

Introduction

Les lignes de transmission sont à la base des méthodes de télécommunication modernes et transport d'énergie électrique à des milliers de kilomètres.

La modélisation des lignes de transmission est définie comme l'ensemble des relations entre les grandeurs caractéristiques de ces lignes.

Nous allons dans ce chapitre, abordé les caractéristiques électriques et le principe des lignes de transmission, la modélisation des lignes de transmission puis l'étude des équations de propagation dans le domaine fréquentiel puis temporel. Puisque le câble sur lequel nous allons travailler est un câble sans perte, alors nous allons détailler les grandeurs caractéristiques d'une ligne de transmission sans perte et, démontrer les expressions de ces grandeurs dans le domaine fréquentiel.

Nous allons ensuite aborder les phénomènes de limitation des ondes électromagnétiques dans les lignes de transmission, à savoir les phénomènes d'atténuation et de dispersion.

Finalement nous évoquerons les types de discontinuités dans les lignes de transmission ainsi que le coefficient de réflexion correspondant à chaque cas.

2.1. Description d'une ligne de transmission

Les lignes usuelles sont uniformes (du moins théoriquement) c'est-à-dire que leur configuration électromagnétique transverse est indépendante de la coordonnée de l'axe de propagation.

Il est démontré dans [16] qu'une ligne de transmission est susceptible de guider un grand nombre d'ondes de configuration électromagnétique différente. La plupart des lignes de transmission ne sont cependant utilisées que dans une gamme de fréquence telle que seule une configuration particulière peut se propager. Au chapitre 6 de [16], on regroupe les ondes en trois classes :

- Les ondes transverses électromagnétiques dont les champs électriques et magnétiques sont entièrement transverses. Les composantes longitudinales de ces champs sont donc nulles. On les appelle souvent des ondes TEM.
- Les ondes transverses électriques où seul le champ électrique est purement transverse. Le champ magnétique a donc une composante longitudinale non nulle. Ce sont les ondes TE.
- Les ondes transverses magnétiques où seul le champ magnétique est purement transverse. Le champ électrique a donc une composante longitudinale non nulle. Ce sont les ondes TM [16].

La théorie des lignes de transmission se base d'une part sur le type d'onde transverse qui se propage dans la ligne et stipule que le mode de propagation dans une ligne de transmission est considéré comme quasi T.E.M (onde transverse électromagnétique) le long du câble [2].

Par contre, en ce qui concerne les lignes non uniformes, leur théorie est notablement plus difficile à établir et est évoquée dans [24].

Ce sont ici, les lignes de transmission uniformes que nous allons considérer tout au long de ce travail. Donc par abus de langage nous allons désigner « ligne de transmission uniforme » simplement par « ligne de transmission ».

2.2. Principe des lignes de transmission et caractéristiques électriques

Une ligne de transmission est une structure comprenant au minimum deux conducteurs (dont l'un est le conducteur de référence) acheminant de concert un signal électrique et dont la géométrie transversale est uniforme sur toute la longueur. Elle est modélisée par le schéma ci-dessous.

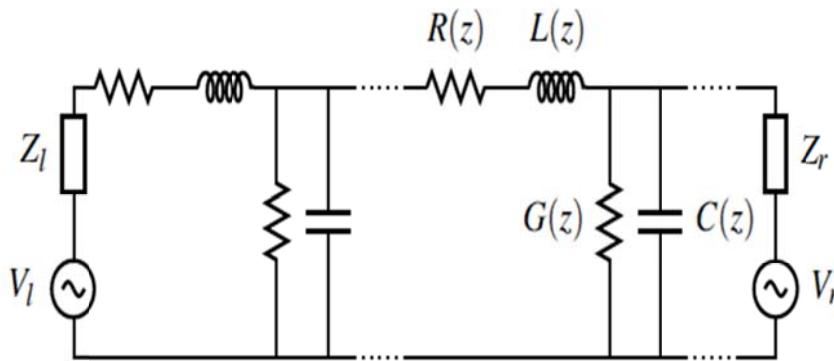


Figure II.1 - Ligne de transmission alimentée par une source V_l d'impédance interne Z_l débitant sur une charge V_r d'impédance Z_r [13].

A faible fréquence (1 à 200 Hz), lorsque la longueur d'onde λ est supérieure à la longueur de la ligne de transmission l , l'onde est quasiment constante en tout point de la ligne, quelle que soit l'impédance de charge. Dans ce cas, il est inutile ici d'introduire la notion de propagation. En revanche, si la longueur d'onde λ devient inférieure à la longueur de la ligne l , l'amplitude de l'onde n'est plus constante tout au long de la ligne, et présente des minima et maxima régulièrement espacés. Dans ce cas, il faut donc tenir compte du phénomène de propagation. Pour modéliser ce phénomène, il faut faire appel à la théorie de la propagation des ondes électromagnétiques que nous allons rappeler.

La théorie des lignes de transmission dépend de différentes hypothèses fondamentales :

- Les conducteurs ont une forme géométrique uniforme, d'une longueur l et d'une section S . Les conducteurs et le conducteur de référence sont immergés dans un seul et unique milieu diélectrique homogène et isotrope.

- Le mode de propagation d'une onde, le long de la ligne est considéré transverse électromagnétique c'est-à-dire que toutes les dimensions transversale et sagittale (diamètre

des conducteurs, hauteurs, espacements entre conducteurs) sont faibles devant la longueur d'onde λ [2].

Une ligne de transmission est caractérisée par des constantes dites linéiques ou réparties telles que:

L : L'inductance linéique dépend du diamètre des conducteurs, de l'écart entre les deux conducteurs (ou le conducteur et le plan de masse) et de la perméabilité de l'âme conductrice du câble et elle s'exprime en Henry/mètre (H/m).

C : La capacité linéique dépend de la permittivité du milieu diélectrique, du diamètre des conducteurs, de l'écart entre les deux conducteurs et elle s'exprime en Farad/mètre (F/m).

R : Généralement très faible, la résistance linéique modélise l'effet de Joule qui représente les pertes ohmiques dans le conducteur. Elle dépend des diamètres des conducteurs et de la résistivité de l'âme conductrice des câbles et elle s'exprime en ohms/mètre (Ω/m).

G : La conductance linéique représente les pertes dues à l'imperfection de la matière diélectrique. Elle dépend de la capacité linéique et de l'angle du diélectrique et elle s'exprime en Siemens/mètre (S/m) [2].

Les lignes de transmission sont des systèmes à paramètres répartis, c'est-à-dire que les grandeurs physiques R , L , C et G sont réparties sur toute la longueur de la ligne [1].

Le schéma suivant nous montre trois figures géométriques faisant office de trois types de câbles et le calcul de leurs constantes linéiques C et L .

