plan neutre le long de son bord. C'est parce que les déviations de face et de plan neutre (w_{0f}, w_{0n}) sont une seule et même chose puisque $w(x, y, z)$ avec $(w_2 + \varepsilon_{z1}) = 0$ peut être exprimé comme

$$w(x, y, z) = w_{0f}(x, y) + f_2(z) w_2 \quad (\text{III.27})$$

$$= w_{0n}(x, y) - \frac{z^2 \varepsilon_{z1}}{2} \quad (\text{III.28})$$

Cependant, $f_2(z)$ de la correction du second ordre w_2 à la déflexion verticale w est parabolique; de ce fait, la contrainte de cisaillement transverse appliquée ou réactive le long d'un bord est parabolé

Les équations (21) et (23) forment un système de sixième ordre pour la détermination de ψ_2, u_1 et v_1 . Les conditions à trois arêtes pertinentes correspondent à celles requises par Poisson. Par conséquent, la théorie est désignée comme la théorie de Poisson des plaques en flexion, parallèle à la théorie de Kirchhoff. Il est significatif de noter que la condition $w_0 = 0$ prescrite le long des segments du bord n'a aucun effet sur les déplacements $[u_1, v_1, w_0]$ obtenus à partir de la théorie de Poisson. Il est à noter que la théorie de Poisson donne une valeur supplémentaire de 0,27 à $w(x, y, 1)$ due à ε_{z1} à l'estimation de w_{0f} antérieure de la théorie de Kirchhoff.

Au premier stade de l'itération, les déplacements $f_3 [u_3, v_3]$ (donc ε_{z3}) cohérents avec $f_2 [\tau_{xz2}, \tau_{yz2}]$, et les contraintes transversales réactives ($\tau_{xz4}, \tau_{yz4}, \sigma_{z5}$) sont obtenu avec σ_{z5} comme variable libre en remplaçant f_5 par f_5^* . Les déplacements $[u_3, v_3]$ sont modifiés sous la forme [Vijayakumar. 2013b]

$$u_3^* = u_3 + \gamma_{xz2} - \alpha (w_2 - \varepsilon_{z1})_{,x} \rightleftharpoons (x, y), (u, v) \quad (\text{III.29})$$

Les déplacements $[u_3, v_3]$ sont déterminés par la satisfaction des équations d'équilibre statiques et intégrées. La correction d'ordre supérieur à w_0 découplée de la torsion est de 1,26, de sorte que la correction totale à la valeur de la théorie de Kirchhoff est d'environ 1,54, donnant w de $(= w_{0n}) = 3,81$. Problème supplémentaire La déviation du plan neutre w_{0n} est corrigée de la solution d'un problème supplémentaire avec des déplacements supposés.

Ici, la correction totale sur la déflexion du visage est d'environ 0,66, ce qui donne une valeur de 4,46, ce qui est très proche de la valeur exacte de 4,49. Par conséquent, il est sûr de conclure que les corrections de second ordre dans les déplacements et les contraintes transversales de la méthode itérative servent à évaluer les données de la théorie de Kirchhoff et du FSDT.

La solution pour w_0 consiste à satisfaire les conditions de cisaillement nul et les conditions de support des arêtes sur w_0 . Dans la théorie de Kirchhoff, ces deux conditions sont satisfaites par la seule variable w_0 régie par une équation du quatrième ordre. Dans la théorie de Reissner [Vijayakumar. 2013b], le déplacement vertical moyen satisfait la condition et, dans FSDT, la condition n'est pas satisfaite, mais son effet est inclus par le facteur de correction de l'énergie de cisaillement. Dans tous les cas, les deux sont des approximations du problème de torsion associé [Vijayakumar. 2011]. La présente analyse apporte une certaine clarté en ce qui concerne la solution préliminaire du problème de flexion primaire. Il montre que la détermination des déplacements dans le plan, les contraintes de flexion et les contraintes transversales réactives de l'intégration des équations d'équilibre est découplée de w_0 . Cependant, la condition de bord $w_0 = 0$ ou la contrainte contractée résultante $V_x = V_{x0}$ dans la théorie de Kirchhoff est différente de la condition.

$$\varepsilon_z = 0 \quad \text{ou} \quad \tau_{xz2} = T_{xz} \Leftrightarrow (x, y) \quad (\text{III.30})$$

Le long du bord constant x (et y).

L'erreur dans la valeur estimée $(= 3,81)$ de w_{0f} est relativement élevée par rapport à la précision obtenue dans la déviation du plan neutre. Dans le travail précédent, l'estimation de w_{0f} est encore améliorée en modifiant les déplacements dans le plan (u_3^*, v_3^*) tels que (τ_{xz2}, τ_{yz2}) sont indépendants de ε_{z1} . Dans le présent exemple, la correction de la déflexion de la face passe à 1,43, de sorte que la valeur de déflexion de face est de 3,97 $(= 2,27 + 0,27 + 1,43)$, ce qui est inférieur à 4,7% de la valeur exacte. La correction 1.43 de la déflexion de la face est due à ε_{z3} de la relation constitutionnelle. La détermination de ε_{z3} en termes de (σ_{z3}, u_3, v_3) implique une algèbre longue et un travail arithmétique.[Vijayakumar. 2011].

The above analysis consists of a basic sixth order system and a supplementary fourth order system. Since the second order corrections are mainly due to inclusion of σ_{z1} in the in-plane constitutive relations, it is shown much simpler to find its effect from the extended Poisson's theory without consideration of higher order displacement components (u_3, v_3).

III .9. Conclusion :

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter. Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques.

CHAPITRE IV

ANALYSE DE LA FLEXION D'UNE PLAQUE FGM SOUS L'EFFET DE LA FORME DE DISTRIBUTION DE POROSITE

IV.1.Introduction :

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont, macroscopiquement, des composés non homogènes qui sont habituellement faits à partir d'un mélange des métaux et de la céramique. Les FGM sont considérés comme les matériaux composés les plus prometteurs dans divers secteurs de technologie tels que l'aérospatiale, l'automobile, et les industries de la défense, et récemment l'électronique et les secteurs biomédicaux.

De plus, l'utilisation croissante des plaques en tant que composants structuraux dans divers domaines tels que la technologie marine; civile et aérospatiale a rendu nécessaire l'étude de leur comportement mécanique. Plusieurs études ont été entreprises sur le comportement mécanique des plaques en FGM. Cheng et Batra [Cheng. 2000] ont étudiés la flexion d'une plaque polygonale à gradient de propriétés simplement appuyée donnée par une théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT). Praveen et Reddy [Praveen. 1998] ont analysé également la réponse statique et dynamique non-linéaire des plaques en céramique-métal à gradient de propriétés dans un champ de température constante et soumis à des charges latérales dynamiques par la méthode des éléments finis. Park *et al* [Park. 2006] ont présenté le comportement du post-flambement et de la vibration thermique de la plaque FGM à gradient de propriétés, les équations non linéaires des éléments finis sont basés sur la théorie des plaques de déformation de cisaillement de premier ordre et la relation de contrainte-déplacement non linéaire de Von Karman est utilisé pour tenir compte du grand déplacement de la plaque. Shen [Shen. 2002] ont étudié la réponse non-linéaire de la flexion des plaques à gradient de propriétés soumises à des charges transversales et dans un environnement thermique.

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser une théorie raffinée de déformation de cisaillement pour l'étude de l'effet de la forme de distribution de porosité sur comportement statique des plaques FGM. L'effet en raison de la porosité est inclus en utilisant une loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité proposées par Wattanasakulpong *et al.* [Wattanasakulpong. 2012]. Les propriétés du matériau de la plaque FGM sont supposées variées en fonction d'une distribution en loi de puissance de la fraction volumique des constituants. L'équation du mouvement pour les plaques FGM est obtenue par le principe des travaux virtuels. Les effets de l'indice de puissance, la fraction volumique de porosité, le rapport de géométrie et le rapport d'épaisseur sur la flexion des plaques FGM sont également discutées.

IV.2. Formulation du problème :

Considérons une plaque d'épaisseur totale h et composée de la matière fonctionnellement imparfaite à travers l'épaisseur. On suppose que le matériau est isotrope et que le calibrage est supposé être seulement à travers l'épaisseur. Le plan xy est considéré comme étant le plan médian non déformé de la plaque avec l'axe z positif vers le haut à partir du plan médian.

IV.2.1. Théorie des plaques d'ordre supérieur :

Les déplacements d'un point matériel situé en (x, y, z) dans la plaque peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z) \theta_x \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z) \theta_y \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (IV.1)$$

où u, v, w sont des déplacements dans les directions x, y, z , u_0, v_0 et w_0 sont des déplacements de plan médian, et θ_x et θ_y sont les rotations des normales au plan médian autour des axes y et x , respectivement. $\psi(z)$ représente la fonction de la forme déterminant la distribution des déformations transversales de cisaillement et des contraintes le long de l'épaisseur. Le champ de déplacement de la théorie classique de la plaque mince (CPT) est facilement obtenu en fixant $\psi(z) = 0$. Le déplacement de la théorie de la plaque de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDPT) est obtenu en fixant $\psi(z) = z$. De plus, le déplacement de la théorie de la plaque de déformation par cisaillement parabolique (PSDPT) de Reddy 1984 est obtenu en réglant:

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (IV.2)$$

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

De plus, la théorie de la plaque de déformation exponentielle par cisaillement (ESDPT) de Karama (2003) est obtenue en fixant:

$$\Psi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (IV.3)$$

IV.2.2. Théorie de la plaque de déformation cisailée sinusoïdale actuelle :

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues impliquées dans la théorie de la plaque de déformation cisailée sinusoïdale (RSSDPT) actuelle n'est que de quatre, contre cinq dans le cas d'autres théories de déformation par cisaillement (Redama, 1984, Karama et al. La théorie présentée est cohérente sur le plan de la variation, ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et entraîne une variation transversale de la contrainte de cisaillement telle que les contraintes transversales de cisaillement varient paraboliquement à travers l'épaisseur.

IV.2.2.1. Hypothèses de base :

Les hypothèses de la théorie de la plaque raffinée actuelle sont les suivantes:

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les contraintes impliquées sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal W comprend deux composantes de flexion w_b et de cisaillement w_s . Ces composants sont des fonctions de coordonnées x , y et de temps t seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (IV.4)$$

- La contrainte normale transverse σ_z est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan σ_x et σ_y .
- Les déplacements u dans la direction x et v dans la direction y sont constitués de composants d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (IV.5)$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, conjointement avec w_s , aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc aux contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} dans l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} sont nulles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression pour u_s et v_s peut être donnée comme

$$u_s = -\left(z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad v_s = -\left(z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)\right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (IV.6)$$

IV.2.2.2. Champs de déplacement et souches :

Le champ de déplacement supposé est le suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements du plan médian de la plaque dans les directions x et y , respectivement; w_b et w_s sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, tandis que $f(z)$ représente les fonctions de forme déterminant la répartition des contraintes transversales de cisaillement et des contraintes le long de l'épaisseur et sont données comme suit: [Daouadji. 2012]

$$f(z) = z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \sec^2 \left(\frac{z}{h} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z}{h} \right) \quad (IV.8)$$

Il convient de noter que contrairement à la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre, cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement. Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (IV.9)$$

Où

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (IV.10)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y},$$

$$k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y},$$

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (IV.11)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{cases}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont les composants de contrainte et de contrainte, respectivement. Les coefficients de rigidité Q_{ij} peuvent être exprimés:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2} \quad (IV.12)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}$$

IV.2.2.3. Propriétés matérielles efficaces des plaques céramiques fonctionnalisées en céramique:

Une plaque FGM réalisée à partir d'un mélange de deux phases matérielles, par exemple un métal et une céramique. Les propriétés des matériaux des plaques FGM sont supposées varier continuellement à travers l'épaisseur de la plaque.

