

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Ibn Khaldoun Tiaret**



**Faculté des Sciences Appliquées**

**Département de Génie civil**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : *Génie de la construction*

Présenté par :

*MEDDAH ABDIA*

Et

*KOUIDER ZOHRA*

*Sujet du mémoire :*

*Etude de la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques  
en utilisant la théorie d'ordre élevé*

*Soutenu publiquement le 15 /06/2017 devant le jury composé de :*

Mr. L. HADJI  
Mr. DRAICHE .K  
Mr. H. H. ABDELAZIZ  
Mr. Y.TLIDJI  
Melle. Z. KHELIFA

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

*Promotion 2016/2017*

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# REMERCIEMENT

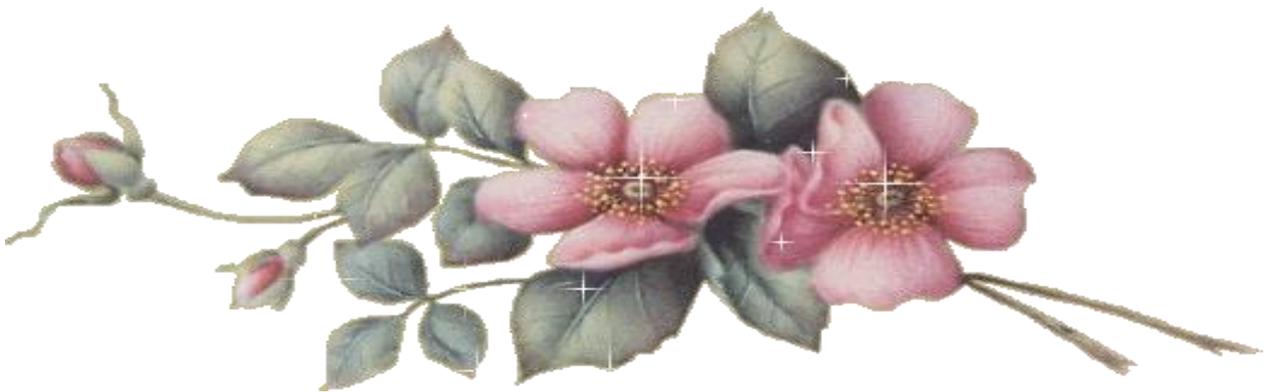
*Après avoir remercié le très et le tous miséricordieux Allah le tout puissant, qui nous a donné la santé, les moyens et les volontés dans la quête du savoir*

*On tient à exprimer notre remerciements avec un grand plaisir et un grand respect à notre encadreur Mr Draiche Kada de ses conseils, sa disponibilité et son encouragement nous a permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions*

*On tient à remercier tous les membres du jury qui ont bien voulu consacrer une partie de leur temps précieux à examiner ce travail*

*Tous les enseignants qui ont contribués à notre formation durant ces années d'études*

*On voudrait adresser nos remerciements à tous mes amies et collègues*



# DEDICACE

*À mon père*

*À ma mère*

*À mes sœurs et mes frères*

*À tous mes amis en particulièrement FATIMA, warda, souhila, NAIMA,  
ZAHIRA*

*À tout ma famille*

*Je dédie ce travail*

# **DEDICACE**

*À mes parents*

*A tout la famille MEDDAH*

*Atout la famille KOUIDER*

*Atout la famille CHIKHE*

*Atout la famille MIMOUNE*

*Spéciale dédicace à HIBA, OUARDA, SOUHILA, AMEL*

*Je dédie ce travail*

## ***Table des matières***

Remerciements et dédicaces

ملخص

Résumé

Abstract

Liste des notations

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale.....1

### **CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites**

I.1. Introduction .....5

I.2. Classification des matériaux composites.....6

I.2.1. Composites à renforts de particules.....7

I.2.2. Composites à renforts de fibres.....7

I.2.3. Composites à renforts de paillettes.....7

I.2.4. Composites stratifiés.....8

I.3. Les constituants de base d'un matériau composite.....8

I.3.1. La matrice.....9

Matrices organiques ou résineuses.....9

Matrices thermodurcissables.....10

Matrices thermoplastiques.....11

I.3.1.2. Matrices métalliques.....12

I.3.1.3. Matrices céramiques.....12

I.3.2. Le renfort .....12

I.3.2.2. Les fibres de verre.....13

I.3.2.2. Les fibres de carbone.....14

I.3.2.3. Les fibres d'aramides (Kevlar).....14

I.3.2.4. Les fibres de bore .....15

I.3.3. Charges et additifs.....16

I.3.4. L'interface fibre-matrice.....16

I.4. Les matériaux composites structuraux .....	18
I.4.1. Les monocouches.....	18
I.4.2. Les stratifiés.....	19
I.4.3. Les sandwich.....	19
I.5. Domaines d'Application des matériaux composites.....	20
I.5.1 Produits aéronautiques.....	21
I.5.2.. Produits militaires.....	21
I.5.3. Produits spatiaux (satellites).....	22
I.5.4. Construction navale .....	22
I.5.5. Construction civile .....	23
I.6. Qualités générales des matériaux composites.....	23
I.7. Conclusion.....	24