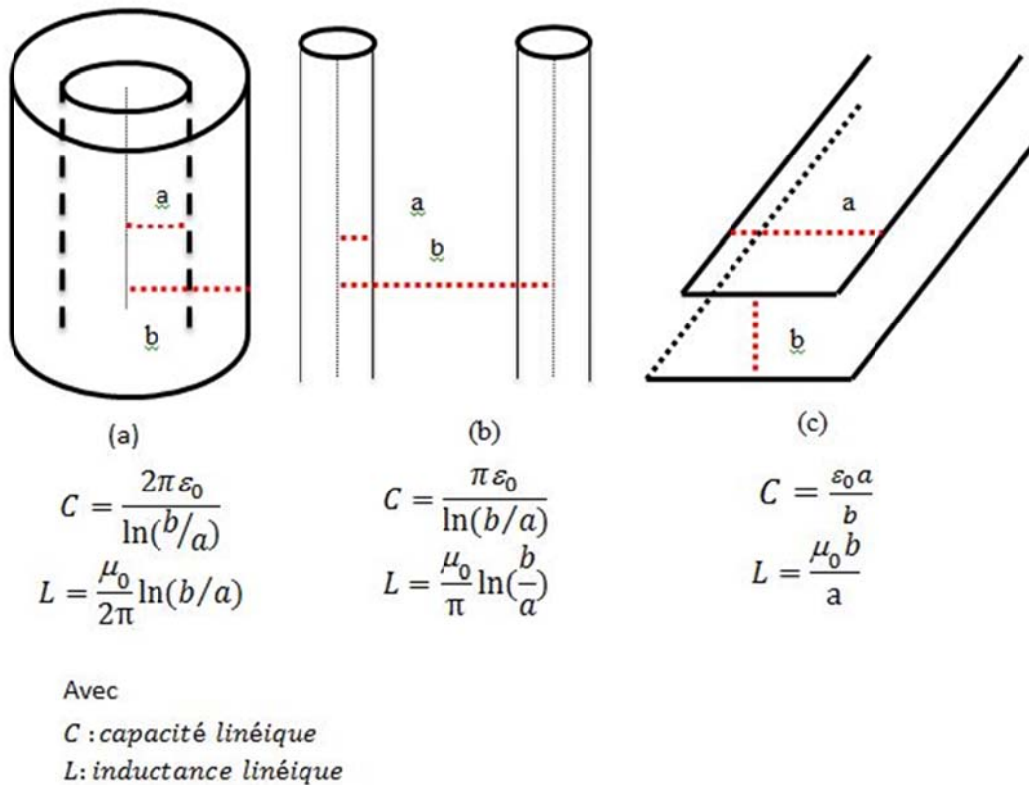


Figure II.2 - Caractéristiques géométriques de différentes lignes de transmission avec leurs constantes réparties C et L (en prenant les propriétés électriques ε_0 et magnétiques μ_0 du vide): (a) câble coaxial, (b) ligne bifilaire, (c) ligne à rubans [17].

2.3. Modélisation d'une ligne de transmission

La façon dont se propagent les signaux dans une ligne de transmission dépend des caractéristiques physiques de celle-ci. Ces caractéristiques dépendent en grande partie, de la longueur de la ligne et des singularités et peuvent correspondre à des défauts (court-circuits et circuits ouverts).

Le comportement « électrique » de la ligne peut donc apporter des informations sur ces défauts. Donc il est important d'établir le lien entre la réponse « électrique » d'une ligne et les caractéristiques des défauts présents. D'où l'importance de la modélisation des lignes de transmission.

2.3.1. Modèle à constantes réparties pour une ligne monofilaire

Une ligne de transmission monofilaire est une ligne composée uniquement d'un fil et d'un conducteur de référence (fil ou plan de masse) séparés par un diélectrique.

Le modèle équivalent de la ligne appelé ligne à constantes réparties, dont chaque élément de longueur dx est caractérisé par quatre paramètres R , L , G et C dont la détermination dépend de la forme et de la composition du conducteur est décrit par le schéma ci-dessous (**Figure II.3**).

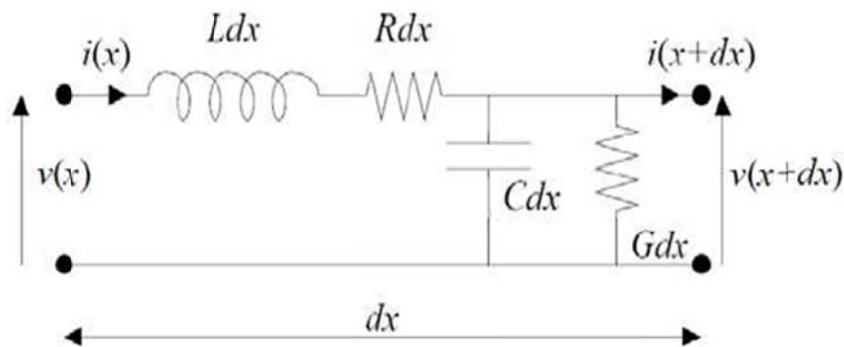


Figure II.3 - Modèle à constante répartie d'une ligne de transmission telle que dx est une longueur infinitésimale [3].

En considérant que dx est une longueur infinitésimale, et que par conséquent les variations de $v(x)$ et $v(x + dx)$ en fonction du temps t sont identiques, l'écriture des équations de Kirchhoff donne à partir du circuit de (**Figure II.3**) :

$$\text{Loi des mailles : } v(x + dx, t) = v(x, t) - \left(Rdx \cdot i(x, t) + Ldx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \right) \quad (2.1)$$

$$\text{Loi des nœuds : } i(x + dx, t) = i(x, t) - \left(Gdx \cdot v(x, t) + Cdx \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right) \quad (2.2)$$

Appliquons la relation différentielle (dérivées partielles) sur les équations (2.1) et (2.2), nous obtenons :

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -Ri(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

De même :

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -Gv(x, t) - C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

Ces deux équations sont les **équations des télégraphistes**.

En dérivant la première équation (2.3) par rapport à la variable x pour faire apparaître le terme $\partial i(x, t)/\partial x$, et en remplaçant l'expression $\partial i(x, t)/\partial x$ dans (2.3), nous aboutissons à une autre formulation des équations des télégraphistes :

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + RGv(x, t) \quad (2.5)$$

On démontre de la même manière que :

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + RGi(x, t) \quad (2.6)$$

2.3.2. Modèle à constantes réparties pour une ligne multifilaire

Ici nous nous intéressons à une ligne de transmission de longueur l constituée de $(n + 1)$ conducteurs (n conducteurs + un conducteur de référence). Nous modélisons le système sous forme de tronçons de taille infinitésimale dx (comme le cas d'une ligne de transmission monofilaire), caractérisés par leurs paramètres linéiques : résistance R_{ii} , inductance L_{ii} , capacité C_{ii} et conductance G_{ii} (i désignant l'indice du conducteur). Le couplage entre deux lignes est également caractérisé par les constantes linéiques : capacité de couplage C_{ij} , conductance G_{ij} , inductance mutuelle L_{ij} qui représente les pertes de couplage.

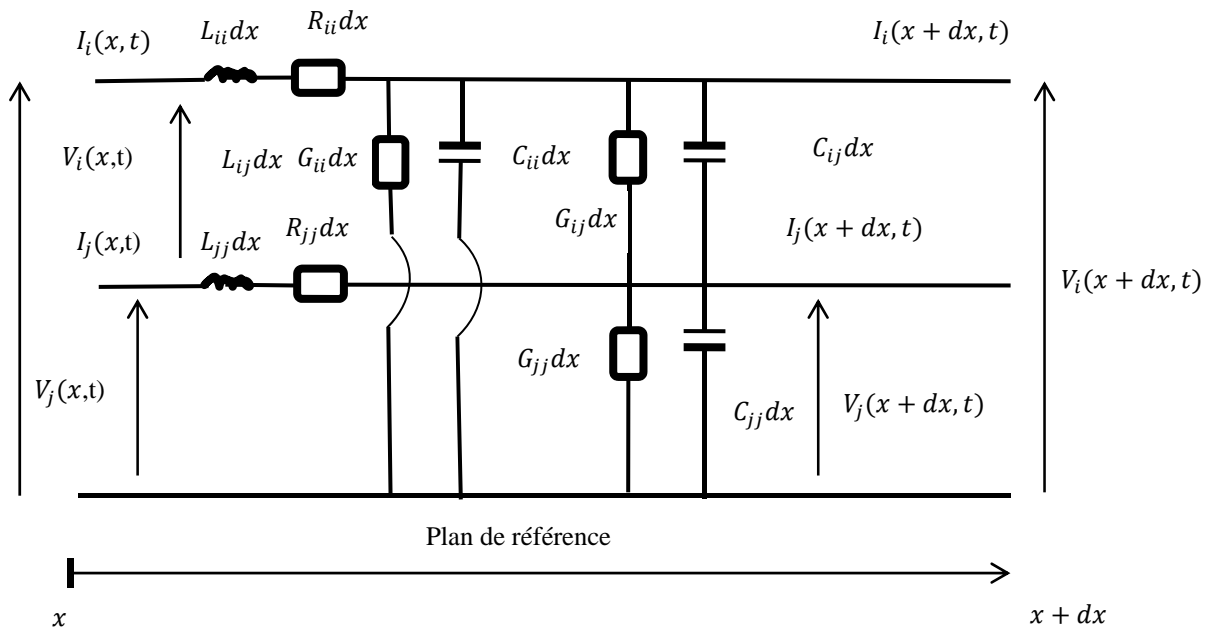


Figure II.4 - Modèle à constantes réparties d'une ligne multifilaire, d'une longueur infinitésimale composée de deux conducteurs et un plan de référence.