Dans cette étude, la plaque imparfaite est supposée avoir des porosités s'étendant dans l'épaisseur due au défaut pendant la production. Considérons une FGM imparfaite avec une fraction volumique de porosité, α ($\alpha \ll 1$), répartie également entre le métal et la céramique, la règle de mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) est utilisée comme:

$$P = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (IV.13)$$

Maintenant, la fraction volumique totale du métal et de la céramique est: $V_m + V_c = 1$, et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrite comme:

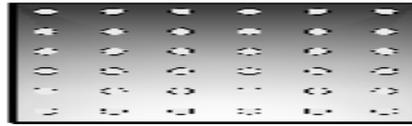
$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (IV.14)$$

Par conséquent, toutes les propriétés du MGF imparfait peuvent s'écrire comme suit:

$$P = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c + P_m) \frac{a}{2} \quad (IV.15)$$

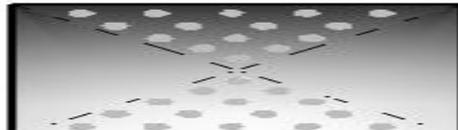
On note que le nombre réel positif k ($0 \leq k < \infty$) est la loi de puissance ou indice de fraction volumique, et z est la distance du plan médian de la plaque FGM. La plaque FGM devient une plaque entièrement en céramique lorsque k est mis à zéro et entièrement métallique pour une grande valeur de k . Ainsi, les équations du module de Young (E) et de la densité de matériau (ρ) du faisceau de FGM imparfait peuvent être exprimées comme suit:

- Distribution homogène de porosité:



$$E = (e_c - e_m) * \left(\frac{z}{h} + 0.5 \right)^k + e_m - (e_c + e_m) * \frac{\alpha}{2} \quad (IV.16a)$$

- Distribution de forme 'X' de porosité:



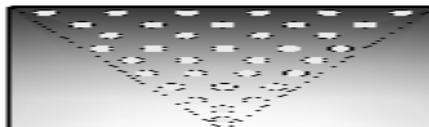
$$E = (e_c - e_m) * \left(\frac{z}{h} + 0.5 \right)^k + e_m - (e_c + e_m) * \frac{\alpha}{2} * \left(2 * \frac{z}{h} \right) \quad (IV.16b)$$

- Distribution de forme 'O' de porosité:



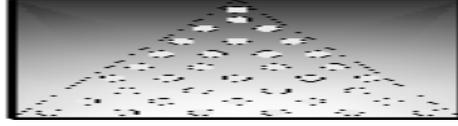
$$E = (e_c - e_m) * \left(\frac{z}{h} + 0.5 \right)^k + e_m - (e_c + e_m) * \frac{\alpha}{2} * \left(1 - 2 * \frac{z}{h} \right) \quad (IV.16c)$$

- Distribution de forme 'V' de porosité:



$$E = (e_c - e_m) * \left(\frac{z}{h} + 0.5 \right)^k + e_m - (e_c + e_m) * \frac{\alpha}{2} * \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) \quad (IV.16d)$$

- Distribution de forme 'V' renversé de porosité:



$$E = (e_c - e_m) * \left(\frac{z}{h} + 0.5\right)^k + e_m - (e_c + e_m) * \frac{\alpha}{2} * \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right) \quad (\text{IV.16e})$$

Cependant, le coefficient de Poisson (ν) est supposé constant. Les propriétés matérielles d'une plaque FGM parfaite peuvent être obtenues lorsque α est mis à zéro.

IV.2.3. Équations gouvernantes et conditions aux limites:

Les équations d'équilibre sont dérivées en utilisant le principe de travail virtuel, qui peut être écrit pour la plaque comme

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) . d\Omega . dz - \int_{\Omega} q . \delta w . d\Omega = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Est la surface supérieure. Ω Où

Substituer des Eqs. (V.10) et (V.11) dans l'équation. (14) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, Eq. (V.17) peut être réécrit comme :

$$\int_{\Omega} (N_x . \delta \varepsilon_x^0 + N_y . \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} . \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b . \delta k_x^b + M_y^b . \delta k_y^b + M_{xy}^b . \delta k_{xy}^b + M_x^s . \delta k_x^s + M_y^s . \delta k_y^s + M_{xy}^s . \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s . \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s . \delta \gamma_{xz}^s) d\Omega - \int_{\Omega} q (\delta w + \delta w_b) d\Omega = 0 \quad (\text{IV.18})$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} N_x, & N_y, & N_{xy}, \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b, \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s, \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.19})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{IV.20})$$

Les équations directrices de l'équilibre peuvent être dérivées de l'équation. (V.21) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en fixant séparément les coefficients, et

zéro. Ainsi, on peut obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation de cisaillement:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = 0 \end{array} \right. \quad (IV.21)$$

Utilisation de l'équation (V.11) dans l'équation (V.19), les résultantes de stress d'une plaque sandwich composée de trois couches peuvent être reliées aux déformations totales par :

$$\left\{ \begin{array}{l} N \\ M^b \\ M^s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{array} \right\}; \quad (IV.22)$$

$$S = A^s \gamma \quad (IV.23)$$

Ou :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (IV.24)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (IV.25)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (IV.26)$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (IV.27)$$

Les coefficients de rigidité et, etc., sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.28})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad (\text{IV.29})$$

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\mu^2} \quad A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \quad (\text{IV.30})$$

Substituer de l'équation (V.19) dans l'équation (V.21), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} D_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{11} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{12} \\ & - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

$$\begin{aligned} & A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_b \\ & - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} w_s - B_{22}^s d_{222} w_s = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

$$\begin{aligned} & B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_b \\ & - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_b - D_{22} d_{2222} w_b - D_{11}^s d_{1111} w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_s \\ & - D_{22}^s d_{2222} w_s + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

$$\begin{aligned} & B_{11}^s d_{111} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} v_0 + B_{22}^s d_{222} v_0 - D_{11}^s d_{1111} w_b \\ & - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_b - D_{22}^s d_{2222} w_b - H_{11}^s d_{1111} w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{1122} w_s \\ & - H_{22}^s d_{2222} w_s + A_{55}^s d_{11} w_s + A_{44}^s d_{22} w_s + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

Où, d_{ij} , d_{ijl} , et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad (\text{IV.35})$$

Avec:

$$(i, j, l, m = 1, 2)$$

IV.3. Résultats :

Dans cette partie, nous présentons le comportement d'une plaque FGM poreuse simplement appuyée soumise à une charge statique sur sa face supérieure.

Les propriétés des matériaux pris en charge dans la présente analyse sont les suivantes:

Céramique:

(P_C : Alumine, Al_2O_3): $E_c = 380\text{GPa}$

(P_C : Zircon (ZrO₂) : $E_c = 151\text{GPa}$

Métal:

(P_M : Aluminium, Al): $E_m = 70\text{GPa}$

Le coefficient de Poisson est pris égal à 0,3 à la fois de l'alumine et de l'aluminium. Et leurs propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance.

La validité de la présente solution est testée pour le déplacement central non-dimensionnelle et les contraintes dans le plan $\overline{\sigma_{xx}}$ d'une plaque FGM en alumine / aluminium avec le rapport d'épaisseur égal ($a / h = 10$) sous un chargement uniformément réparties dans le tableau IV.01. Une corrélation étroite est obtenue.

Tableau IV. 01. Etude comparative du déplacement central non-dimensionnelle la contrainte dans le plan d'une plaque carré FGM en alumine / aluminium sous des charges uniformément répartie ($a / h = 10$)

L'indice de puissance k	\overline{w}		$\overline{\sigma_{xx}}$ ($z = h/2$)	
	Singha (2011)	présente	Singha (2011)	présente
Charge uniformément répartie				
Céramique	0.4666	0.4665	2.8688	2.8928
k=1	0.9290	0.9421	4.4303	4.2606
k=2	1.1952	1.2228	5.1689	4.8890
k=4	1.3908	1.4213	5.8035	5.4586
Métal	2.5327	3.3723	2.8687	2.8928

tableau IV.02 présente l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM poreuse en Al/Al₂O₃. La fraction volumique de porosité est pris égal à 0.1, 0.15 et 0.2. A partir de ce tableau on peut constater que la flèche adimensionnelle devient faible lorsque la distribution des pores est de forme de 'X'. On peut

également remarquer que plus en la fraction volumique de porosité augmente la flèche adimensionnelle devient plus importante.

Tableau IV.02: Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM poreuse

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1
Plaque FGM k=5	homogène	1.8388	1.9534	2.2547	2.3905	3.0001	3.1669
	Forme de 'X'	1.2437	1.3308	1.1955	1.2824	1.1567	1.2434
	Forme de 'V'	1.4645	1.5634	1.5122	1.6179	1.5631	1.6768
	Forme de 'V' renversé	1.7038	1.8035	1.9618	2.0691	2.3463	2.4625
Plaque FGM k=10	homogène	1.9924	2.1437	2.4339	2.6252	3.2308	3.4922
	Forme de 'X'	1.3794	1.4857	1.3413	1.4472	1.3146	1.4201
	Forme de 'V'	1.6069	1.7316	1.6677	1.8037	1.7340	1.8834
	Forme de 'V' renversé	1.8355	1.9616	2.1038	2.2424	2.5083	2.6623

Tableau IV.03: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} d'une plaque FGM poreuse.

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1
Plaque FGM k=5	homogène	61.9146	6.2325	65.9436	6.6344	72.2753	7.2641
	Forme de 'X'	53.7290	5.4142	52.6271	5.3042	51.7088	5.2125
	Forme de 'V'	56.9958	5.7414	57.1864	5.7613	57.3999	5.7836
	Forme de 'V' renversé	57.8681	5.8242	59.3206	5.9674	61.9327	6.2257
Plaque FGM k=10	homogène	76.0623	7.6504	80.6563	8.1061	86.5314	8.6818
	Forme de 'X'	67.5420	6.8001	76.2388	6.7701	67.2048	6.7667
	Forme de 'V'	71.1306	7.1593	72.3663	7.2838	73.7953	7.4276
	Forme de 'V' renversé	69.6826	7.0090	70.7025	7.1080	72.7474	7.3081

Le tableau IV.03 montre l'effet de la distribution de porosité sur la contrainte normale d'une plaque FGM simplement appuyée. L'indice de puissance est pris égal à 5 et 10. plusieurs formes de distribution ont été pris en considération, à savoir: une distribution

homogène, X, V et V renversé. Il est clair que la contrainte longitudinale prend des valeurs maximales quand la distribution des pores est de forme homogène.

Tableau IV. 04: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} d'une plaque FGM poreuse.

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1
Plaque FGM k=5	homogène	16.7758	1.6712	16.4179	1.6362	15.8210	1.5779
	Forme de 'X'	1.9129	0.1969	2.0671	0.2113	2.0903	0.2127
	Forme de 'V'	1.0172	0.1086	0.9502	0.1014	0.8720	0.0930
	Forme de 'V' renversé	-0.4847	-0.040	-1.4179	-0.134	-2.5093	-0.244
Plaque FGM k=10	homogène	12.2568	1.2173	11.3949	1.1311	10.1117	1.0030
	Forme de 'X'	2.2070	0.2237	0.2366	0.2058	1.7050	0.1718
	Forme de 'V'	1.6824	0.1723	1.4577	0.1491	1.1784	0.1204
	Forme de 'V' renversé	0.5571	0.0605	-0.1365	0.0092	-0.7586	0.0721

L'influence de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale d'une plaque FGM poreuse en Al/Al₂O₃ est montré dans le tableau IV.04. Il est à noter que la contrainte normale est plus importante dans les plaques FGM minces pour n'importe quelle forme de distribution de porosité. Cette dernière diminue avec l'augmentation de la fraction volumique de porosité.