## **CHAPITRE II : théories des plaques composites stratifiées**

II .1. Introduction.....	25
II.2. Définition d'un stratifié .....	26
II.3. Modélisation géométrique.....	28
II.4.Comportement mécanique des matériaux stratifiés .....	29
II.4.1. Champ des déplacements.....	30
III.4.2. Champ des déformations.....	31
III.4.3. Champs de contraintes.....	32
II.4.4. Comportement en membrane-flexion-torsion.....	33
II.4.4.1. Comportement en Membrane.....	33
II.4.4.2. Comportement en flexion et torsion.....	35
▪ Résultantes en flexion.....	37
▪ Résultantes en cisaillement.....	37
II.4.5. Equation constitutive de la théorie classique.....	37
II.5 .Constantes de rigidité d'un stratifié orthotrope.....	37
II.5.1. Équations de mouvement des stratifiés orthotropes.....	39
II.5.1.1. Stratifié orthotrope dans ses axes .....	39
II.5.1.2. Stratifié orthotrope hors axes.....	40
II.7. La théorie classique des plaques minces de (CPT) .....	41

II.8. La théorie de déformation en cisaillement du premier).....	42
II.9. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé .....	43
II.10.Conclusion .....	47

**CHAPITRE III : Etude du comportement vibratoire des plaques composites  
stratifiées antisymétriques**

III.1.Introduction.....	48
III.2. Configuration géométrique.....	49
III.3. Hypothèses de la présente théorie à quatre variables.....	49
III.4. Champ de déplacement.....	50
III.5.Champ de déformations.....	50
III.6.Champ de contraintes.....	52
III.7.Equations de mouvement.....	52
III.8. Solutions analytiques des plaques stratifiées simplement appuyées.....	57
III.9.conclusion.....	60

**CHAPITRE IV : résultats et discussion**

IV.1. Introduction .....	61
IV.2. Propriétés des matériaux stratifiées utilisés .....	62
IV.3. Résultants numériques et discussions.....	63
IV.3.1. Analyse statique d'une plaque stratifiée antisymétrique $[0^\circ/90^\circ]$ .....	63
IV.3.2. Analyse de la vibration libre des stratifiés antisymétriques croisés $[0^\circ/90^\circ]_n$ .....	65
IV.3.2.1. Effet du rapport d'orthotropie sur les fréquences.....	65
IV.3.2.2. L'influence du rapport d'élancement sur fréquences.....	67
IV.3.3. Analyse de la vibration libre des stratifiés antisymétriques équilibrés $[45^\circ/45^\circ]$ ....	68
IV.3.4. Analyse de la vibration libre des stratifiés antisymétriques équilibrés $[45^\circ/45^\circ]_2$ ..	71
IV.3.5. Analyse de la vibration libre des stratifiés antisymétriques équilibrés $[45^\circ/45^\circ]_5$ ..	71
IV.4.conclusion .....	73

## ملخص

الجديد في هذا العمل هو استخدام نظرية الصفائح ذات أربع متغيرات مثلثية لأجل تحليل الاهتزاز الحر للصفائح المستطيلة المتكونة من عدة طبقات غير متناظرة وفقاً لاتجاه ألياف التقوية. بقسمة الحركة العرضية إلى جزئين، الأول ناتج عن الانحناء و الثاني عن القص، ينخفض عدد المجاهيل و معادلات التوازن لهذه النظرية الحالية، و ذلك ما يجعل هذه النظرية بسيطة للاستخدام. يتم تطبيق مبدأ الأعمال الافتراضية باستخدام نظرية تشوه القص المثلثي للصفائح المستطيلة المدعومة ببساطة ثم يتم الحصول على حل هذه المعادلات باستخدام تقنية نافير. ثم نقوم بعرض أمثلة عددية لإظهار تأثير المعايير الهندسية مثل طول الصحيفة، معامل الصلابة على الترددات الطبيعية للصفائح المتكونة من مواد مركبة ذات طبقات. يمكن الاستنتاج أن النظرية المقترحة هي دقيقة وبسيطة في حل سلوك الاهتزاز الحر للصحيفة المستطيلة المركبة من عدة طبقات.

**الكلمات المفتاحية :** صفائح ذات طبقات، تشوه القص، غير متناظرة، الاهتزاز الحر.

## Résumé

Dans la présente étude, une simple théorie d'ordre élevé de déformation du cisaillement trigonométrique à quatre variables, est évaluée compte tenu les effets de la déformation du cisaillement transversal pour analyser la vibration libre des plaques composites stratifiés antisymétriques à séquence d'empilement croisé et équilibré. Le champ de déplacement de cette théorie est basé sur l'approche de la théorie monocouche équivalente dans laquelle les déplacements dans le plan utilisent la fonction trigonométrique en termes de coordonnées d'épaisseur, pour calculer les déformations du cisaillement et satisfait les conditions aux limites de nullité des contraintes de cisaillement transverse sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Le nombre de variables inconnues et les équations d'équilibre impliquées dans la présente théorie est seulement quatre au lieu de cinq ou plus de cinq dans les autres théories d'ordre élevé. Les équations du mouvement sont obtenues en utilisant le principe du travail virtuel, ensuite la solution de ces équations est obtenue en utilisant la technique de Navier. Différents paramètres tels que les effets du rapport de rigidité et l'angle de la fibre sont évalués pour plusieurs problèmes de plaques stratifiées. Les fréquences naturelles obtenues en utilisant la présente théorie sont aussi vérifiées en comparant les résultats avec ceux obtenus par d'autres théories et la solution exacte d'élasticité.