Le modèle équivalent utilisé pour la ligne multifilaire est représenté dans (**Figure II.4**). Dans le cas d'une ligne de transmission multifilaire, les équations de Kirchhoff en tension et en courant pour une ligne de transmission multifilaire sont sous forme matricielle. Avant de rappeler ces équations, nous allons d'abord définir les matrices suivantes:

$$v(x, t) = \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ \vdots \\ v_n(x, t) \end{pmatrix} \quad i(x, t) = \begin{pmatrix} i_1(x, t) \\ \vdots \\ i_n(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$R = \text{diag}(R_{11}, \dots, R_{nn}) \quad (2.8)$$

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n C_{1k} & -C_{12} & \cdots & -C_{1n} \\ C_{21} & \sum_{k=1}^n C_{2k} & \cdots & -C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_{n1} & -C_{n2} & \cdots & \sum_{k=1}^n C_{nk} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$G = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n G_{1k} & -G_{12} & \cdots & -G_{1n} \\ G_{21} & \sum_{k=1}^n G_{2k} & \cdots & -G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{n1} & -G_{n2} & \cdots & \sum_{k=1}^n G_{nk} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Les équations des télégraphistes en tension et en courant peuvent donc s'écrire sous une forme matricielle :

$$\frac{\partial[v(x, t)]}{\partial x} = -[R][i(x, t)] - [L] \cdot \frac{\partial[i(x, t)]}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial[i(x, t)]}{\partial x} = -[G][v(x, t)] - [C] \cdot \frac{\partial[v(x, t)]}{\partial t} \quad (2.13)$$

2.4. Etude des lignes et équations de propagation

2.4.1. Ligne dans le domaine fréquentiel

a. Cas d'une ligne avec pertes

Coefficient de propagation

En régime harmonique, il est possible d'exprimer le courant et la tension le long d'un câble de longueur l sous la forme :

$$v(x, t) = V(x, \omega)e^{j\omega t} \quad (2.14)$$

$$i(x, t) = I(x, \omega)e^{j\omega t} \quad (2.15)$$

où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation exprimée en rad.s^{-1} et $x \in [0, l]$ est coordonnée longitudinale.

$V(x, \omega)$ et $I(x, \omega)$ sont les amplitudes complexes associées à la tension $v(x, t)$ et au courant $i(x, t)$ respectivement. En remplaçant $v(x, t)$ et $i(x, t)$ par leur grandeur complexe associée dans les équations (2.5) et (2.6) nous éliminons le facteur $e^{j\omega t}$. Toute dérivée par rapport au temps d/dt se transforme par une multiplication par $j\omega$. Dans ce cas les équations des télégraphistes deviennent alors :

$$\frac{\partial^2 V(x, \omega)}{\partial x^2} = Z(\omega)Y(\omega)V(x, \omega) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 I(x, \omega)}{\partial x^2} = Z(\omega)Y(\omega)I(x, \omega) \quad (2.17)$$

Où $Z(\omega) = R + jL\omega$ est l'impédance série de la ligne et $Y(\omega) = G + jC\omega$ est son l'admittance parallèle.

L'équation (2.21) s'écrit aussi sous la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 V(x, \omega)}{\partial x^2} = \gamma^2(\omega)V(x) \quad (2.18)$$

Où $\gamma(\omega)$ représente le coefficient linéique de propagation tel que :

$$\gamma(\omega) = \sqrt{Z(\omega)Y(\omega)} \quad (2.19)$$

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)} \quad (2.20)$$

La coefficient de propagation s'écrit aussi en fonction de α et β , que nous nommons respectivement « coefficient d'atténuation » et « coefficient de phase » de la façon suivante :

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \quad (2.21)$$

Le terme α provoquera une atténuation de l'amplitude du signal lors de sa propagation dans la ligne. En revanche le terme $j\beta$ provoquera une rotation de la phase du signal le long de la

ligne. Le coefficient de propagation peut être calculé expérimentalement de deux méthodes différentes [2].

b. Cas d'une ligne sans perte

Il est souvent fait dans la pratique, l'approximation d'avoir une résistance linéique R et une conductance linéique G nulles sur les lignes (fuites diélectriques et pertes dans le métal négligeables).

Une ligne est sans perte si les conducteurs électriques sont parfaits et s'ils sont placés dans un milieu sans perte [16].

Avec cette approximation, la ligne est considérée sans perte ou à très faibles pertes ($R \approx G \approx 0$). Ceci reste valide jusqu'à une certaine fréquence de travail. Avec ces approximations, les équations se simplifient et les équations différentielles deviennent :

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -L \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.23)$$

Les équations des télégraphistes s'écrivent:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

Vitesse de propagation

Les équations précédentes (2.24) et (2.25) impliquent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

On montre ainsi que les lignes sans perte ont leurs caractéristiques électriques (tension et courant) régies par l'équation de d'Alembert [16] dans laquelle la vitesse vaut :

$$\frac{1}{v^2} = LC$$
$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \text{ avec } v = c = c_0 \quad (2.27)$$

Un signal électrique se propage donc dans une ligne de transmission sans perte sous forme d'onde de tension et de courant se déplaçant à la vitesse de la lumière.

Notons que si le matériau entre les conducteurs possède des propriétés diélectriques caractérisées par sa permittivité relative ε_r alors ε_0 est remplacé par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$, alors la vitesse de propagation de signaux appelée aussi vitesse de phase le long de la ligne devient :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} [m. s^{-1}] \quad (2.28)$$

Impédance caractéristique

L'impédance caractéristique Z_c (ou impédance image) est la limite vers laquelle tend l'impédance d'entrée d'une ligne infiniment longue, c'est-à-dire une ligne dans laquelle un signal se propage sans jamais être réfléchi vers l'entrée. Alors, en tout point de cette ligne infinie, le rapport de la tension et de l'intensité vaut l'impédance caractéristique de la ligne :

$$Z_c(\omega) = \frac{V(x, \omega)}{I(x, \omega)} = \sqrt{\frac{Z(\omega)}{Y(\omega)}} [\Omega] \quad (2.29)$$

En effet, considérons une ligne de transmission sans perte dans laquelle se propage un signal électrique de fréquence f ($\omega = 2\pi f$) :

$$\begin{cases} v(x, t) = V(x, \omega)e^{j\omega t} \\ i(x, t) = I(x, \omega)e^{j\omega t} \end{cases}$$

Où $V(x, \omega)$ et $I(x, \omega)$ représentent respectivement les amplitudes complexes de la tension et du courant à la position x .