Le tableau IV.05 présente l'influence de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{yz} d'une plaque FGM poreuse simplement appuyée. Le rapport d'épaisseur est pris égal à h/a=0.01 et h/a=0.1. On peut conclure que la contrainte de cisaillement transversale devient plus faible quand la plaque FGM devient plus riche en métal.

Le tableau IV.06 montre l'effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} d'une plaque FGM avec porosité. Le rapport d'épaisseur de plaque FGM est pris égal à h/a=0.01 et h/a=0.1. l'indice de puissance est considéré égal à 5 et 10. Il est à noter que sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} prend des valeurs maximales quand la distribution des pores est de forme de 'X'.

Tableau IV.05: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{yz} d'une plaque FGM poreuse.

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1
Plaque FGM k=5	homogène	0.5261	0.519	0.5404	0.5330	0.5601	0.5520
	Forme de 'X'	0.9459	0.9342	0.8947	0.8836	0.8432	0.8328
	Forme de 'V'	1.0669	1.0563	1.0835	1.0694	1.0992	1.0847
	Forme de 'V' renversé	0.4219	0.4162	0.4181	0.4121	0.4121	0.4058
Plaque FGM k=10	homogène	0.4219	0.4162	0.4181	0.4121	0.4121	0.4058
	Forme de 'X'	0.7302	0.7212	0.6661	0.6579	0.6020	0.5946
	Forme de 'V'	0.8546	0.8436	0.8525	0.8414	0.8500	0.8388
	Forme de 'V' renversé	0.8544	0.8434	0.8518	0.8405	0.8481	0.8366

Tableau IV.06: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} d'une plaque FGM poreuse.

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1
Plaque FGM k=5	homogène	0.5621	0.5544	0.6257	0.1664	0.7155	0.7033
	Forme de 'X'	0.1780	0.1758	0.1937	0.1914	0.4089	0.4040
	Forme de 'V'	0.1569	0.1549	0.1633	0.1612	0.5177	0.5110
	Forme de 'V' renversé	0.1211	0.1195	0.1057	0.1042	0.6042	0.5952
Plaque FGM k=10	homogène	0.4706	0.4652	0.5408	0.5343	0.6607	0.6523
	Forme de 'X'	0.2198	0.2173	0.2390	0.2363	0.3041	0.3007
	Forme de 'V'	0.2005	0.1982	0.2129	0.2105	0.4090	0.4044
	Forme de 'V' renversé	0.1550	0.1532	0.1383	0.1367	0.5308	0.5242

L'effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale d'une plaque FGM est présenté dans le tableau IV.07. A partir des résultats de ce tableau on peut dire l'augmentation de la fraction volumique de porosité de 0.1 à 0.2 réduit la contrainte tangentielle longitudinale dans les plaques FGM poreuses minces et épaisses.

Tableau IV.07: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} d'une plaque FGM poreuse

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1
Plaque FGM k=5	homogène	10.7760	1.0749	10.5631	1.0564	10.2568	1.0298
	Forme de 'X'	11.3334	1.1232	15.9803	1.5872	17.8188	1.7689
	Forme de 'V'	11.1078	1.1038	11.3334	1.1048	11.1394	1.1058
	Forme de 'V' renversé	10.7296	1.0706	10.4746	1.0475	10.1125	1.0139
Plaque FGM k=10	homogène	10.6462	1.0889	10.7952	1.0773	10.6469	1.0689
	Forme de 'X'	11.4123	1.1275	16.1071	1.5941	17.9216	1.7719
	Forme de 'V'	11.2129	1.1107	11.2096	1.1094	11.2010	1.1074
	Forme de 'V' renversé	10.7296	1.0706	10.4746	1.0475	10.1125	1.0139

Les figures IV.01 et IV.02 présentent l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle en fonction du rapport de géométrie a/b d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement . L'indice de puissance est pris égal à 5 et le rapport d'épaisseur est égal à a/h=10. A partir de ces figures on peut constater l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM poreuse devient plus faible avec l'augmentation du rapport de géométrie.

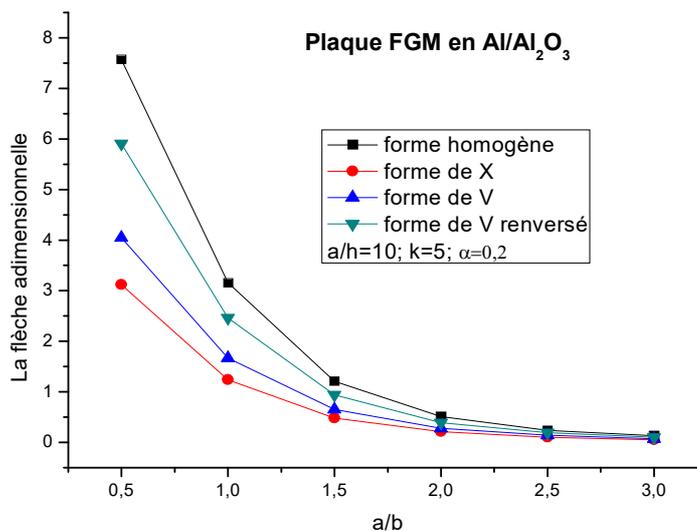


Figure IV.01 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ en fonction du rapport de géométrie a/b

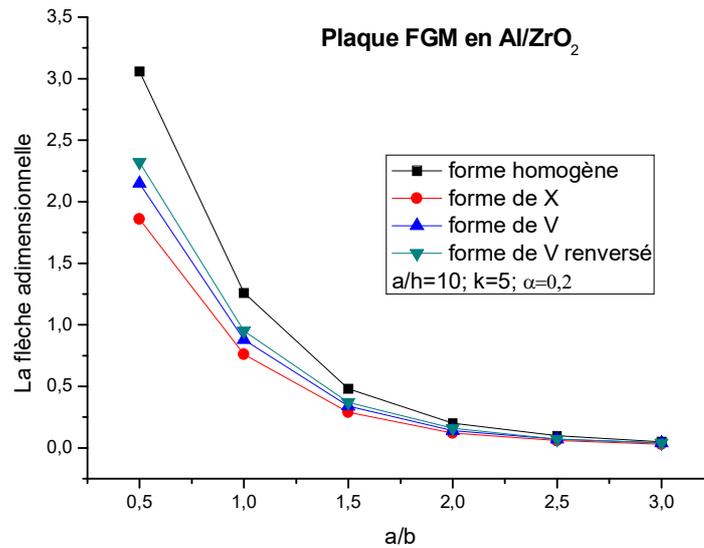


Figure IV.02 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ en fonction du rapport de géométrie a/b

Les figures IV.03 et IV.04 montrent l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque FGM poreuse en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. Il est clair que la flèche adimensionnelle devient plus faible quand la distribution des pores prend une forme de distribution de 'X'. On peut également dire que la flèche adimensionnelle devient plus faible avec l'augmentation du rapport a/h.

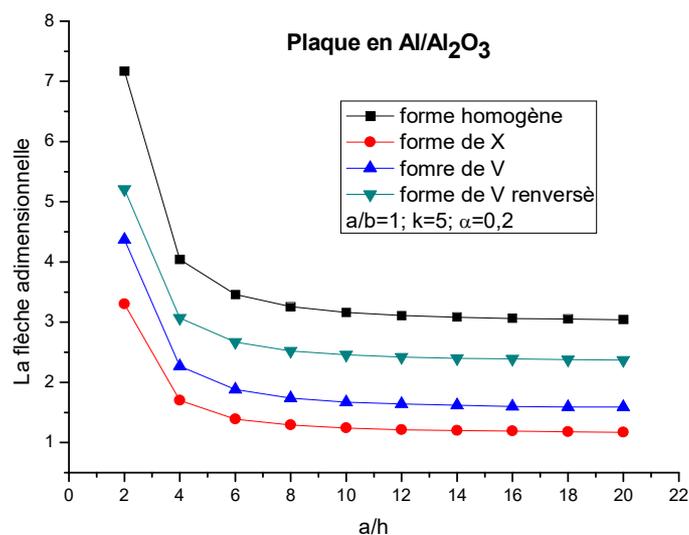


Figure IV.03 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ en fonction du rapport d'épaisseur a/h

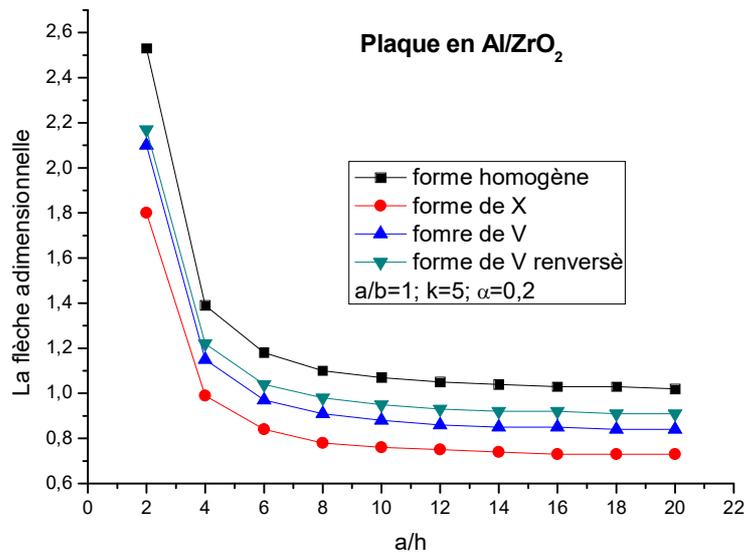


Figure IV.04 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ en fonction du rapport d'épaisseur a/h

L'influence de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂ est présenté dans les figures IV.05 et IV.06, respectivement. A partir de ces figures on peut remarquer que la forme de distribution de porosité influe sur la variation de distribution des contraintes normales à travers l'épaisseur de la plaque FGM.

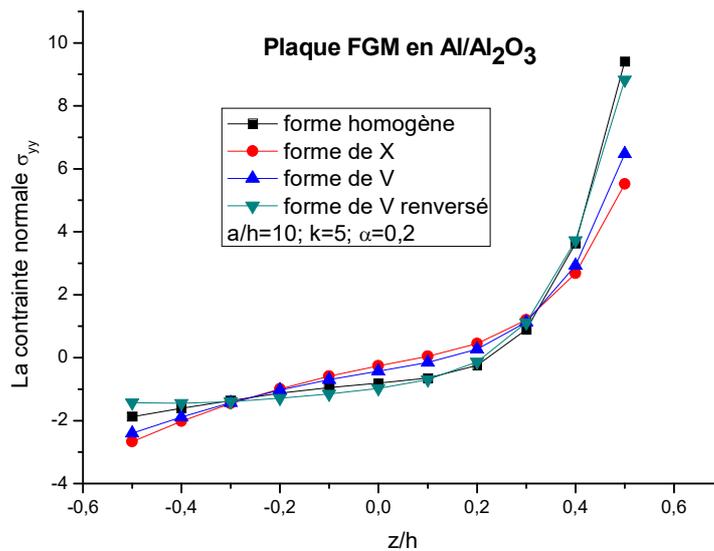


Figure IV.05 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃

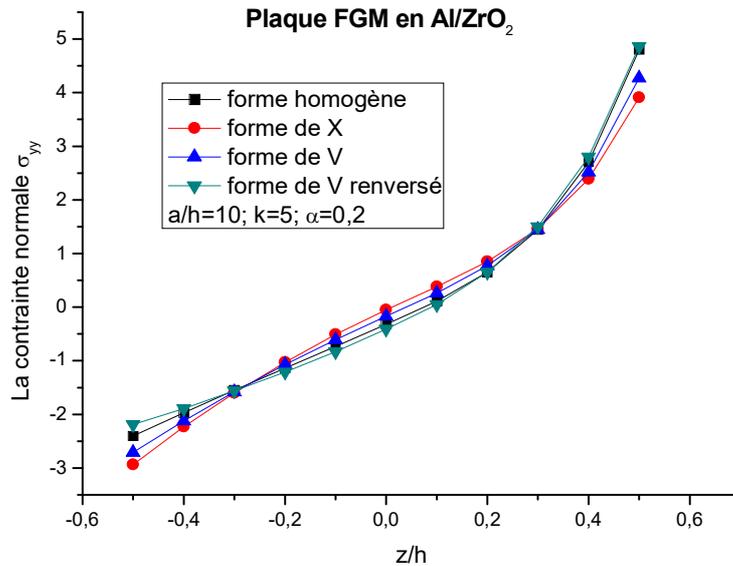


Figure IV.06 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂

La variation de la contraintes de cisaillement transversale τ_{yz} et τ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque FGM en Al/ZrO₂ sous l'effet de la forme de distribution de porosité est présenté dans les figures IV.07 et IV.08, respectivement. La valeur maximale de la contrainte de cisaillement transversale représente la position de l'axe neutre. Pour cela on peut constater que la forme de distribution de porosité influe sur la position de l'axe neutre de la plaque FGM.