**Mots clés:** Stratifié, Déformation du cisaillement, Antisymétrique, Fréquence naturelle.

## **Abstract**

In the present study, a simple high-order theory of four-variable trigonometric shear deformation is evaluated by considering the effects of transverse shear deformation to analyze the free vibration of cross-stacked anti-symmetric stratified composite plates and balanced. The displacement field of this theory is based on the equivalent monolayer theory in which displacements in the plane use the trigonometric function in terms of thickness coordinates to calculate the shear deformations and satisfies the boundary conditions of Nullity of the transverse shear stresses on the upper and lower sides of the plate. The number of unknown variables and the equilibrium equations involved in the present theory is only four instead of five or more in the other high order theories. The equations of the motion are obtained using the principle of virtual work, then the solution of these equations is obtained using the technique of Navier. Various parameters such as the stiffness ratio effects and the fiber angle are evaluated for several stratified plate problems. The natural frequencies obtained using the present theory are also verified by comparing the results with those obtained by other theories and the exact solution of elasticity.

### **Key words:**

Laminate, Shear deformation, Antisymmetric, Natural frequency

## Liste des notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice
$i, j$	Nombres naturels
$m, n$	Le mode propre de vibration
$\alpha, \beta$	constantes
$E$	Module de Young
$\nu$	Coefficient de Poisson
$b$	la largeur de la plaque
$h$	Epaisseur total de la plaque
$a$	La longueur de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements suivant les directions x, y et z
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$w_b, w_s$	Composantes de la flèche due à la flexion et au cisaillement respectivement
$\Phi_x, \Phi_y$	Les rotations autour des axes x, y
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$\rho$	La densité massique
$\sigma_x, \sigma_y$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Déformations normales dans les directions x et y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de cisaillement ou distorsion
$\theta$	Angle d'orientation des fibres
$\delta$	Opérateur variationnel
$\partial$	Dérivée partielle
$\{\Delta\}$	Vecteur colonne des inconnus
$\{k\}$	Vecteur de courbure
$[K]$	Matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de rigidité
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts résultants
$M^b$	Moments de flexion pure
$M^s$	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
$\delta U_d$	Variation de l'énergie de déformation interne de la plaque

## Liste de notation

---

$\delta U_p$	Variation de l'énergie de déformation externe de la plaque
$\delta U_c$	Variation de l'énergie de déformation cinétique de la plaque
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage membrane-flexion de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$C_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, P_{ij}$	Termes de rigidité de la plaque
$Q_{ij}$	Les coefficients de rigidité
$I_0, I_1, I_2$	Les inerties de masse
$\bar{\omega}$	Fréquence naturelle adimensionnelle



Figure IV.3 : Distribution des contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée antisymétrique carrée sous une charge sinusoïdale,  $(a/h=4)$ .....65

## liste de tableaux

### CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites

Tableau I.1 : Caractéristiques des matrices thermodurcissables.....	11
Tableau I.2 : Caractéristiques des matrices thermoplastiques.....	11
Tableau I.3 : Caractéristiques mécaniques principales des fibres de renfort.....	15
Tableau I.4 : Caractéristiques mécaniques des fibres de bore.....	16
Tableau I.5 : Liaisons interatomiques.....	17

### CHAPITRE IV : Résultats et discussions

Tableau IV.1 : Les différentes théories des plaques stratifiées.....	62
Tableau IV.2 : Fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques stratifiées antisymétriques carrée à plis croisé $[0^\circ/90^\circ]_n$ avec $a/h=5$ , matériau 2.....	66
Tableau IV. 3: Fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques stratifiées antisymétriques carrées à plis croisé $[0^\circ/90^\circ]_n$ avec $E_1/E_2=40$ , matériau 3.....	67
Tableau IV.4: Fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques stratifiées antisymétriques carrées à plis équilibré $[45^\circ/-45^\circ]$ , matériau 2.....	68
Tableau IV .5: Fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques stratifiées antisymétriques carrées à deux couches $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$ , matériau 3.....	70
Tableau.IV.6: Fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques stratifiées antisymétriques carrées à deux couches $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$ , matériau 2.....	70
Tableau.IV.7 : Fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques stratifiées antisymétriques carrées à quatre couches $[45^\circ/-45^\circ]_2$ , matériau 4.....	71
Tableau. IV.8: Fréquences naturelles adimensionnel des plaques stratifies antisymétriques a dix couche $[45^\circ/-45^\circ]_5$ , matériau 4.....	72
Tableau. IV.9: Fréquences naturelles adimensionnelles $\bar{\omega}$ des plaques stratifiées antisymétriques carrées à quatre couches $[45^\circ/-45^\circ]_5$ , matériau4.....	72