L'équation des télégraphistes en tension donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 V(x, \omega)}{\partial x^2} e^{j\omega t} - LC(j\omega)^2 V(x, \omega) e^{j\omega t} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 V(x, \omega)}{\partial x^2} - LC(j\omega)^2 V(x, \omega) &= 0\end{aligned}$$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle s'écrit :

$$r^2 - LC(j\omega)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm j\omega\sqrt{LC} = \pm j\frac{\omega}{v} \text{ qui aboutit à la solution :}$$

$$V(x, \omega) = V_i e^{-j\frac{\omega}{v}x} + V_r e^{+j\frac{\omega}{v}x}$$

$$\text{soit } v(x, t) = V_i e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v}x)} + V_r e^{+j(\omega t + \frac{\omega}{v}x)}$$

On obtient donc comme solution générale de la tension, la somme de deux ondes qui se propagent en sens opposés.

Si on utilise cette solution dans l'équation (2.39) sans perte ($R = 0$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} &= -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial (V_i e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v}x)} + V_r e^{+j(\omega t + \frac{\omega}{v}x)})}{\partial x} &= -L \frac{\partial I(x, \omega) e^{j\omega t}}{\partial t} \\ V_i \left(-\frac{j\omega}{v}\right) e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v}x)} + V_r \left(\frac{j\omega}{v}\right) e^{+j(\omega t + \frac{\omega}{v}x)} &= -L(j\omega) I(x, \omega) e^{j\omega t}\end{aligned}$$

Il en découle la solution pour le courant :

$$I(x, \omega) e^{j\omega t} = \frac{1}{Lv} (V_i e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v}x)} - V_r e^{+j(\omega t + \frac{\omega}{v}x)})$$

$$i(x, t) = \frac{1}{Lv} (V_i e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v}x)} - V_r e^{+j(\omega t + \frac{\omega}{v}x)})$$

$$\text{Or } C = \frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{v^2} = CL$$

$$\text{donc } i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} (V_i e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v}x)} + V_r e^{+j(\omega t + \frac{\omega}{v}x)})$$

Mais comme courant et tension sont liés via une impédance $u = Zi$ on peut, par identification déduire le terme facteur qui représente l'impédance caractéristique de la ligne de transmission :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.30}$$

Notons que pour l'onde incidente (u_i et i_i correspondant à $\omega t - \frac{\omega}{v}x$) se propageant suivant les x positifs, on a bien $u_i = Z_i i_i$. Par contre, pour l'onde réfléchie (u_i et i_i correspondant à $\omega t + \frac{\omega}{v}x$) se propageant suivant les x négatifs, on a $u_i = -Z_i i_i$. Le signe (-) est lié au choix de la convention utilisée pour définir le sens du courant, c'est-à-dire lorsqu'il se déplace dans le sens des x positifs ; ce qui signifie que le courant associé à l'onde réfléchie est négatif.

Le schéma ci-dessous (**Figure II.5**) représente les variations de l'impédance caractéristique d'une ligne réelle en fonction de la pulsation. Nous remarquons qu'en haute fréquence (pulsation tendant vers l'infini) les deux paramètres linéiques R et G sont négligeables devant les deux paramètres L et C .

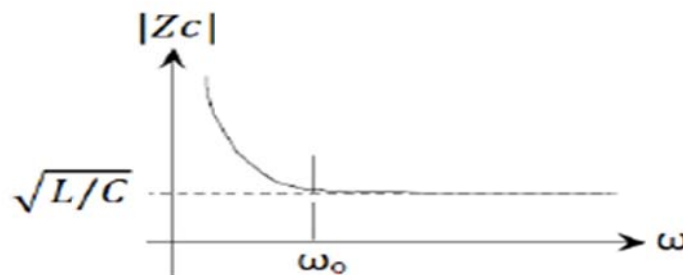


Figure II.5 - Variation de V_c en fonction de la pulsation ω .

Remarque : Au cas où, les données fournies par les fabricants par rapport aux caractéristiques de la ligne ont été perdues, l'impédance caractéristique peut être calculée expérimentalement (voir dans l'annexe du document [2]) en mesurant à l'entrée de la ligne, son impédance en court-circuit Z_{cc} et son impédance en circuit ouvert Z_{co} par l'équation suivante:

$$Z_c(\omega) = \sqrt{Z_{cc}(\omega)Z_{co}(\omega)} \quad (2.31)$$

L'admittance caractéristique

$$Y_c = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (2.32)$$

Remarque : l'impédance caractéristique (respectivement l'admittance caractéristique) en haute fréquence coïncide avec l'impédance caractéristique (respectivement l'admittance caractéristique) d'une ligne sans perte.

Coefficient de réflexion

L'existence d'une onde réfléchie sur une ligne peut s'expliquer par la présence d'une discontinuité dans les caractéristiques de la ligne ou si la ligne est chargée par une impédance. Ce paramètre est très important dans le principe de la réflectométrie. Par exemple si une ligne uniforme d'impédance caractéristique Z_c est chargée par une impédance Z_l , l'onde incidente sera réfléchie au niveau de la charge. Afin de quantifier cette réflexion, nous définissons le coefficient de réflexion, qui dépend bien sûr de la position sur la ligne comme étant l'amplitude complexe de l'onde réfléchie rapportée à celle de l'onde incidente :

$$\Gamma_r(x) = \frac{V_{réfléchie}}{V_{incident}} = \frac{V_0^- e^{\gamma x}}{V_0^+ e^{-\gamma x}} = \rho(x) e^{j\theta(x)} \quad (2.33)$$

L'argument de $\Gamma_r(x)$ noté $\theta(x)$ est le déphasage de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente.

Si la ligne est fermée sur une impédance complexe Z quelconque en $x = x_0$ (**Figure II.6**) alors on peut écrire la loi d'Ohm à ses bornes :

$$u(x_0, t) = Zi(x_0, t).$$

Pour la tension et le courant, écrivons maintenant en termes d'ondes incidentes (u_i, i_i) et réfléchie (u_r, i_r) :

$$\begin{cases} u(x, t) = u_i(x, t) + u_r(x, t) \\ i(x, t) = \frac{1}{Z_c} (i_i(x, t) + i_r(x, t)) \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} u_i(x, t) = V_i e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v}x)} \\ u_r(x, t) = V_r e^{+j(\omega t + \frac{\omega}{v}x)} \end{cases}$$

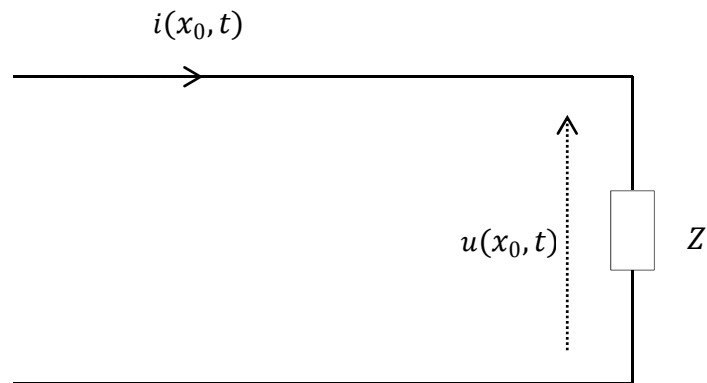


Figure II.6 - Fermeture d'une ligne de transmission à son extrémité $x = x_0$ par une impédance Z .