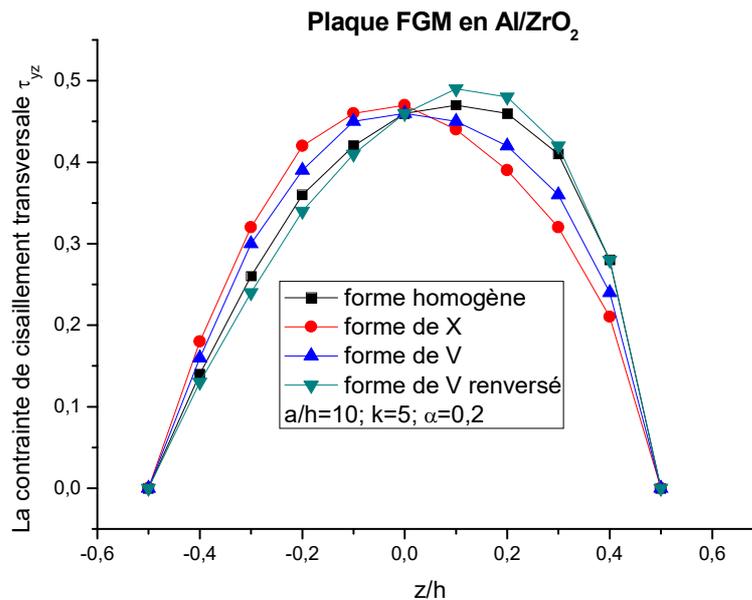


Figure IV.07 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{yz} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂

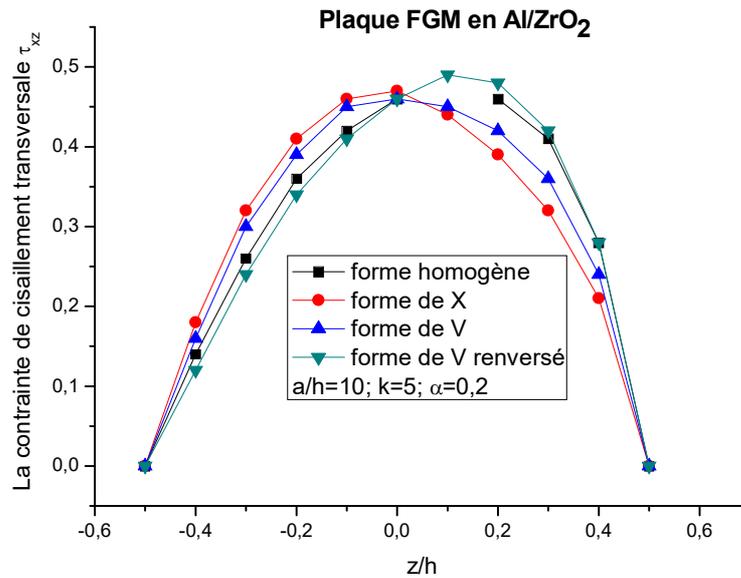


Figure IV.08 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂

Les figures IV.09 et IV.10 présentent l'effet de forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂. Il est clair que la forme de distribution de porosité à plus d'effet sur la contrainte tangentielle longitudinale quand la combinaison de la plaque FGM est en Al/Al₂O₃.

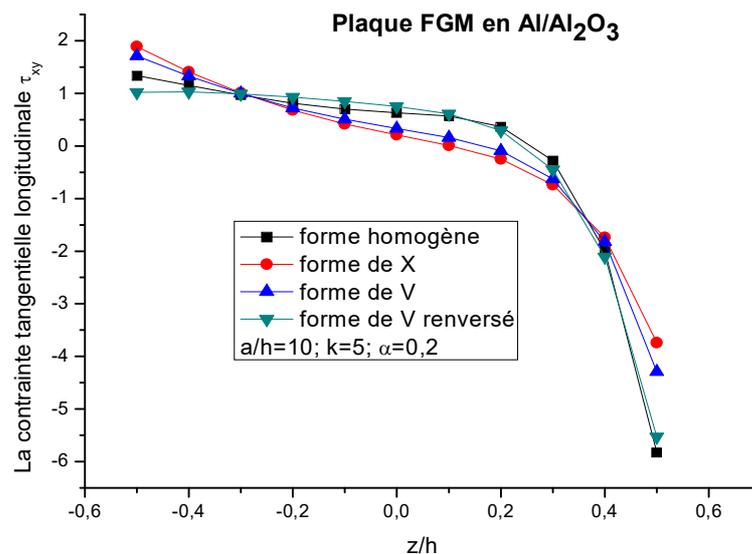


Figure IV.09 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃

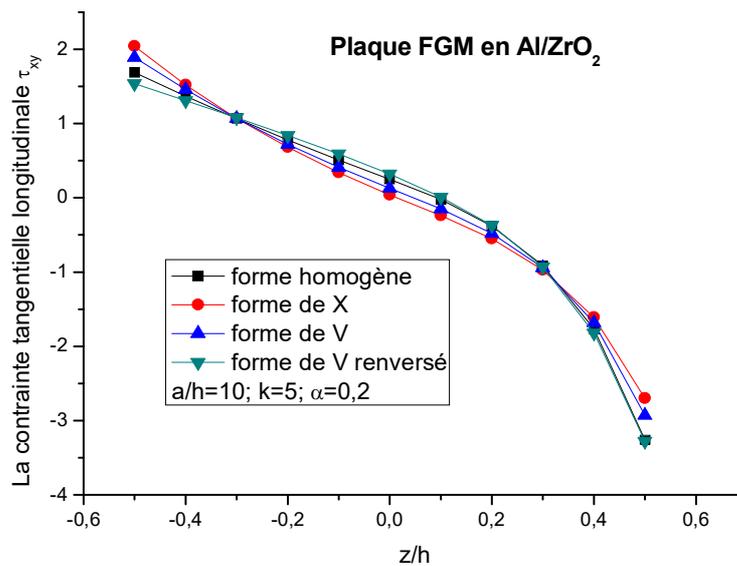


Figure IV.10 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂

IV.4.conclusion :

Une nouvelle théorie raffinée de déformation de cisaillement de la plaque est proposée pour l'analyse statique des plaques FGM en Al/Al₂O₃ et Al/ZrO₂. La théorie prit en considération la distribution parabolique de la déformation de cisaillement transverse et satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. La loi du mélange modifiée couvrant les phases et la forme de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM avec porosité. Les équations d'équilibre sont dérivées du principe des travaux virtuels. L'influence de la forme de distribution de porosité sur la flèche et sur les contraintes et sont discutées. A partir de cette étude les conclusions suivantes ont été tirées :

- La flèche adimensionnelle devient plus faible quand la distribution des pores prend une forme de distribution de 'X' .
- la forme de distribution de porosité influe sur la variation de distribution des contraintes normales à travers l'épaisseur de la plaque FGM.
- La forme de distribution de porosité à plus d'effet sur la contrainte tangentielle longitudinale quand la combinaison de la plaque FGM est en Al/Al₂O₃.
- La forme de distribution de porosité influe sur la position de l'axe neutre de la plaque FGM.

CHAPITRE V

EFFET DE LA FORME DE DISTRIBUTION DE POROSITE SUR LE COMPORTEMENT STATIQUE DES PLAQUES FGM REPOSEES SUR UNE FONDATION ELASTIQUE

V.1.Introduction :

Les matériaux à gradient de propriétés sont largement utilisée dans diverses structures d'ingénierie civile, mécanique et spatiale à cause de leur grande rigidité et résistance. Ils résistent aussi aux contraintes thermiques et réduisent le risque de grosses fissures, mais ne les éliminez pas complètement. Généralement ces matériaux sont fabriqués à partir de mélange de céramique et de métal.

Les plaques reposait sur une fondation élastique sont très adoptés en génie des structures au cours des dernières décennies. De nombreuses études de flexion linéaires pour des plaques épaisses soumises à des charges transversales avec des fondations élastiques sont disponibles dans la littérature. Dans certaines des analyses de plaques sur fondation élastique, un seul paramètre est utilisé pour décrire le comportement de base selon le modèle Winkler [Katsikadelis. 1984, Liu. 2000]. Dans ce modèle, on suppose qu'il existe une interaction proportionnelle entre la pression et la flexion d'un point appliqué sur la fondation. Cette fondation est modélisée par des ressorts verticaux discrets et ne tient pas compte de la déformation de cisaillement transversal.

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement pour étudier l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flexion des plaques FGM simplement appuyées reposant sur une fondation de type Winkler-Pasternak. Nous supposons que la plaque est réalisée en matériau isotrope ayant des propriétés matérielles varient d'une façon continues dans seulement la direction d'épaisseur. Nous considérons un matériau à gradient de propriétés à deux phases, avec une variation de la loi de puissance des fractions en volume des constituants dans l'épaisseur.

V.2. Configuration géométriques et propriétés matérielles :

Nous considérons ici une plaque FGM d'une longueur a , une largeur b et une épaisseur totale h constituée d'un mélange de métal et de céramique, dans lequel la composition varie depuis le sommet jusqu'à la surface inférieure. Le matériau en surface supérieure et surface inférieure est en céramique et en métal, respectivement.

Dans cette étude, nous considérons une plaque FGM imparfaite avec une fraction volumique de porosité, α ($\alpha \ll 1$), répartie uniformément entre le métal et la céramique, la

règle du mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn [Wattanasakulpong, 2014] est utilisée comme :

$$P = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (V.1)$$

La loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est supposée :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (V.2)$$

La loi du mélange modifiée devient :

$$P = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c + P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (V.3)$$

Il est à noter que k est l'indice de loi de puissance qui prend des valeurs supérieures ou égale à zéro. La plaque FGM est une plaque entièrement en céramique lorsque k est mis à zéro et entièrement métallique pour une grande valeur de k .

Le module de Young (E) et la densité (ρ) d'un FGM poreux peuvent être écrites en fonction de coordonnée d'épaisseur, z_{ns} , comme suit [Ait Atmane, 2015, Ait Yahia, 2015, Hadji, 2015a, b]

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (V.4)$$

Les propriétés matérielles d'une plaque FGM parfaite peut être obtenue lorsque la fraction volumique de porosité α est mise à zéro. En raison des faibles variations du rapport de Poisson ν , il est supposé constant.