# *Introduction générale*

## **Introduction générale**

Les plaques composites stratifiées sont largement utilisées de plus en plus dans l'industrie et les nouveaux domaines de la technologie aérospatiale, automobile, marine, civil et autres applications structurelles en raison des caractéristiques avantageuses comme le rapport rigidité/poids élevé, un gain important de masse, une bonne résistance aux conditions extrêmes de température et de pression, ainsi qu'une grande longévité nécessaire lors de missions spatiales de longue durée et même le coût d'entretien qui est faible. L'analyse des vibrations des plaques constituées de ces matériaux a attiré l'attention de nombreux chercheurs. Le composite stratifié est un type spécial de matériaux composites structuraux qui se compose de deux matériaux ou plus, généralement il est défini par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié. Des solutions exactes d'élasticité tridimensionnelle (3D) pour la vibration des plaques stratifiées multicouches rectangulaires simplement appuyées ont été obtenues par Srinivas et al. [1] et Srinivas et Rao [2]. Une solution d'élasticité 3D pour les plaques composites stratifiées antisymétriques a été trouvée par Noor et Burton [3] et récemment par Messina [4]. Les solutions d'élasticité 3D pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich et des coquilles sont présentées par Brischetto [5, 6]. La réduction de ces problèmes 3D de la théorie de l'élasticité aux problèmes approximatifs 2D correspondants pour leur analyse a toujours été l'objectif principal des chercheurs. Cela a conduit au développement de nombreuses théories raffinées qui approchent les solutions 3D avec une précision raisonnable.

Une simple théorie disponible pour analyser le comportement des plaques est nommée par la théorie classique des plaques (CPT), qui surestime les fréquences naturelles en raison de la négligence de l'effet du cisaillement transversal et des contraintes normales transversales. La théorie de la déformation du cisaillement de premier ordre (FSDT) de Mindlin [7] peut être considérée comme une amélioration par rapport au CPT. Mais, la FSDT ne satisfait pas aux conditions de nullité des contraintes de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le facteur de correction de cisaillement est nécessaire

dans cette théorie pour prendre en compte de manière appropriée l'énergie de déformation de la déformation du cisaillement. Des théories de déformation du cisaillement de plus grand ordre sont développées pour surmonter les limites de CPT et de FSDT pour une meilleure représentation du comportement statique et dynamique des plaques composite stratifiées. Parmi les nombreuses théories des plaques d'ordre élevé, la théorie de la déformation du cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy [8] est connue et utilisée par de nombreux chercheurs pour leurs recherches. Carrera [9] a étudié l'effet du cisaillement transversal et des déformations normales sur les vibrations des plaques multicouches. Ghugal et Pawar [10] ont appliqué la théorie de la déformation du cisaillement hyperbolique de Soldatos [11] pour l'analyse des vibrations libres des plaques orthotropes. Karama et al. [12] ont développé une théorie exponentielle de la déformation du cisaillement pour étudier la flexion, le flambage et la vibration libre des plaques composite stratifiées. Aydogdu [13] a développé une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement pour l'analyse de flexion, de flambement et de vibration libre des poutres composite stratifiées. Liu et Zhao [14] ont étudié l'effet du noyau de nid d'abeille doux sur les vibrations et la flexion du panneau sandwich en utilisant des théories de déformation du cisaillement d'ordre inférieur et supérieur. Matsunaga [15] a étudié la vibration et la stabilité des plaques composites stratifiées à empilement équilibré soumises à des contraintes planes. Rao et Desai [16] et Rao et al. [17] a présenté des solutions analytiques pour l'analyse des vibrations libres des plaques en composite stratifié et sandwich. Kant et Swaminathan [18, 19] ont effectué une analyse de vibration libre des plaques composite stratifiées à plis croisé et sandwichs basée sur une théorie de déformation du cisaillement d'ordre élevé et de déformation normale à l'aide de la méthode des éléments finis.

Swaminathan et Patil [20] ont présenté une analyse de vibration libre des plaques stratifiées à plis équilibré en utilisant des théories d'ordre supérieur de Pandya et Kant [21]. Aagaah et al. [22] ont développé une théorie de la déformation du cisaillement du troisième ordre pour l'analyse des vibrations libre des plaques composites stratifiées avec diverses conditions aux limites, Kulkarni et Kapuria [23] ont présenté une analyse vibratoire des plaques composite stratifiées et sandwichs en apportant une amélioration sur la théorie de Kirchhoff et ont été basé sur l'approche de zigzag de troisième ordre. Thai et Kim [24] ont étudié l'analyse des vibrations libre des plaques composites laminées à l'aide de la théorie des plaques raffinées développée par Shimpi et Patel [25]. Chakrabarti et Sheikh [26], Pandit et al. [27] et Elmalich et Rabinovitch [28] ont présenté une formulation d'éléments finis pour

l'analyse de vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs. Frostig et al. [29] et Phan et al. [30] a étudié l'analyse des vibrations libre des panneaux sandwichs en considérant le noyau compressible et incompressible. Bessaim et al. [31] a développé une théorie de la déformation du cisaillement d'ordre élevé compte tenu de l'effet du cisaillement transversal et des déformations normales pour l'analyse statique et vibratoire des plaques sandwichs avec des peaux isotropes en matériaux à gradient de propriétés.