On définit alors les coefficients de réflexion en tension (ρ_U) et en courant (ρ_I) par le rapport de l'onde réfléchie sur l'onde incidente au niveau de l'impédance terminale :

$$\rho_U = \frac{u_r(x_0, t)}{u_i(x_0, t)} \text{ et } \rho_I = \frac{i_r(x_0, t)}{i_i(x_0, t)}$$

Afin d'évaluer ces rapports, développons la loi d'Ohm écrite aux bornes de Z :

$$u_i(x_0, t) + u_r(x_0, t) = \frac{Z}{Z_c} [u_i(x_0, t) - u_r(x_0, t)]$$

$$\Rightarrow Z_c \left[1 + \frac{u_r(x_0, t)}{u_i(x_0, t)} \right] = Z \left[1 - \frac{u_r(x_0, t)}{u_i(x_0, t)} \right]$$

$$\text{soit } \frac{u_r(x_0, t)}{u_i(x_0, t)} = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c}$$

$$\text{donc } \rho_U = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c}$$

Pour le courant, on utilise les relations entre ondes de tension et ondes de courant, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{i_r(x_0, t)}{i_i(x_0, t)} &= \frac{-u_r(x_0, t)/Z_c}{u_i(x_0, t)/Z_c} \\ &= -\frac{u_r(x_0, t)}{u_i(x_0, t)} \end{aligned}$$

Pour résumer, les coefficients de réflexion prennent la forme :

$$\rho_U = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} = -\rho_I$$

Adaptation d'impédance

Afin d'éviter toute réflexion d'onde dans une ligne de transmission, c'est-à-dire avoir les coefficients de réflexion nuls, il faut qu'il y ait adaptation en bout de ligne :

$$Z = Z_c$$

Si la ligne est ouverte (impédance infinie $\Rightarrow Z_c \rightarrow \infty$), on a réflexion totale avec inversion de l'amplitude du courant :

$$\rho_U = 1 \quad \text{et} \quad \rho_I = -1$$

Si au contraire la ligne est court-circuitée (impédance nulle $\Rightarrow Z_c = 0$), il y a réflexion totale avec inversion de l'amplitude de la tension :

$$\rho_U = -1 \quad \text{et} \quad \rho_I = 1$$

Coefficient de propagation

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(R + jL\omega)(G + jC\omega)}$$

Si $R = G = 0$ alors

$$\gamma(\omega) = \sqrt{(jL\omega)(jC\omega)} = j\omega\sqrt{LC} \quad (2.34)$$

Longueur d'onde

Puisque d'autre part $\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$ donc par indentification $\beta = \omega\sqrt{LC}$ et

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} \quad (2.35)$$

2.4.2. Ligne dans le domaine temporel

Les solutions du système d'équations différentielles montrent qu'il existe deux ondes qui se propagent dans la ligne de transmission à la vitesse v_p . Une onde se propageant vers les x positifs et une onde se propageant vers les x négatifs. L'onde se propageant vers les x positifs se nomme l'onde incidente $V^+(x, t)$ et l'onde se propageant vers les x négatifs se nomme l'onde réfléchie $V^-(x, t)$. La superposition de ces deux ondes forme une onde stationnaire.

$$V(x, t) = V^+(x - v_p t) + V^-(x + v_p t) \quad (2.36)$$

$$I(x, t) = I^+(x - v_p t) + I^-(x + v_p t) \quad (2.37)$$

Si une onde se propage à la vitesse v_p dans une ligne de transmission homogène de longueur l , elle mettra un temps $\tau = l/v_p$ pour se propager d'une extrémité à l'autre.

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour la résolution des équations de propagation dans le domaine temporel. Parmi ces méthodes, nous présentons la solution graphique.

Solution graphique

On considère une ligne de transmission sans perte (**Figure II.7**) de longueur l , d'impédance caractéristique Z_c , excitée par un générateur $V_G(t)$ d'impédance Z_G et chargée par une impédance Z_l .

Les ondes incidente et réfléchie sont reliées à la charge ($x = l$) par la relation du coefficient de réflexion Γ_l . Γ_G est le coefficient de réflexion au niveau de la source.

$$\Gamma_l = \frac{V^-\left(t + \frac{l}{v_p}\right)}{V^+\left(t - \frac{l}{v_p}\right)} = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c} \quad \text{et} \quad \Gamma_G = \frac{Z_G - Z_c}{Z_G + Z_c} \quad (2.38)$$

Par conséquent, l'onde réfléchie au niveau de la charge peut s'écrire en fonction de l'onde incidente et du coefficient de réflexion.

$$V^-\left(t + \frac{l}{v_p}\right) = \Gamma_l V^+\left(t - \frac{l}{v_p}\right) \quad (2.39)$$

Ça sera la même chose pour le courant mais avec un signe opposé :

$$I^-\left(t - \frac{l}{v_p}\right) = -\Gamma_l I^+\left(t - \frac{l}{v_p}\right) \quad (2.40)$$

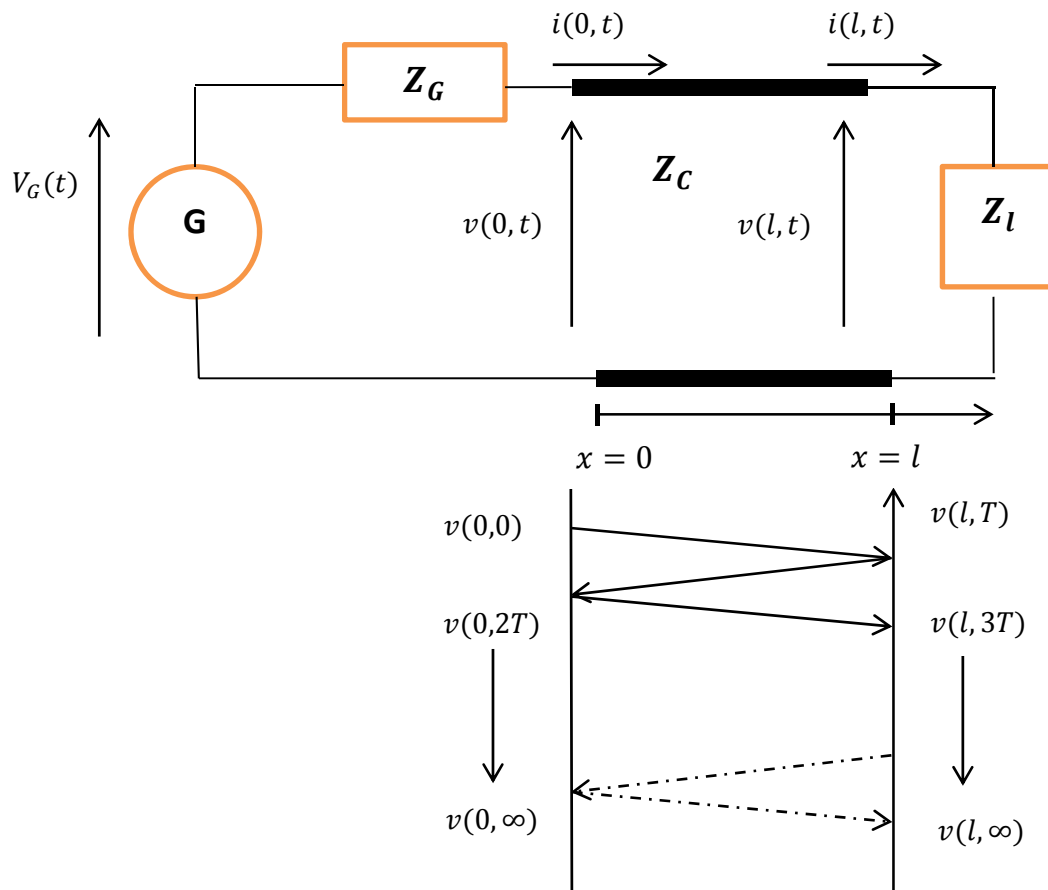


Figure II.7 - Onde de tension et de courant se propageant sur une ligne uniforme sans pertes de longueur finie [3].

Prenons l'exemple d'une onde incidente qui se propage sur la ligne; elle va mettre un temps T pour se réfléchir au niveau de la charge Z_C et le même temps pour retourner et arriver à la source.