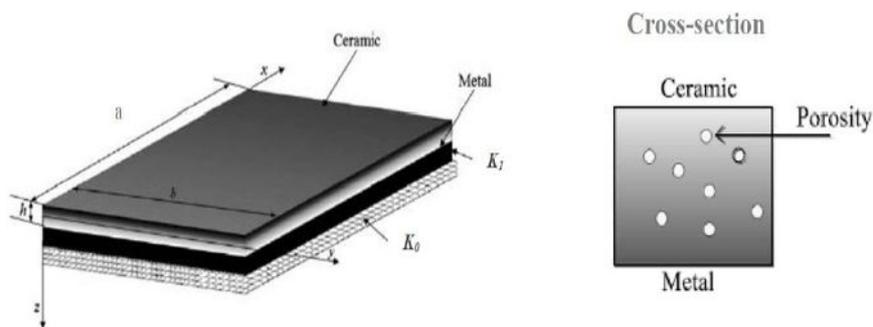


Figure V.1. Géométrie et dimension d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique

V.3. Champ de déplacements et déformations :

Sur la base de la théorie de la plaque d'ordre supérieur de déformation de cisaillement, les éléments de déplacement sont supposés :

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z_{ns}) &= u_0(x,y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x,y,z_{ns}) &= v_0(x,y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x,y,z_{ns}) &= w_b(x,y) + w_s(x,y)
 \end{aligned} \tag{V.5}$$

La déformation linéaire peut être obtenue à partir des relations cinématiques comme :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z_{ns} k_x^b + f(z_{ns}) k_x^s \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z_{ns} k_y^b + f(z_{ns}) k_y^s \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z_{ns} k_{xy}^b + f(z_{ns}) k_{xy}^s \\
 \gamma_{yz} &= g(z_{ns}) \gamma_{yz}^s \\
 \gamma_{xz} &= g(z_{ns}) \gamma_{xz}^s \\
 \varepsilon_z &= 0
 \end{aligned} \tag{V.6}$$

Ou

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\
 g(z_{ns}) &= 1 - f'(z_{ns}), \quad f'(z_{ns}) = \frac{df(z_{ns})}{dz_{ns}}
 \end{aligned} \tag{V.7}$$

$$f(z) = z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \sec h^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z}{h} \right)$$

Les relations constitutives linéaires d'une plaque FGM peuvent être écrites comme :

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} \quad (V.8)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{cases}$$

Où

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1 - \nu^2}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1 - \nu^2} \quad (V.9)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1 + \nu)}$$

V.4. Les équations d'équilibre:

Les équations d'équilibre qui gouvernent peuvent être dérivées en utilisant le principe des déplacements virtuels. Le principe du travail virtuel dans le cas présent donne:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) d\Omega dz + \int_{\Omega} [f_e \delta w] d\Omega - \int_{\Omega} [q \delta w] d\Omega = 0 \quad (V.10)$$

Où Ω est la surface supérieure.

f_e est la densité de la force de réaction de fondation. Pour le modèle de fondation Pasternak :

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w \quad (V.11)$$

Où K_0 et K_1 sont les coefficients de rigidité transversale et de cisaillement de la fondation, respectivement. Les résultantes des contraintes sont données comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}; \quad S = A^s \gamma \quad (V.12)$$

Ou

$$\begin{aligned}
 N &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \\
 \varepsilon &= \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \\
 A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \\
 B^s &= \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \\
 S &= \{S_{xz}^z, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{V.13}$$

Et les composants de rigidité et l'inertie sont donnés comme :

$$\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, z_{ns}, f(z_{ns}), z_{ns}^2, z_{ns} f(z_{ns}), [f(z_{ns})]^2\} Q_{ij} dz_{ns} \tag{V.14}$$

Suite à la procédure de solution de Navier, on suppose que la forme de solution suivante pour u_0, v_0, w_b et w_s qui satisfait les conditions aux limites :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \tag{V.15}$$

Ou $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ et $U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$ sont des paramètres arbitraires à déterminer.. On obtient l'équation de l'opérateur suivante :

$$([K]\{\Delta\} = \{F\}) \tag{V.16}$$

Ou $\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t$. $[K]$ et $[M]$ sont la rigidité et la masse des matrices, respectivement, et représentée comme :

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (V.17)$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 \\ a_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -B_{11}\alpha^3 \\ a_{14} &= C_{11}\alpha^2 + C_{66}\beta^2 \\ a_{15} &= \alpha\beta(C_{12} + C_{66}) \\ a_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \\ a_{23} &= -B_{22}\beta^3 \\ a_{24} &= \alpha\beta(C_{12} + C_{66}) \\ a_{25} &= C_{66}\alpha^2 + C_{22}\beta^2 \\ a_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2D_{12}\alpha^2\beta^2 + 4D_{66}\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 + k_0 + k_1(\alpha^2 + \beta^2) \\ a_{34} &= -E_{11}\alpha^3 - E_{12}\alpha\beta^2 - 2E_{66}\alpha\beta^2 \\ a_{35} &= -E_{12}\alpha^2\beta - 2E_{66}\alpha^2\beta - E_{22}\beta^3 \\ a_{44} &= F_{55} + G_{11}\alpha^2 + G_{66}\beta^2 \\ a_{45} &= \alpha\beta(G_{12} + G_{66}) \\ a_{55} &= F_{44} + G_{66}\alpha^2 + G_{22}\beta^2 \end{aligned} \quad (V.18)$$

V.5. Résultats et discussion :

Dans cette étude, l'analyse en flexion des plaques FGM par la nouvelle théorie hyperbolique de déformation de cisaillement de la plaque est suggérée pour l'investigation. Le coefficient de Poisson est fixé à $\nu = 0,3$. Les comparaisons sont faites avec les solutions disponibles dans la littérature. Afin de vérifier l'exactitude de la présente analyse.

Les propriétés des matériaux pris en charge dans la présente analyse sont les suivantes:

Céramique (Alumine, Al_2O_3) : $E_C = 380$ GPa ; $\nu = 0.3$;

(Zircon, ZrO_2) : $E_C = 151$ GPa ; $\nu = 0.3$;

Metal (Aluminum, Al) : $E_m = 70$ GPa ; $\nu = 0.3$;

Tableau V.1. Comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque mince et isotrope simplement appuyée sous un chargement uniforme

K_0	K_I	Thai (2011)	présente
1	1	3.855	4.0403
	3^4	0.763	0.7662
	5^4	0.1153	0.1153
3^4	1	3.2108	3.3328
	3^4	0.7317	0.7344
	5^4	0.1145	0.1145
5^4	1	1.4765	1.4887
	3^4	0.5704	0.5705
	5^4	0.1095	0.1094

Les résultats de la flèche adimensionnelle d'une plaque carrée, mince et isotrope simplement appuyée sous un chargement uniformément répartie sont présentés dans le tableau V.1 pour des valeurs différentes de paramètres de fondation K_0 et K_I . On peut constater que les présents résultats convergent avec ceux qui sont donnés par Thai *et al.* [Thai, 2011]. On peut également remarquer que la flèche adimensionnelle diminue lorsque les paramètres en fondation augmentent.

Tableau V.2: Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur. $K_0=K_I=10$.

	Forme de distribution de porosité	$(a=0.1)$		$(a=0.15)$		$(a=0.2)$	
		$h/a=0.01$	$h/a=0.1$	$h/a=0.01$	$h/a=0.1$	$h/a=0.01$	$h/a=0.1$
Plaque FGM $k=5$	homogène	0.5513	0.5581	0.5814	0.5869	0.6178	0.6216
	Forme de 'O'	0.5851	0.5895	0.6500	0.6514	0.7419	0.7419
	Forme de 'X'	0.4858	0.4957	0.4789	0.4894	0.4731	0.4840
	Forme de 'V'	0.5145	0.5231	0.5203	0.5291	0.5262	0.5351
	Forme de 'V' renversé	0.5384	0.5453	0.5600	0.5657	0.5851	0.5895
Plaque FGM $k=10$	homogène	0.5665	0.5741	0.5952	0.6017	0.6301	0.6348
	Forme de 'O'	0.5975	0.6024	0.6614	0.6629	0.7569	0.7569
	Forme de 'X'	0.5063	0.5164	0.5015	0.5121	0.4981	0.5090
	Forme de 'V'	0.5325	0.5418	0.5391	0.5485	0.5458	0.5554
	Forme de 'V' renversé	0.5531	0.5605	0.5735	0.5798	0.5975	0.6024

Le tableau V.2 présente l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique pour différentes

valeurs du rapport d'épaisseur h/a . la fraction volumique de porosité est pris égal (0.1, 0.15 et 0.2). A partir du ce tableau on peut constater que la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM poreuse devient plus faible quand la distribution des pores est de forme 'X', et devient plus importante quand la distribution des pores est de forme 'O'. On peut également remarquer que l'augmentation de la fraction volumique de porosité augmente la flèche adimensionnelle pour n'importe quelle forme de distribution de porosité.

Tableau V.3: Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_0=K_l=10$ et $a/h=4$.

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2
Plaque FGM k=5	homogène	0.5901	0.1962	0.6138	0.2081	0.6416	0.2225
	Forme de 'O'	0.6118	0.2041	0.6605	0.2276	0.7419	0.2825
	Forme de 'X'	0.5395	0.1734	0.5352	0.1721	0.5317	0.1710
	Forme de 'V'	0.5623	0.1836	0.5685	0.1873	0.5750	0.1911
	Forme de 'V' renversé	0.5773	0.1887	0.5933	0.1958	0.6118	0.2041
Plaque FGM k=10	homogène	0.6090	0.2091	0.6326	0.2223	0.6599	0.2380
	Forme de 'O'	0.6273	0.2157	0.6734	0.2387	0.7569	0.2982
	Forme de 'X'	0.5609	0.1852	0.5580	0.1843	0.5560	0.1836
	Forme de 'V'	0.5827	0.1960	0.5899	0.2005	0.5975	0.2052
	Forme de 'V' renversé	0.5947	0.2001	0.6099	0.2073	0.6272	0.2157

Le tableau V.3 montre l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie a/b . l'indice de puissance est pris égal à (5 et 10). la plaque FGM est considérée de forme carrée et rectangulaire. D'après ce tableau, il est clair que la flèche adimensionnelle est plus importante quand la plaque est de forme carrée ($a/b=1$). cette dernière augmente légèrement quand l'indice de puissance varie de 5 à 10.

L'effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} d'une plaque FGM poreuse reposée sur une fondation élastique est présenté dans le tableau V.4. la fraction volumique de porosité varie de 0.1 à 0.2. On peut remarquer que la contrainte longitudinale devient plus faible lorsque la distribution des pores est de forme de 'O' est devient plus importante lorsque la distribution des pores est de forme de 'X'. On peut également constater que la contrainte longitudinale est plus grande dans les plaques FGM minces ($h/a=0.1$).

Tableau V.4: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur. $K_\theta=K_I=10$.

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1
Plaque FGM k=5	homogène	0.1893	0.1841	0.1760	0.1715	0.1582	0.1547
	Forme de 'O'	0.1847	0.1808	0.1608	0.1590	0.1177	0.1177
	Forme de 'X'	0.2067	0.2006	0.2059	0.1996	0.2049	0.1984
	Forme de 'V'	0.1999	0.1941	0.1959	0.1899	0.1918	0.1856
	Forme de 'V' renversé	0.1989	0.1938	0.1926	0.1881	0.1847	0.1808
Plaque FGM k=10	homogène	0.2121	0.2049	0.1958	0.1891	0.1723	0.1667
	Forme de 'O'	0.2002	0.1950	0.1651	0.1628	0.1005	0.1004
	Forme de 'X'	0.2361	0.2280	0.2373	0.2289	0.2383	0.2296
	Forme de 'V'	0.2270	0.2190	0.2240	0.2157	0.2211	0.2124
	Forme de 'V' renversé	0.2206	0.2138	0.2117	0.2055	0.2002	0.1950

Tableau V.5: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_\theta=K_I=10$.