Il existe une autre classe de théories de déformation de cisaillement raffinées, où l'utilisation de la fonction trigonométrique est faite pour tenir compte des effets de déformation du cisaillement. Levy [32] a développé une théorie raffinée pour la plaque isotrope épaisse pour la première fois en utilisant des fonctions sinusoidales dans le champ de déplacement qui est encore modifié par Stein [33] et Touratier [34]. Shimpi et Ghugal [35], Shimpi et Ainapure [36] et Roque et al. [37] ont présenté des théories de déformation du cisaillement par couche trigonométriques, tandis que Shimpi et al. [38], Zenkour [39,40], Ghugal et Sayyad [41-42], Sayyad et Ghugal [43-44], Neves [45], Ferreira et al. [46] et Mantari et al. [47] ont présenté des théories de déformation du cisaillement trigonométrique à monocouche équivalente pour l'analyse des plaques composite stratifiées. Récemment, Sayyad et Ghugal [48] ont présenté une revue de la littérature sur l'analyse des vibrations des composites stratifiés et des sandwichs.

Dans cette étude, une simple théorie de déformation du cisaillement trigonométrique à quatre variables est évaluée pour analyser les vibrations libres des plaques composites stratifiées antisymétriques à séquence d'empilement croisé et équilibré.

Ce mémoire débute par une introduction générale, s'articule ensuite autour de quatre chapitres et s'achève par une conclusion et des perspectives. Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les matériaux composites en donnant une vision assez large des principaux constituants, à savoir les résines, les renforts et leurs propriétés mécaniques, en particulier les matériaux composites structuraux, en parlant sur le domaine d'application et la diffusion de ces matériaux dans les différents secteurs de construction.

Le deuxième chapitre a pour objectif de présenter une synthèse historique récente sur les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories des plaques correspondantes. L'étude repose sur les travaux réalisés durant la dernière décennie.

Le troisième chapitre propose une solution analytique de la vibration libre des plaques rectangulaires en matériaux composites stratifiés antisymétriques à séquences d'empilements croisés et équilibrés, simplement appuyées en utilisant une théorie raffinée de déformation de cisaillement d'ordre élevé.

Le quatrième chapitre est réservé pour commenter les résultats numériques obtenus par la validation du présent modèle sur des plaques stratifiées antisymétriques. Plusieurs facteurs ont été pris en considération au profit de cette étude (les propriétés matérielles, la séquence d'empilement, la géométrie de la plaque,...etc.).

# *Chapitre I*

*Généralités sur les matériaux*

*Composites*

---

# Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

## I.1. Introduction

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort et ainsi joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite. Les renforts peuvent se trouver utilisés sous différentes formes, comme par exemple en fibres longues, en fibres courtes, en sphères et même en tissu de fibres plus ou moins complexe (tissage 2D, voire même 3D). Ainsi, de nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Du point de vue des applications industrielles, les composites les plus répandus sont caractérisés généralement par une matrice polymère et des renforts sous forme de fibres longues tissées ou non. Les principales fibres employées aujourd'hui sont de type fibres de verre pour les applications à coûts réduits, ainsi que fibres de carbone et aramide pour les applications plus exigeantes.

Les propriétés des matériaux composites résultent de celles de leurs constituants, de leur distribution et de leur répartition géométrique ainsi que de leur fraction volumique. A la différence des matériaux classiques, les caractéristiques mécaniques ne sont connues qu'après fabrication du produit. Le produit est réalisé en même temps que le matériau. L'aspect anisotrope du matériau constitue l'une des singularités fondamentale des composites. Il est possible de contrôler les propriétés souhaitées par un arrangement des renforts lors de la conception de la pièce.

Les matériaux composites sont généralement scindés en deux catégories :

les composites à Grande Diffusion (GD) allient des coûts faibles à des caractéristiques moyennes et s'emploient principalement pour des applications de grandes séries [54]. Ils possèdent des caractéristiques mécaniques spécifiques souvent inférieures à celles des matériaux de référence telle que l'acier. Ils conviennent aux grandes séries et sont généralement à base de fibres de verre. Ils sont employés essentiellement dans les applications non travaillantes pour l'industrie des transports ou pour les biens d'équipement.

les composites à Hautes Performances (HP) dont les propriétés de la structure autorisent leur emploi dans des structures travaillantes. Ils se caractérisent par des propriétés mécaniques plus élevées que celles des composites GD en contrepartie d'un coût global plus important en raison du prix des matériaux utilisés et des moyens de fabrication associés (autoclave, RTM). Ces matériaux sont utilisés dans des applications de pointe telle que le secteur de l'aéronautique [55].

Les nouvelles technologies nécessitent des matériaux nouveaux à hautes performances, capables de remplacer les matériaux classiques. En effet, les matériaux composites permettent de concevoir et de réaliser des structures améliorées possédant de bonnes propriétés mécaniques alliées à un poids minimal. Ces matériaux ont suscité un intérêt particulier dans de nombreux secteurs tel que, l'aéronautique, les constructions navales, l'industrie automobile, etc....En développant les matériaux composites, les atouts visés sont :

- la légèreté,
- l'amélioration de propriétés mécaniques,
- une mise en œuvre plus simple et des finitions simplifiées par rapport aux matériaux métalliques (fonderie, chaudronnerie et usinage lourd),
- les gains de coût de production, même si pour le moment cela constitue le principal frein,
- l'intégration d'insert pour augmenter la fonctionnalité.

## **I.2. Classification des matériaux composites**

La classification des composites peut être effectuée selon diverses façons. Une manière simple consiste à les classer par les formes des renforts [56,57]. Les composites sont donc divisés en quatre catégories suivantes (figure I.1) :

- composites à renforts de particules,
- composites à renforts de fibres,
- composites à renforts de paillettes,
- composites stratifiés.