Donc pour $0 < t < 2l/v_p$ avec $2l/v_p = 2T$, l'onde réfléchi n'a pas encore atteint le point $x = 0$.

$$V(x = 0, t) = V^+ \left(t - \frac{0}{v_p} \right) \quad I(0, t) = I^+ \left(t - \frac{0}{v_p} \right) = \frac{V^+ \left(t - \frac{0}{v_p} \right)}{Z_G} \quad (2.41)$$

À n'importe quels temps t et position x sur la ligne, l'onde de tension (ou de courant) est la somme des ondes de tension (ou de courant) existant sur la ligne. La solution exacte pour n'importe quelle forme d'onde d'excitation $V_G(t)$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$v(0, t) = \frac{Z_c}{Z_c + Z_G} [V_G(t) + (1 + \Gamma_G)\Gamma_l V_G(t - 2T) + (1 + \Gamma_G)(\Gamma_l \Gamma_G)\Gamma_l V_G(t - 4T) + (1 + \Gamma_G)(\Gamma_l \Gamma_G)^2 \Gamma_l V_G(t - 6T) + \dots] \quad (2.42)$$

$$v(l, t) = \frac{Z_c}{Z_c + Z_G} [(1 + \Gamma_G)V_G(t - T) + (1 + \Gamma_G)(\Gamma_G \Gamma_l)(\Gamma_l \Gamma_G)(t - 3T) + (1 + \Gamma_G)(\Gamma_G \Gamma_l)^2 \Gamma_l V_G(t - 5T) + (1 + \Gamma_G)(\Gamma_G \Gamma_l)^3 \Gamma_l V_G(t - 7T) + \dots] \quad (2.43)$$

Cette forme succincte de la solution donne la tension dans le domaine temporel explicitement en fonction du signal d'entrée.

Pour bien comprendre le principe de la méthode, on considère une ligne de transmission (**Figure II.10**) de longueur $l = 5 \text{ m}$, d'impédance caractéristique $Z_c = 50 \Omega$, excitée par un échelon $V_G(t)$ d'amplitude $V_0 = 1 \text{ V}$ et de durée t (**Figure II.8**).

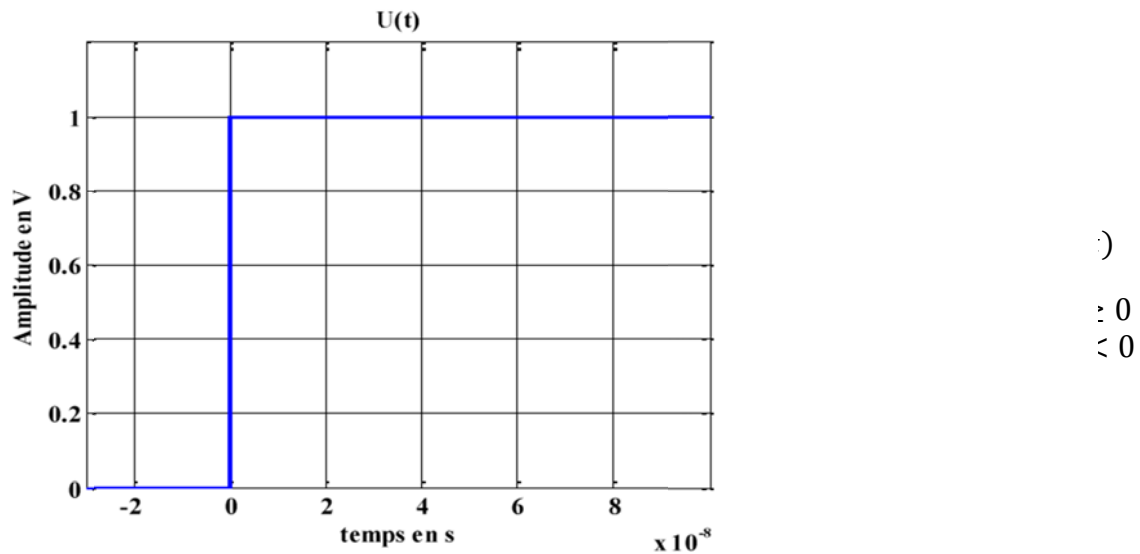


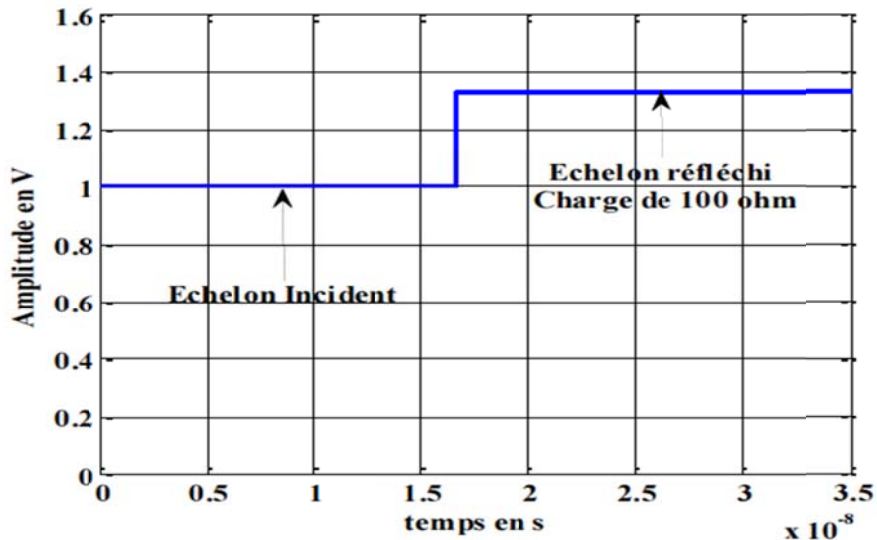
Figure II.8 - Signal d'excitation.

La réponse de la ligne quand elle est chargée par une impédance $Z_l = 100 \Omega$ ou $Z_l = 25 \Omega$, est montrée sur les Figure 1.23.b et Figure 1.23.a respectivement.

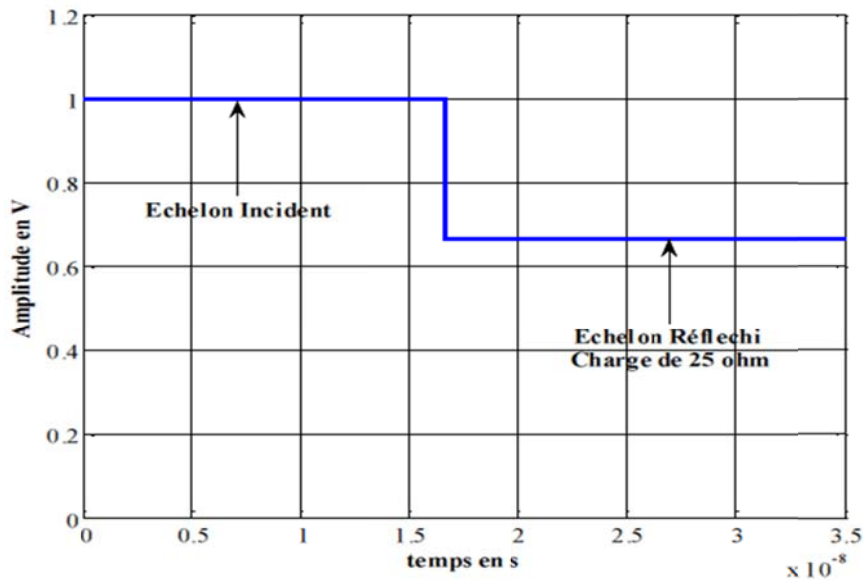
Donc les coefficients de réflexion au niveau des charges et le générateur sont :

$$\Gamma_l(Z_l = 100 \Omega) = \frac{100 - 50}{100 + 50} = \frac{1}{3}, \Gamma_l(Z_l = 25 \Omega) = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3}, \Gamma_G = \frac{50 - 50}{50 + 50} = 0$$

A partir de l'équation (2.42), on trace la tension totale au niveau de la source.