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2
Plaque FGM k=5	homogène	0.1611	0.0653	0.1505	0.0629	0.1367	0.0599
	Forme de 'O'	0.1623	0.0689	0.1485	0.0695	0.1178	0.0696
	Forme de 'X'	0.1742	0.0661	0.1725	0.0649	0.1708	0.0637
	Forme de 'V'	0.1687	0.0658	0.1641	0.0642	0.1594	0.0625
	Forme de 'V' renversé	0.1712	0.0688	0.1672	0.0689	0.1623	0.0689
Plaque FGM k=10	homogène	0.1731	0.0693	0.1588	0.0651	0.1397	0.0590
	Forme de 'O'	0.1701	0.0715	0.1489	0.0689	0.1002	0.0605
	Forme de 'X'	0.1932	0.0731	0.1931	0.0725	0.1930	0.0720
	Forme de 'V'	0.1848	0.0716	0.1802	0.0699	0.1755	0.0680
	Forme de 'V' renversé	0.1838	0.0734	0.1776	0.0725	0.1701	0.0715

Le tableau V.5 présente l'effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale d'une plaque FGM poreuse reposée sur une fondation élastique. Le rapport de géométrie est pris égal à (a/b=1 et a/b=2). la fraction volumique de porosité varie de (0.1 à 0.2). Il est clair que la contrainte longitudinale prend des valeurs plus faible quand le rapport de géométrie et la fraction volumique de porosité augmentent, et augment avec l'augmentation du l'indice de puissance.

Tableau V.6: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur. $K_\theta=K_l=10$.

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1
Plaque FGM k=5	homogène	0.0427	0.0437	0.0348	0.0357	0.0252	0.0261
	Forme de 'O'	0.0360	0.0370	0.0204	0.0210	-0.0017	-0.0015
	Forme de 'X'	0.0582	0.0590	0.0591	0.0598	0.0597	0.0603
	Forme de 'V'	0.0515	0.0524	0.0494	0.0503	0.0473	0.0481
	Forme de 'V' renversé	0.0472	0.0482	0.0420	0.0431	0.0360	0.0370
Plaque FGM k=10	homogène	0.0299	0.0303	0.0232	0.0236	0.0155	0.0160
	Forme de 'O'	0.0258	0.0264	0.0130	0.0135	-0.0057	-0.0055
	Forme de 'X'	0.0417	0.0419	0.0414	0.0415	0.0407	0.0406
	Forme de 'V'	0.0366	0.0368	0.0340	0.0342	0.0314	0.0316
	Forme de 'V' renversé	0.0347	0.0352	0.0306	0.0311	0.0258	0.0264

L'effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale d'une plaque FGM poreuse reposée sur une fondation élastique est montré dans le tableau V.6. l'indice de puissance de la plaque FGM est pris égal à 5 et 10. Le rapport d'épaisseur est considéré égal à (0.01 et 0.1). A partir de ce tableau, on peut dire que la forme de distribution de porosité influe sur la contrainte normale d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique. cette dernière prend des valeurs plus faible quand la forme de distribution des pores est de forme de 'O'.

Le tableau V.7 présente l'effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie (a/b). On peut dire que la forme de distribution de porosité et la forme de la plaque (carrée ou rectangulaire) ont une influence sur la contrainte normale, puisque cette dernière augmente avec l'augmentation du rapport de géométrie (plaque rectangulaire) et lorsque la forme de distribution des pores est de forme de 'X'.

Le tableau V.8 présente l'influence de la forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale d'une plaque FGM reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak. Il est clair que l'augmentation de la fraction volumique de porosité et l'indice de puissance réduisent la contrainte tangentielle longitudinale pour les plaques minces et épaisses.

Tableau V.7: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_0=K_I=10$ et $a/h=4$.

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2
Plaque FGM k=5	homogène	0.0503	0.0775	0.0425	0.0692	0.0329	0.0608
	Forme de 'O'	0.0439	0.0724	0.0262	0.0550	-0.0015	0.0008
	Forme de 'X'	0.0645	0.0828	0.0647	0.0815	0.0646	0.0799
	Forme de 'V'	0.0584	0.0800	0.0561	0.0776	0.0537	0.0750
	Forme de 'V' renversé	0.0551	0.0803	0.0500	0.0770	0.0439	0.0724
Plaque FGM k=10	homogène	0.0338	0.0496	0.0275	0.0438	0.0205	0.0371
	Forme de 'O'	0.0308	0.0503	0.0175	0.0378	-0.0038	-0.0077
	Forme de 'X'	0.0440	0.0555	0.0429	0.0530	0.0416	0.0504
	Forme de 'V'	0.0395	0.0530	0.0366	0.0496	0.0337	0.0460
	Forme de 'V' renversé	0.0391	0.0560	0.0353	0.0536	0.0308	0.0503

Tableau V.8: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur.

$$K_0=K_I=10.$$

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1	h/a=0.01	h/a=0.1
Plaque FGM k=5	homogène	0.0377	0.0347	0.0325	0.0298	0.0262	0.0238
	Forme de 'O'	0.0302	0.0280	0.0168	0.0156	-0.0106	-0.0100
	Forme de 'X'	0.0496	0.0460	0.0513	0.0474	0.0526	0.0486
	Forme de 'V'	0.0444	0.0410	0.0437	0.0402	0.0430	0.0394
	Forme de 'V' renversé	0.0391	0.0363	0.0351	0.0325	0.0302	0.0280
Plaque FGM k=10	homogène	0.0368	0.0332	0.0320	0.0285	0.0262	0.0228
	Forme de 'O'	0.0302	0.0275	0.0173	0.0158	-0.0142	-0.0136
	Forme de 'X'	0.0478	0.0437	0.0490	0.0447	0.0500	0.0455
	Forme de 'V'	0.0430	0.0391	0.0421	0.0380	0.0412	0.0369
	Forme de 'V' renversé	0.0385	0.0352	0.0347	0.0316	0.0302	0.0275

L'effet de la géométrie de la plaque (a/b) sur la contrainte tangentielle longitudinale sous différentes formes de distribution de porosité est montré dans le tableau V.9. La fraction volumique de porosité varie de 0.1 à 0.2. Il est à noter que la contrainte tangentielle longitudinale devient plus faible lorsque la plaque est de forme rectangulaire, et devient plus importante quand la plaque est plus riche en métal.

Tableau V.9: effet de porosité et sa forme de distribution sur la contrainte tangentielle longitudinale τ_{xy} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_0=K_1=10$ et $a/h=4$.

	Forme de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2
Plaque FGM k=5	homogène	0.0248	0.0115	0.0210	0.0099	0.0165	0.0081
	Forme de 'O'	0.0207	0.0102	0.0118	0.0065	0.0082	-0.0059
	Forme de 'X'	0.0333	0.0144	0.0341	0.0146	0.0347	0.0146
	Forme de 'V'	0.0295	0.0131	0.0285	0.0126	0.0274	0.0121
	Forme de 'V' renversé	0.0267	0.0124	0.0240	0.0114	0.0207	0.0102
Plaque FGM k=10	homogène	0.0223	0.0100	0.0185	0.0084	0.0142	0.0065
	Forme de 'O'	0.0192	0.0093	0.0112	0.0060	-0.0104	-0.0074
	Forme de 'X'	0.0303	0.0129	0.0307	0.0129	0.0311	0.0129
	Forme de 'V'	0.0266	0.0116	0.0253	0.0109	0.0240	0.0102
	Forme de 'V' renversé	0.0246	0.0113	0.0221	0.0103	0.0192	0.0092

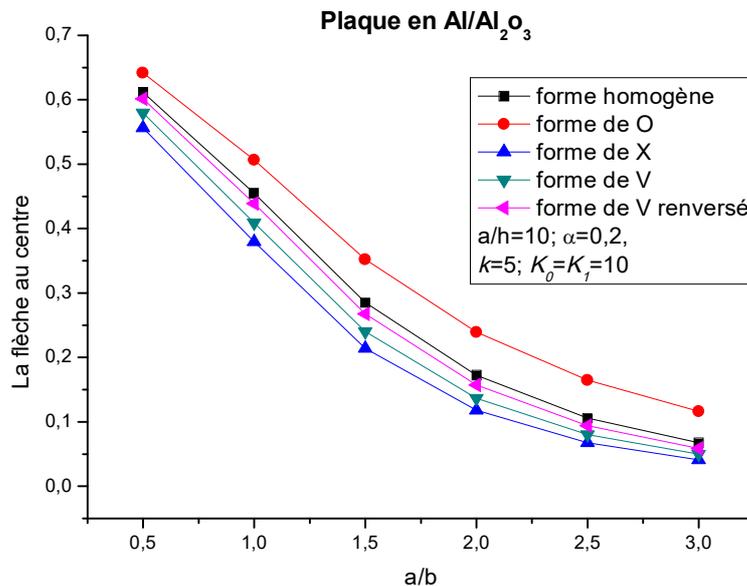


Figure V.2 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie

Les figures V.2 et V.3 présentent l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle en fonction du rapport de géométrie d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. Les paramètres de fondation sont pris égal à $K_0=K_1=10$. Le rapport d'épaisseur est pris égal à $a/h=10$. A partir de ces figures, on peut constater que la flèche

adimensionnelle devient plus faible avec l'augmentation du rapport de géométrie (a/b). On peut également remarquer que la forme de distribution de porosité influe sur la variation de la flèche adimensionnelle en fonction du rapport de géométrie.

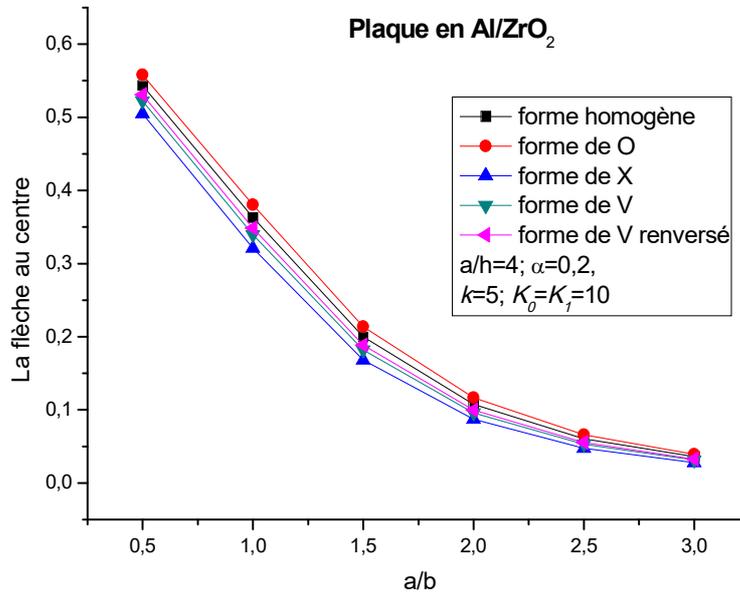


Figure V.3: Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie

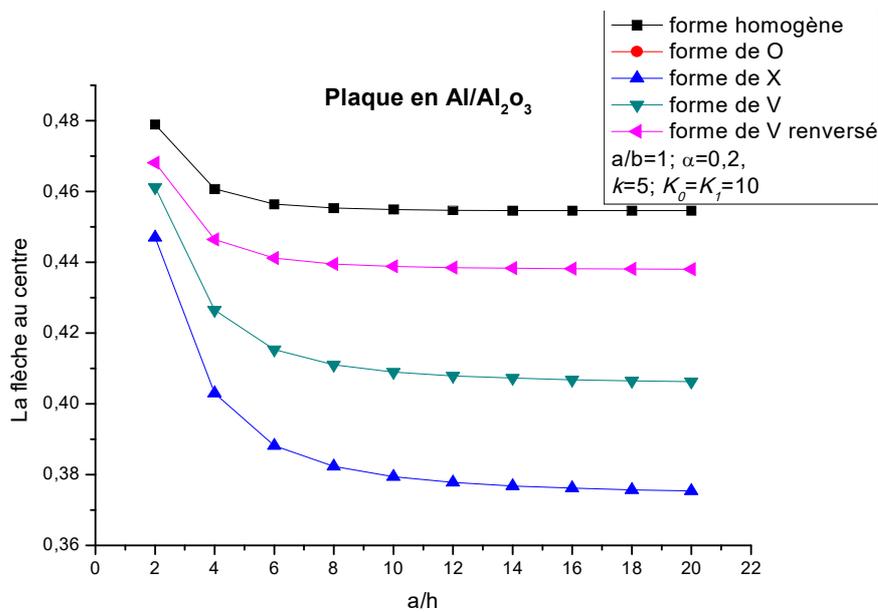


Figure V.4 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur

Les figures V.4 et V.5 montrent l'influence de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique, respectivement. La plaque est considérée de forme carrée (a/b=1). Il est à noter que l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle est plus important avec l'augmentation du rapport d'épaisseur (quand la plaque devient plus mince).