### **I.2.1. Composites à renforts de particules**

Les matériaux composites de particules consistent à mettre des particules d'un ou plusieurs matériaux en suspension dans une matrice. En fait, le meilleur exemple est sûrement le béton. Le béton est composé de particules de sable et de gravier et elles sont liées ensemble par la réaction chimique du ciment et de l'eau qui donne la pâte (matrice). Le béton est donc un composite de particules très complexes puisqu'une multitude de paramètres influence ses propriétés. Plusieurs ouvrages de référence traitent de ces paramètres [58,59].

### **I.2.2. Composites à renforts de fibres**

Les composites de fibres sont des matériaux composés d'une matrice dans laquelle divers types de fibres sont ajoutés. Le comportement des composites de fibres est beaucoup influencé par le type de fibres et leur nature. Il existe deux grands types de fibres ; les macros-fibres et les microfibrilles. Les macros-fibres ( $\approx 10$  mm de longueur et plus) qui sont ajoutées à la structure afin d'augmenter sa ténacité et les microfibrilles ( $\approx 10$  mm de longueur et moins) qui sont ajoutées afin d'améliorer principalement la résistance à la traction. La longueur qui caractérise les fibres comme microfibrilles ou macro-fibres peut varier en fonction de la composition de la matrice.

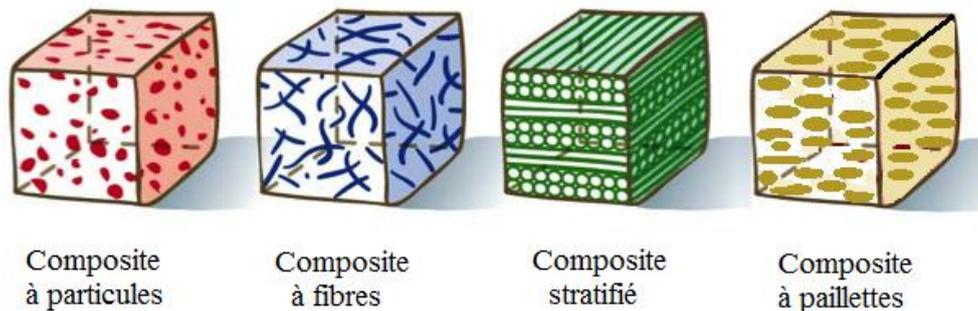
Le rôle des fibres dans la structure est le même que celui des armatures, c'est-à-dire reprendre les efforts de traction. Les composites à renforts de fibres limitent la formation, la propagation et la coalescence des microfissures au sein de la matrice. Les fibres cousent à la fois les fissures existantes en empêchant leur développement et, limitent la formation d'autres fissures en renforçant la matrice d'acier [60, 61, 62,63].

### **I.2.3. Composites à renforts de paillettes**

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces « particules minces » est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement l'un à l'autre afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan.

### I.2.4. Composites stratifiés

Un stratifié se compose d'au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification.



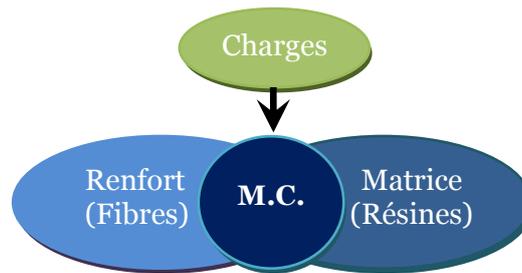
*Figure I.1 : Les différents types de composites.*

### I.3. Les constituants de base d'un matériau composite

En général les constituants principaux d'un matériau composite sont : la matrice, le renfort et l'interface (figure I.2). Dans certains cas des charges et des additifs peuvent être utilisés.

Le renfort est une sorte de squelette ou armature, qui assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité), souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques). La matrice est composée d'une résine thermodurcissable ou thermoplastique, qui lie les renforts, les protège contre les agressions extérieures et donne la forme au produit réalisé. L'interface assure la compatibilité renfort-matrice, transfère les efforts de la matrice au renfort et doit être adaptée aux propriétés visées à l'aide d'un ensimage.

Les « charges » qui sont des ajouts appropriés servent à diminuer les coûts, elles confèrent aussi aux matériaux des propriétés particulières ou complémentaires. Les additifs spécifiques peuvent être soit catalyseur, soit accélérateur de polymérisation, soit colorant ou encore agent de décollage.



*Figure I.2 : Constituants d'un matériau composite.*

### **I.3.1. La matrice**

La matrice maintient les fibres entre elles en jouant le rôle de liant dans le composite. Elle assure également le transfert de charge entre les renforts, tout en les maintenant dans leur position et leur orientation. Enfin, elle protège le composite des agressions extérieures et donne la forme désirée au produit final. Pour obtenir des caractéristiques d'imprégnation plus élevées, la résine doit, dans sa configuration finale, occuper tous les espaces inter-fibres et présenter le moins de bulles d'air possible. Pour réaliser cette imprégnation, la viscosité de la résine est diminuée avec un apport thermique.