(a)



(b)

Figure II.9 - Réponse dans le domaine temporel en injectant un échelon dans une ligne de transmission (a) Pour $Z_l = 100\Omega$, (b) pour $Z_l = 25\Omega$.

Les Figures II.9.a et II.9.b représentent les amplitudes de la tension au niveau de la source d'une ligne chargée par une impédance dont le module est supérieur puis inférieur au module de l'impédance caractéristique de la ligne. On remarque l'effet de de variation de l'impédance sur l'amplitude de la tension due à la discontinuité d'impédance entre la ligne et la charge. Si $|Z_l| > |Z_c|$ alors l'impulsion réfléchi est du même signe que l'impulsion

incidente. Si $|Z_l| < |Z_c|$ alors l'impulsion réfléchiée est de signe opposé à l'impulsion incidente.

De même on peut déduire que si $|Z_l| = |Z_c|$, il n'y a pas d'impulsion réfléchiée, la charge Z_l absorbe la totalité de l'énergie de l'onde incidente (**Figure II.10**).

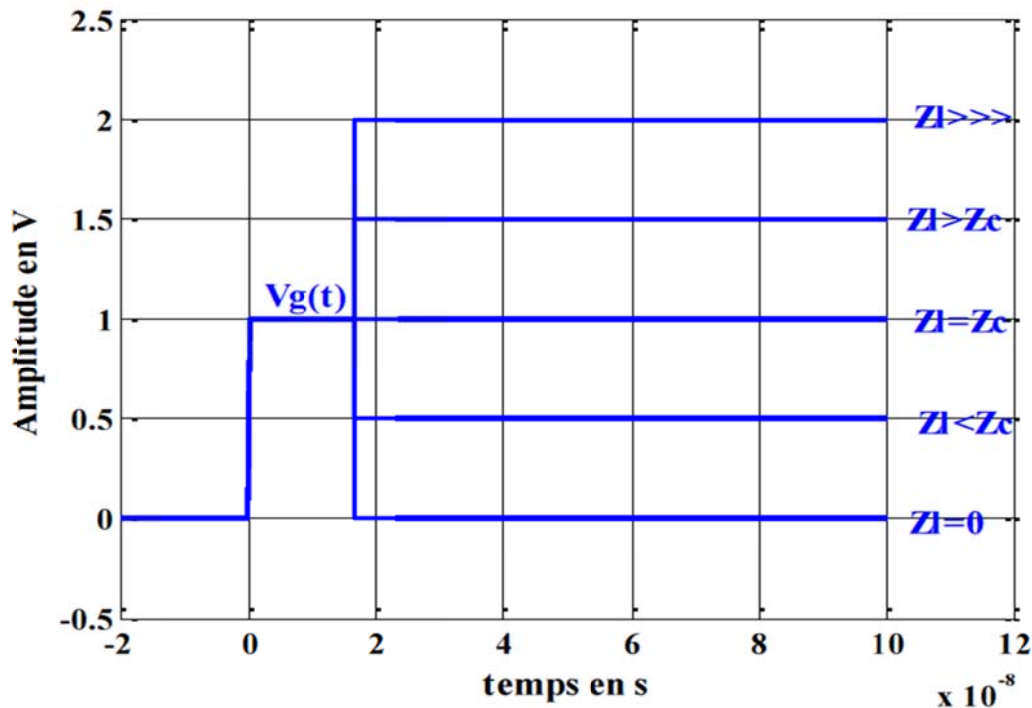


Figure II.10 - Réponse dans le domaine temporel en injectant un échelon dans une ligne de transmission chargée par une impédance telle que $|Z_l| = \infty$, $|Z_l| = 0$, $|Z_l| > |Z_c|$, $|Z_l| < |Z_c|$.

2.5. Phénomène d'atténuation et de dispersion

Lors de la propagation d'un signal dans un câble, deux principaux phénomènes agissent sur le signal réfléchi: l'atténuation et la dispersion.

2.5.1. Atténuation

Nous avons vu précédemment que dans la formule du coefficient de propagation, on trouve le coefficient d'atténuation α . Cette atténuation est due aux pertes par effet Joule. Le

signal subit une décroissance exponentielle le long de son trajet comme il est illustré dans (Figure II.11).

Le coefficient α détermine donc l'atténuation linéique de la ligne en fonction de la distance z et il s'exprime en *neper/m* (np/m). On l'exprime également en dB/m .

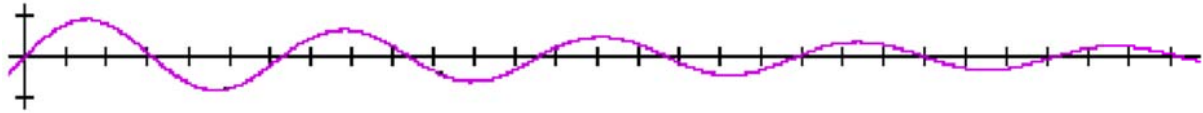


Figure II.11 - Phénomène d'atténuation [1].

2.5.2. Dispersion

Le coefficient de phase β est relié à la vitesse de phase et il s'exprime en rad/m . La dépendance de β en ω implique une variation de la vitesse du signal en fonction de sa fréquence ($2\pi\omega$). Pour un signal qui contient plus d'une fréquence, les composants fréquentiels se propagent à des vitesses différentes, ce qui provoque une déformation de sa forme pendant sa propagation. Un signal rectangulaire subissant le phénomène de dispersion est représenté dans (Figure II.12).

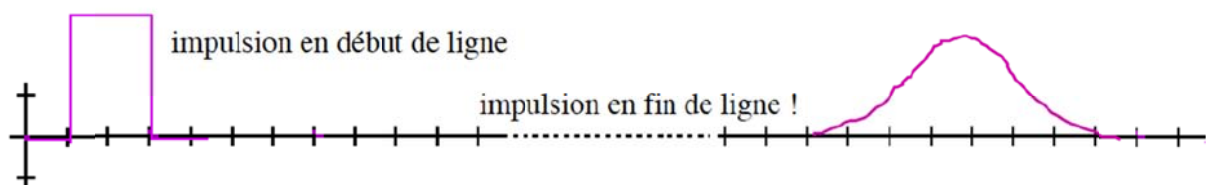


Figure II.12 - Phénomène de dispersion [1].

Remarque : nous rencontrons fréquemment un troisième phénomène qui concerne les lignes de transmission disposées l'une voisine de l'autre. C'est la diaphonie : par un couplage électromagnétique, une partie de l'énergie sur une ligne est transmise à la deuxième ligne. Ce phénomène n'est pas pris en compte dans cette thèse.

La variation de l'impédance caractéristique de la ligne, ainsi que les phénomènes de dispersion et d'atténuation peuvent atteindre une certaine gravité pour être considérés comme des défauts non francs que l'on trouve sur les réseaux des lignes de transmission.

2.6. Types de discontinuités sur une ligne de transmission

2.6.2. Discontinuité en extrémité de ligne

- Un court-circuit $R = 0$ conduit à l'impédance $\Gamma_r = -1$.
- Un circuit ouvert $R = \infty$ conduit à $\Gamma_r = 1$.
- Si la ligne est fermée sur son impédance caractéristique $R = Z_c$ cela conduit à $\Gamma_r = 0$.

2.6.2. Discontinuité sur une ligne

Elle peut se traduire par la jonction d'une impédance caractéristique $Z_{c2} > Z_{c1}$.