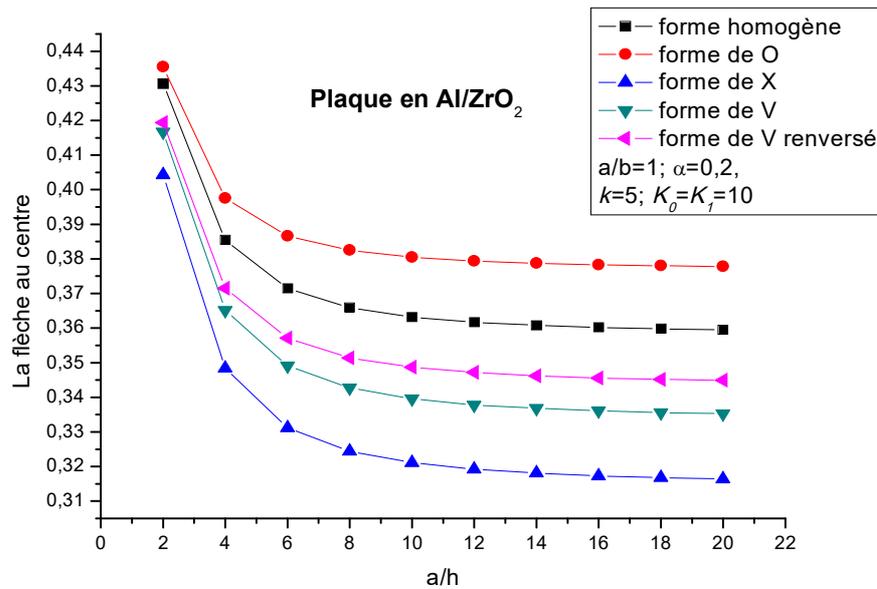


Figure V.5 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur

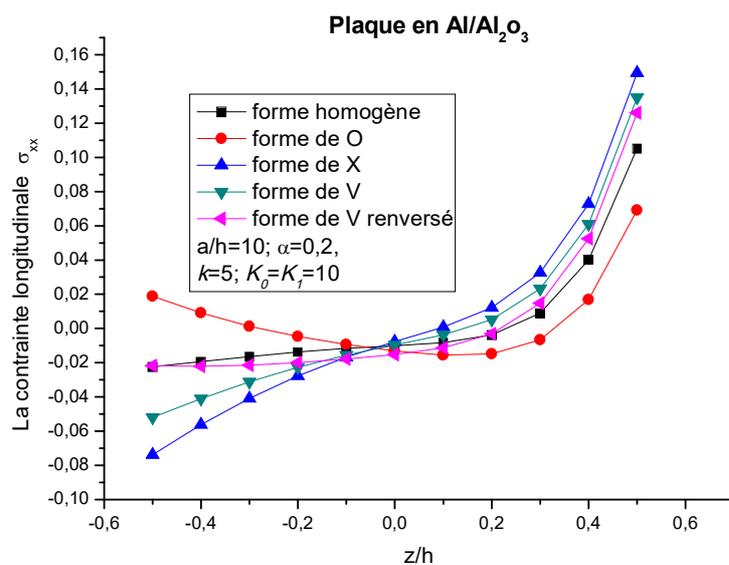


Figure V. 6 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique.

L'effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation de type Winkler-Pasterk est montré dans les figures V.6 et V.7, respectivement. A partir de ces figures, il est clair que la contrainte longitudinale est maximale quand la distribution des pores prend une forme de 'X', est devient minimale lorsque la distribution des pores est de forme de 'O'.

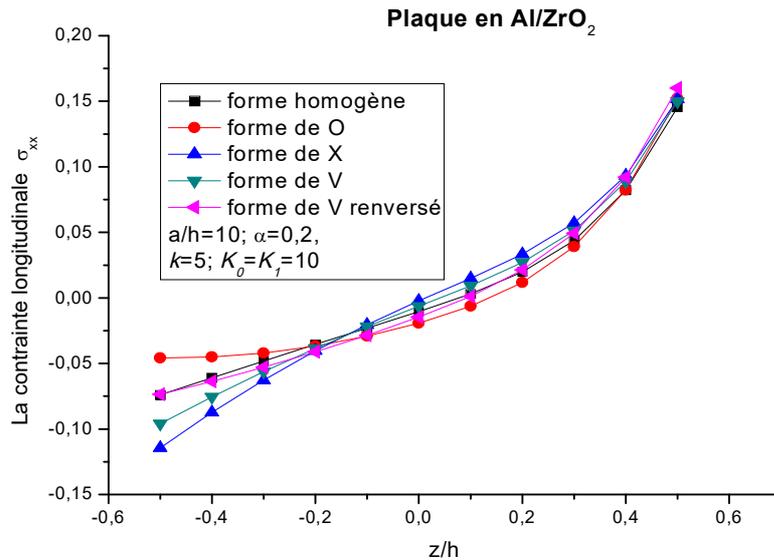


Figure V. 7 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique.

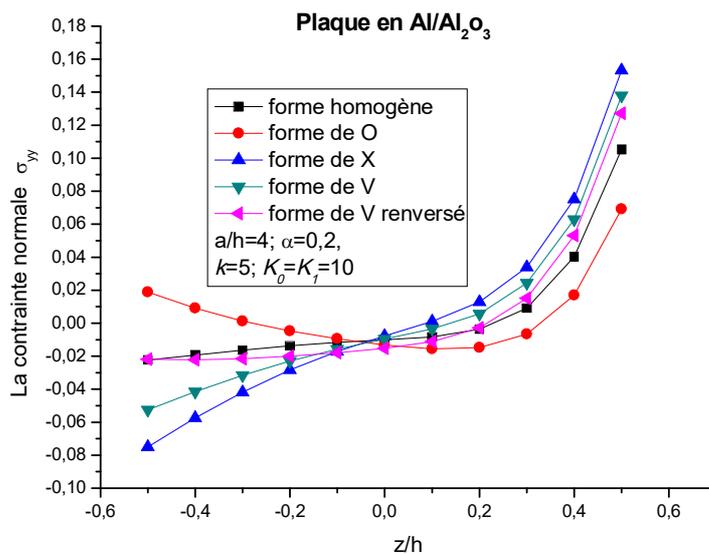


Figure V.8 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique.

Les figures V.8 et V.9 montrent l'influence de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. les paramètres de Winkler et de Pasternak sont pris égal à $K_0=K_1=10$. la fraction volumique de porosité est pris égal à 0.2. selon ces figures, on peut conclure que la contrainte normale est maximale quand la distribution des pores prend une forme de 'X'.

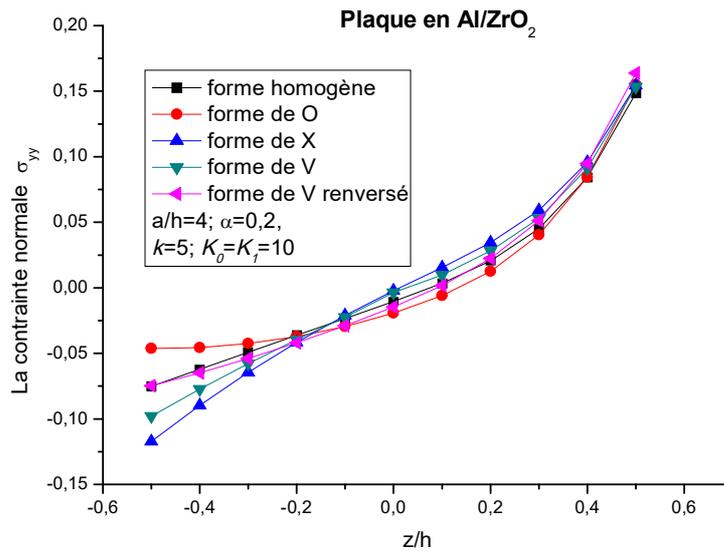


Figure V.9 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique.

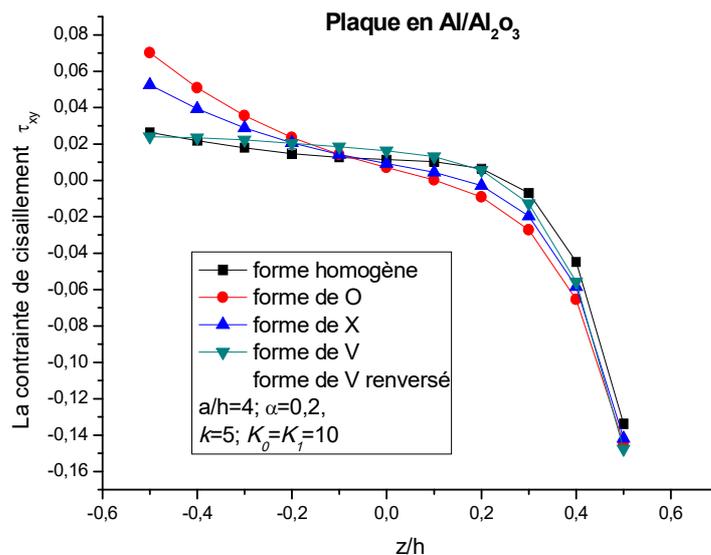


Figure V.10 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique.

Les figures V.10 et V.11 illustrent l'effet de la forme de distribution de porosité sur la variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. l'indice de puissance de la plaque FGM est prise égal $k = 5$ dans ces figures. Il est clair que la forme de distribution de porosité influe sur la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque FGM.

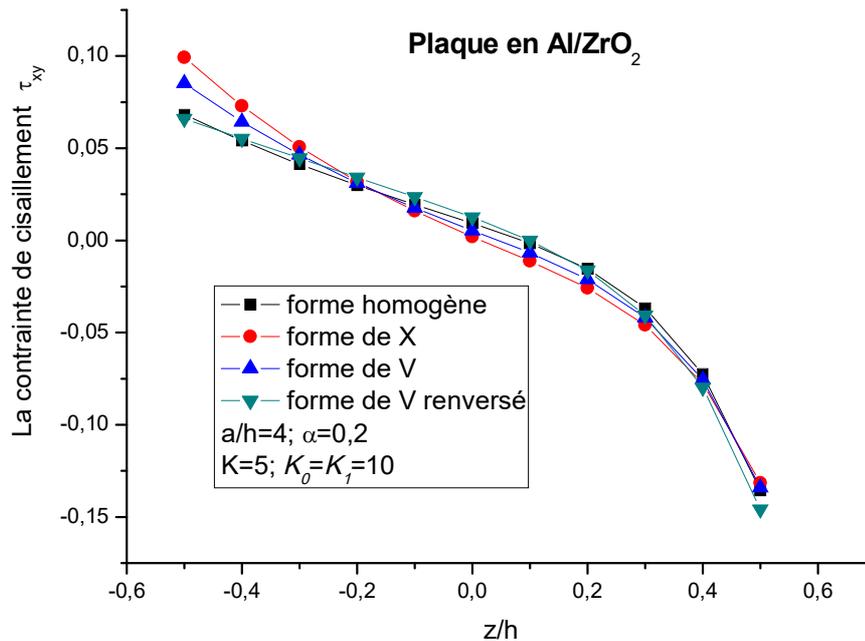


Figure V.11 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique.

V.6.Conclusion :

Une étude approfondie sur l'effet de la forme de distribution de porosité sur la flexion des plaques FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres avec l'effet de cisaillement est présentée. Elle est basée sur l'utilisation de la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement. Les propriétés du matériau sont supposées variées selon la direction de l'épaisseur de la plaque et la règle du mélange qui a été reformulée afin d'évaluer les caractéristiques des matériaux avec les phases et la forme de distribution de porosité. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec des conditions aux limites simplement appuyées. Les conclusions suivantes ont été observées à partir des résultats typiques obtenus pour les différents indices de la

fraction de volume, les rapports de géométrie, les rapports d'épaisseur, les paramètres de rigidité de la fondation et la fraction volumique de porosité:

- L'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle est plus important dans les plaques FGM minces.
- La flèche adimensionnelle devient plus faible avec l'augmentation du rapport de géométrie (a/b).
- La contrainte longitudinale et la contrainte normale sont maximales quand la distribution des pores prend une forme de 'X', est deviennent minimales lorsque la distribution des pores est de forme de 'O'.
- La forme de distribution de porosité influe sur variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque FGM.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Conclusion générale et perspectives :

Les structures en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Dans le cadre de ce travail, nous avons étudié l'effet de la forme de distribution de porosité sur les flèches et les contraintes des plaques FGM reposée sur une fondation élastique en utilisant une théorie raffinée de forme hyperbolique et qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse.

La théorie a pris en considération la distribution parabolique de la déformation de cisaillement transverse et satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans d'utiliser le facteur de correction de cisaillement. Le nombre des inconnues dans la présente théorie est quatre tandis que cinq dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La loi du mélange modifiée couvrant les phases et la forme de distribution de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM imparfaites. L'équation d'équilibre pour les plaques FGM est obtenue par le principe des travaux virtuels. Les propriétés du matériau sont supposées varier selon la direction de l'épaisseur de la plaque et la règle du mélange qui a été reformulée afin d'évaluer les caractéristiques des matériaux avec les phases et la forme de distribution de porosité. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec des conditions aux limites simplement appuyées.

Les résultats qui ont été trouvés dans cette étude ont montrées que la forme de distribution de porosité influe sur la flèche et les contraintes à travers l'épaisseur de la plaque FGM. L'effet des paramètres de fondation sont aussi présentés dans cette investigation sous forme numérique et graphique dans plusieurs combinaisons de matériaux FGM tels qu'Al/Al₂O₃, Al/ZrO₂. Les conclusions suivantes ont été observées à partir des résultats typiques obtenus pour les différents indices de fraction de volume, le rapport de géométrie, le rapport d'épaisseur, les paramètres de rigidité de la fondation et le coefficient de porosité.

- L'effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle est plus important dans les plaques FGM minces.
- La flèche adimensionnelle devient plus faible avec l'augmentation du rapport de géométrie (a/b).
- La contrainte longitudinale et la contrainte normale sont maximales quand la distribution des pores prend une forme de 'X', est deviennent minimales lorsque la distribution des pores est de forme de 'O'.
- La forme de distribution de porosité influe sur variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque FGM.

En perspective à ce travail, nous envisageons d'étudier l'effet de forme de distribution de porosité sur le comportement dynamique des plaques FGM reposée sur une fondation élastique sous la combinaison des différents types de chargement et des conditions aux limites en tenant compte des effets de la température.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Adim. 2013] Adim Belkacem. « comportement mécaniques en flexion des plaques en (matériaux à gradient propriétés) », université IBN Khaldoun Tiaret 2013.
- [Ait Atmane. 2015] Ait Atmane, H. Tounsi, A. and Bernard, F. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. *Int. J. Mech. Mater*, 1-14, 2015.
- [Ait Yahia. 2015] Ait Yahia, S. Ait Atmane, H. Sid Ahmed Houari, M. and Tounsi, A. Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories. *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1143-1165, 2015.
- [Benzaid. 2010] R. Benzaid, H.A.Mesbah, Nasr_eddine Chikh. (2010). Contribution à l'étude des matériaux composites dans le renforcement et la réparation des éléments structuraux linéaires en béton. *Universitaires européennes* pp 27-29
- [Bernard. 2009] Bernard Nayroles. *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS Marseille* Juin 2009.
- [Birman. 2007] Birman V. and Byrd L.W., Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, *Applied Mechanics Reviews*, 60, 195–216, 2007.
- [Chan. 2001] Chan S.H., Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine, *International Journal of Thermal Science*, 40, 255–261. (2001).
- [Cheng. 2000] Cheng, Z. Q. Batra, R. C. Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally the functionally graded plate theories. *Arch Mech*, 52, 143–58, 2000.

- [Daouadji. 2012] Tahar Hassaine Daouadji, Abdeouahed Tounsi , Lazreg Hadji Abdelaziz Hadj Henni, Adda Bedia El Abbes. Theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plates. *Materials Physics and Mechanics* 14 (2012) 110-128.
- [Elomari. 2011] Elomari, Analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable. Thèse de Master 2 de l'université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes 2011.
- [Georges. 2006] Georges Cailletaud. IAE Plaques. Centre des Matériaux Ecole des Mines de Paris/CNRS mai 2006
- [Hadji. 2015a] Hadji, L. and Adda Bedia, E.A. Influence of the porosities on the free vibration of FGM beams. *Wind Struct*, 21(3), 273-287, 2015.
- [Hadji. 2015b] Hadji, L. Hassaine Daouadji, T. and Adda Bedia, E.A. A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities. *Geomech. Eng*, 9(3), 361-372, 2015
- [Hirai. 1999] Hirai T. and Chen L., Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan, *Materials Science Forum*, 308–311, 509–514. (1999).
- [Hosseini-Hashemi. 2010] S. Hosseini-Hashemi, H. Rokni Damavandi Taher, H. Akhavan et M. Omid, «Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory,» *Appl Math Model*, vol. 34, n° 15, p. 1276–91, 2010
- [Hosseini-Hashemi. 2011] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee et S. Atashipour, «A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates,» *Int J Mech Sci*, vol. 53, n° 11, p. 11–22, 2011.
- [Jean. 2011] Jean Michel Génevaux. Théorie des poutres, résistance des matériaux. Engineering School. 2011
- [Jean-Marie. 2010] Jean-Marie Berthelot. Novembre (2010) Mécaniques des matériaux et structures composites. Institut supérieur. Pp 5, 16-20. Mans

- (France).
- [Katsikadelis. 1984] Katsikadelis, J. T. Armenakas, A. E. Plates on elastic foundation by BIE method. *J Eng Mech*, 110(7), 1086–105, 1984.
- [KHETAF. 2013] Khetaf EL Mendil Mimi « flambement des plaques sandwichs formé par matériaux à gradient de propriétés», thèse de master d’université IBN KHALDOUN TIARET 2013.
- [Kirchhoff. 1850] Kirchhoff R. G. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schein. *Journal pour la Reine et Angewandte Mathematik (Crelle)* 1850; 40: 51-55.
- [Laurent. 2008] Laurent Gornet. (2008) Généralités sur les matériaux composites. Engineering school. Pp 1-4.
- [Liu. 2003] Liu L.-S., Zhang Q.-J., and Zhai P.-C., The optimization design of metal=ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method, *Materials Science Forum*, 423–425, 791–796. (2003).
- [Liu. 2000] Liu, F. L. Rectangular thick plates on Winkler foundation: differential quadrature element solution. *Int J Solids Struct*, 37, 1743–63, 2000.
- [Menail. 2009] Menail, Analyse de l’effet du vieillissement à Lair, dans Léau douce et dans Léau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre, thèse de doctorat UBMA naba Menail Younes 2009
- [Mindlin.1951] R. D. Mindlin, «Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 31-38., 1951.
- [Morinaga. 1993] K.Morinaga and K.U.Toto, « Fabricate Thick Alumina-Tungsten FGM Using Slip Cast Method », *Sci.Technol*, p.4, December 1993
- [Paolo. 2007] Paolo Vannucci. (2007). Matériaux composites structuraux : méthodes d’analyse et de conception. Pp 7, 28-37. France
- [Park. 2006] Park, J. S. Kim, J. H. Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates. *Journal of Sound and Vibration*, 289, 77–93, 2006

- [Praveen. 1998] Praveen, G. N. and Reddy, J. N. Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33), 4457-4476, 1998.
- [Reddy. 1984] J. N. Reddy, «A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates,» *ASME J. Appl. Mech*, vol. 51, n° 14, p. 745–752, 1984.
- [Reddy. 1991] J.N.Reddy, *theory and Analysis of Elastic Plates*. Taylor & Francis, Philadelphia 1991
- [Reddy. 1997] J.N.Reddy, *Mechanics of laminated composite plate, theory and Analysis*, CRC, press.Boka Raton, 1997.
- [Reddy. 2007] . N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, Boca Raton: CRC Press, 2007.
- [Reissner.1945] E. Reissner, «The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates,» *J. Appl. Mech*, vol. 12 , pp. 69-77, 1945
- [Tafla. 1997] Tafla, « Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques composites multicouches ».Thèse de Doctorat de l'Université de Reims Champagne-Ardenne 1997.
- [Thai. 2011] Thai, H.T. and Choi, D.H. A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Compos. Sci.Technol.*, 71(16), 1850-1858, 2011.
- [Thai. 2013] H. Thai et S. Kim, «Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation,» *Int J Mech Sci*, vol. 75, p. 34–44, 2013
- [Uemura. 2003] Uemura S., The activities of FGM on new applications, *Materials Science Forum*,423–425, 1–10. (2003).
- [Vijayakumar. 2008] Vijayakumar K. On a sequence of approximate solutions: bending of a simply supported square plate. *International Journal of Advanced Structural Engineering*. 2013;5, article 18 doi: 10.1186/2008-6695-5-18.
- [Vijayakumar. 2011] Vijayakumar K. Modified Kirchhoff's theory of plates including transverse shear deformations.

- Mechanics Research Communications*. 2011;38(3):211–213. doi: 10.1016/j.mechrescom.2011.02.007.
- [Vijayakumar. 2013a] Vijayakumar K. On uniform approximate solutions in bending of symmetric laminates. *CMC: Computers, Materials, & Continua*. 2013;34(1):1–25. doi: 10.3970/cmc.2013.034.001
- [Vijayakumar. 2013b] Vijayakumar K. Poisson’s theory for analysis of bending of isotropic and anisotropic plates. *ISRN Civil Engineering*. 2013;2013:8. doi: 10.1155/2013/562482.562482.
- [Watari. 2004] Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., and Kawasaki T., Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, *Composites Science and Technology*, 64, 893–908. (2004).
- [Wattanasakulpong. 2012] Wattanasakulpong, N. Prusty, B.G. Kelly, D.W. and Hoffman, M. Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation. *Mater. Des*, 36, 182-190, 2012.
- [Wattanasakulpong. 2014] Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities. *Aerosp. Sci. Technol*, 32(1), 111-120, 2014.
- [Yaghoobi. 2013] H. Yaghoobi et P. Yaghoobi, «Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions,» *an analytical approach. Meccanica* , vol. 48, n° 18, p. 2019–35., 2013
- [Yin. 2004] Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H., Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materialia*, 52, 3535– 3543. (2004).