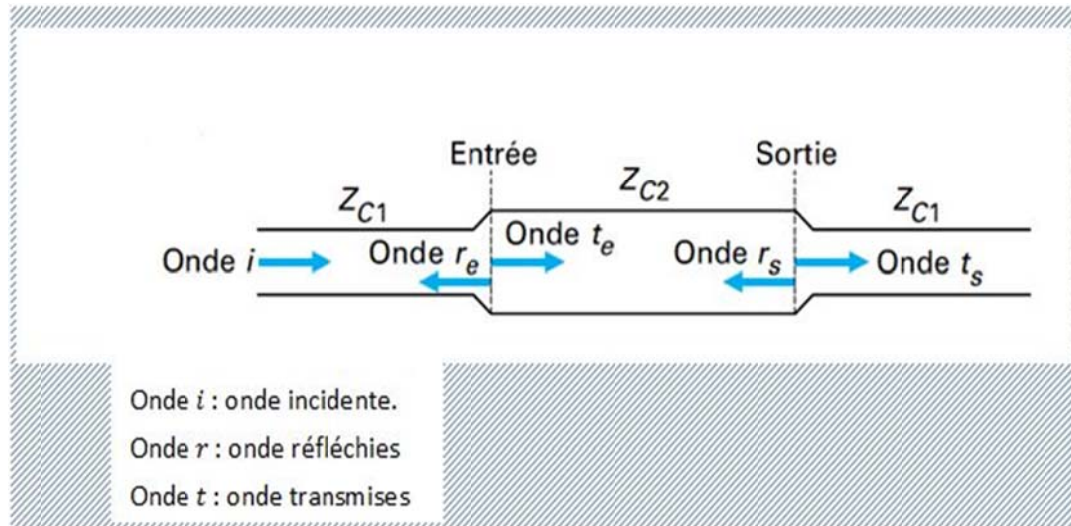


Figure II.13 - Rupture d'impédance sur une ligne [4].

A l'entrée de la jonction, le coefficient de réflexion est :

$$\Gamma_r = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \quad (2.44)$$

On obtient donc une onde réfléchie de même signe que l'onde incidente.

A la sortie de la jonction, le coefficient de réflexion est :

$$\Gamma_e = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \quad (2.45)$$

On a donc une onde réfléchie de signe opposé à l'onde incidente.

Considérons un défaut de résistance R_d à l'abscisse x_0 (**Figure II.14**), le coefficient de réflexion est:

$$\Gamma_r = \frac{(R_d // Z_c) - Z_c}{(R_d // Z_c) + Z_c} \quad (2.46)$$

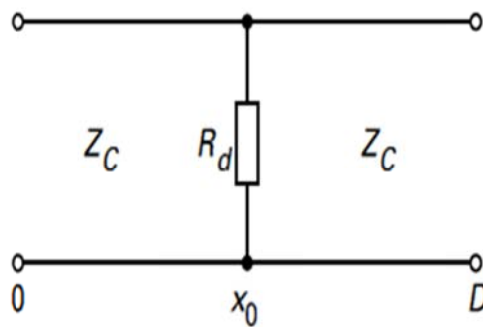


Figure II.14 - Défaut à l'abscisse x_0 d'une ligne [4].

Avec $(R_d // Z_c)$ signifiant que R_d est en parallèle avec Z_c , soit :

$$R_d // Z_c = \frac{R_d Z_c}{R_d + Z_c}$$

Donc

$$\Gamma_r = -\frac{Z_c}{2R_d + Z_c} \quad (2.47)$$

- Si $R_d = 0$, la relation (2.62) donne $\Gamma_r = -1$, ce qui correspond à un défaut faiblement résistant, plus précisément un court-circuit.

- Si $R_d \rightarrow \infty$, $\Gamma_r = 0$, ce qui correspond à un circuit ouvert.

2.6.3. Discontinuité d'une dérivation

Lorsque l'onde incidente atteint la dérivation (**Figure II.15**), une onde réfléchie prend naissance avec comme coefficient de réflexion :

$$\Gamma_r = \frac{(Z_{c2} // Z_{c1}) - Z_{c1}}{(Z_{c2} // Z_{c1}) + Z_{c1}} = -\frac{Z_{c1}}{2Z_{c2} + Z_{c1}} \quad (2.48)$$

et si $Z_{c1} = Z_{c2}$, on a $\Gamma_r = -\frac{1}{2}$

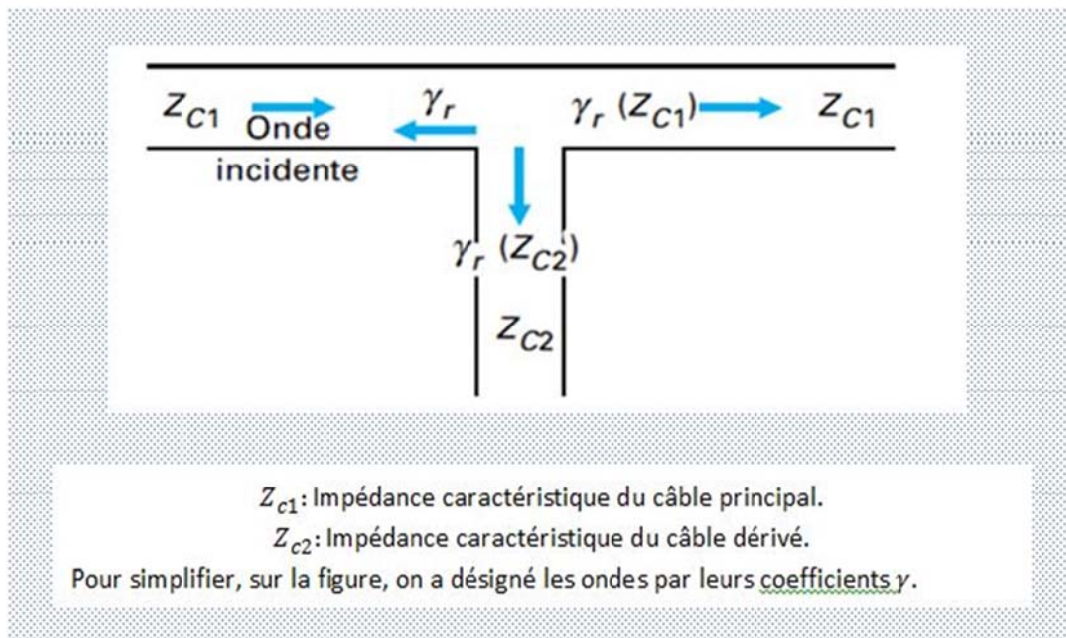


Figure II.15 - Présence d'une dérivation sur une ligne [4].

Une dérivation apparait donc comme une discontinuité à impédance caractéristique inférieure à celle du câble principal.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évoqué les caractéristiques physiques des lignes de transmission ainsi que le principe des lignes de transmission qui, théoriquement est très important pour la modélisation de celles-ci. Nous avons donc procédé à la modélisation d'une ligne de transmission monofilaire avec les équations de propagation et le calcul des caractéristiques linéiques. Nous avons étudié les équations de propagation dans les deux domaines d'analyse : le domaine fréquentiel et le domaine temporel, et dans le cas d'une ligne avec pertes et d'une ligne sans perte.

Nous avons aussi évoqué les phénomènes de limitation de la propagation des ondes dans les lignes de transmission. Des phénomènes qui sont inhérents à la nature de la ligne et dont les caractéristiques peuvent changer. Et les grandeurs caractérisant ces phénomènes sont aussi en rapport avec l'état des câbles.

Enfin nous avons naturellement abordé les types de discontinuités ou d'hétérogénéités qui sont en relation avec ces grandeurs caractéristiques.

Dans le prochain chapitre, nous allons introduire le retournement temporel et mettre l'accent sur son application dans le domaine du diagnostic filaire.