En fonction de leur nature, les matériaux composites sont classés en trois grandes classes : les composites à matrice organique (CMO) qui ne peuvent être utilisés à des températures supérieures à 300°C, les composites à matrice métallique (CMM) qui sont utilisés jusqu'à 600°C, et les composites à matrice céramique (CMC) dont l'utilisation est possible même au-delà de 1000°C. Dans le cadre de ce chapitre nous intéressons à la caractérisation d'un matériau composite à matrice organique dont les caractéristiques structurelles et mécanique seront détaillées.

#### **I.3.1.1. Matrices organiques ou résineuses**

La conception et la réalisation de pièces composites à matrice organique (CMO), en particulier de pièces structurales ou de grandes dimensions, sont un enjeu majeur dans de nombreux secteurs industriels : transports, génie civil, bâtiment, aéronautique, construction navale, etc. Les gains potentiels apportés par ces matériaux sont connus et nombreux : réduction de la masse, intégration de fonctions, réduction des coûts, etc. Or, ils doivent également répondre à des critères de durabilité sur du long terme et leur utilisation optimale, dans des conditions extrêmes d'environnement (température, humidité, pollutions éventuelles) et de sollicitations (chargements statique et dynamique), nécessite de se doter d'une méthodologie validée de caractérisation et de prévision des comportements en utilisation. Le

comportement à long terme des CMO dépend de leur composition (matrice, renfort), des additifs (stabilisants, anti-UV, charges minérales), de la pureté, de la masse moléculaire des monomères ainsi que de la nature des renforts et de l'orientation des fibres. La fabrication des CMO emploie deux types de matrices: les résines thermodurcissables qui représentent 3/4 des CMO actuels (époxyde, polyester, vinylester, etc.) et les résines thermoplastiques (polypropylène, polyamide, etc.) qui sont moins utilisées, mais en pleine progression du fait notamment d'une plus grande recyclabilité (réutilisation après broyage).

#### - Matrices thermodurcissables

Ce sont les polymères les plus employés comme matrice de matériaux composites "structuraux". Ces résines, sous forme liquide à l'état initial, subissent une transformation irréversible (elles ont la particularité de n'être mises en forme qu'une seule fois) en passant à l'état solide après polymérisation. Leurs caractéristiques thermomécaniques élevées font qu'elles sont les plus employées actuellement. On distingue trois familles de résines thermodurcissables principalement utilisées [64]:

- Les résines phénoliques (résines de condensation) sont utilisées dans les applications nécessitant des propriétés de tenue au feu imposées par les normes dans les transports civils. Elles présentent l'inconvénient d'être peu résistant aux sollicitations.
- Les résines polyimides présentent d'excellentes propriétés mécaniques notamment à haute température par contre elles sont très sensibles aux chocs. Afin de remédier à cet inconvénient, il est possible d'améliorer leur ténacité en les mélangeant à des résines thermoplastiques avant polymérisation.
- Les résines époxydes possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques. Elles sont généralement renforcées par des fibres de carbone ou de verre (longerons, dérives, nacelles, voilure, bateaux et automobiles de compétition, etc.).

Le tableau I.1 ci-dessous regroupe quelques caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables.

Matrice TD	Masse volumique Kg/cm <sup>3</sup>	Résistance à la traction (MPa)	Module d'Young (MPa)	Allongement à la rupture
Polyester	1,2	50-65	3000	2,5%
Epoxyde	1,1-1,4	50-90	3000	2%
Polyimide	1,3-1,4	30-40	4000	1%
Phénolique	1,2	40-50	3000	2,5%
Vinylester	1,15	70-80	3500	4%
Polyuréthane	1,1-1,5	20-50	1000	100%
Silicone	1,1	35	2200	/

**Tableau I.1** : Caractéristiques des matrices thermodurcissables [65].

#### - Matrices thermoplastiques

Les matrices thermoplastiques sont constituées de polymères à chaîne linéaire ou ramifiées, c'est-à-dire monodirectionnelles ou bidirectionnelles. Elles sont en général fusibles et solubles. A l'inverse des thermodurcissables, c'est la matière première déjà polymérisée qui subit un échauffement, la pièce conservant sa forme après refroidissement. Cette transformation est réversible. Les thermoplastiques sont mis en œuvre lorsque la température est voisine de leur température de transition vitreuse pour les thermoplastiques amorphes et jusqu'à la température de fusion pour les thermoplastiques semi-cristallins. Les principales résines thermoplastiques sont à base de polyamide, polyéthylène, polycarbonate et polychlorure de vinyle (PVC). Les caractéristiques mécaniques de quelques résines thermoplastiques sont présentées dans le tableau I.2.

Matrice TP	Masse volumique Kg/cm <sup>3</sup>	Résistance à la traction (MPa)	Module d'Young (MPa)	Allongement à la rupture
PP	0,9	30	1200	20-400%
PPS	1,3	65	4000	100%
PA	1,1	70	2000	200%
PES	1,35	85	3000	60%
PEI	1,15	105	3300	60%
PEEK	1,3	90	4000	50%

**Tableau I.2** : caractéristiques des matrices thermoplastiques [66]

### **I.3.1.2. Matrices métalliques**

Les matériaux composites à matrice métallique ont été développés à partir des années 1960-1965 en deux vagues successives. Des efforts importants de recherche ont été menés aux États-Unis et en France dans les années 60 autour d'une fibre mono filamentaire de bore, sans véritable développement industriel ultérieur. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

### **I.3.1.3. Matrices céramiques**

Dans les années 80, la disponibilité de nombreux nouveaux matériaux céramiques devait relancer les recherches dans ce domaine avec des perspectives de développement industriel plus encourageantes. Des exemples d'applications industrielles ont été développés dans l'automobile, à l'initiative de l'industrie japonaise.

Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composite à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

## **I.3.2. Les renforts**

Les renforts (fibres) présentent une configuration particulièrement intéressante pour profiter au mieux des propriétés mécaniques des matériaux. Sous cette forme, le module et surtout la contrainte de rupture peuvent être très supérieurs à ceux des matériaux massifs.

Pour les renforts, sont employés des bobines de fils de longueurs variées (longs, broyés ou courts) ou encore des structures de fibres comme des tissus (taffetas, satins, serges), des nappes de fibres unidirectionnelles (en abrégé UD) ou encore des tresses, des tricots ou enfin des tissus 3D. En résumé, le domaine des renforts s'appuie sur les productions de l'industrie textile. Par définition, les fibres se distinguent des fils par leur aspect discontinu.

Les fibres de renforts les plus courantes :

- Les fibres de Verre ;
- Les fibres de Carbone ;
- Les fibres d'aramides « Kevlar » ;
- Les Fibre de Bore ;
- Les Fibre de silice (ou de quartz) ;
- Les Fibre de polyéthylène de haut module.

### I.3.2.1. Les fibres de verre

Les fibres de verre sont fabriquées à partir d'un mélange à base de silice. En faisant varier la composition de ce mélange, différents types de verre peuvent être obtenus : le verre E, les verres S ou R pour des applications mécaniques plus sévères, le verre C pour des applications chimiques et le verre D pour des applications diélectriques. Rappelons que les fibres de verre E constituent le principal renfort des produits composites de grande diffusion et sont utilisés dans plus de 95 % des matériaux composites.

Le mélange est porté à fusion à 1200°C puis est transféré dans un four filière à 1000°C. En sortie de filière, le verre est étiré à grande vitesse pour former des fibres continues dont le diamètre varie de 10 à 50 µm. Les fibres ainsi produites ne peuvent pas être utilisées sous cette forme en raison de plusieurs points faibles: manque de cohésion inter-filamentaire, forte sensibilité à l'abrasion, présence de charges électrostatiques et mauvaise compatibilité avec la résine (imprégnation, adhérence verre/résine). Pour toutes ces raisons et dans le but d'être tissées, les fibres sont ensuite ensimées. Il existe trois principaux types d'ensimages :

- L'ensimage textile pour permettre le tissage. Il fait intervenir des agents collants, lubrifiants, adoucissants ou encore antistatiques.
- L'ensimage plastique ou « finish » qui consiste à déposer un agent de pontage rendant possible la liaison fibre/résine.
- L'ensimage textilo-plastique qui confère aux fibres les propriétés nécessaires au tissage et à la liaison fibre/résine en une seule étape.

Les fibres de verre offrent plus particulièrement pour les produits de grande diffusion les qualités suivantes:

- une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- de bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

### I.3.2.2. Les fibres de carbone

La fibre de carbone est un matériau se composant de fibres extrêmement fines, entre cinq et quinze microns de diamètres et composé principalement d'atomes de carbone. Les atomes de carbone sont agglomérés dans des cristaux microscopiques qui sont alignés plus au moins parallèlement à l'axe long de la fibre. L'alignement des cristaux rend la fibre incroyablement résistante pour sa taille. Plusieurs milliers de fibres de carbone sont enroulées ensemble pour former un fil qui peut être employé tel que ou être tissé.

Les fibres de carbone sont traditionnellement considérées comme les renforts « phares » de composites « High-tech » couramment employés dans l'aéronautique et la voile de compétition. Ces fibres restent chères par rapport aux fibres de verre E mais sont très attractives pour produire des structures dont la rigidité est le principal critère de choix. Si on considère le coût spécifique (coût/densité) des fibres de carbone, il tombe à sept fois celui des fibres de verre. La rigidité d'une fibre peut aussi être rapportée à son coût spécifique. Dans ce cas, le rapport entre fibre de verre et fibre de carbone n'est plus que de deux. Cela veut dire que, si le prix du carbone continue de baisser, son utilisation risque de pénétrer des marchés de grande diffusion occupés à l'heure actuelle par les fibres de verre.

Il existe deux grandes sortes de fibres de carbone : les fibres HR (Haute Résistance) qui sont les plus utilisées et les fibres HM (Haut Module). Les fibres HM ont des modules d'Young très élevés qui peuvent être jusqu'à deux fois supérieur à ceux des fibres HR. Mais, elles comportent un allongement à rupture en traction 2 fois moins élevé ce qui a tendance à rendre les composites plus « fragiles ». Par ailleurs, les fibres de carbone sont anisotropes et peuvent présenter des structures très différentes suivant la nature du précurseur utilisé pour leur fabrication. Les fibres de carbones possèdent les qualités générales suivantes :

- très forte raideur axiale,
- très bonne résistance aux attaques chimiques (corrosion sous contrainte),
- meilleure durée de vie en fatigue que les fibres de verre,
- Bonne conductibilité électrique et thermique.

### I.3.2.3. Les fibres d'aramides (Kevlar)

Ces fibres sont des polyamides aromatisés obtenus par synthèse à basse température (environ  $-10^{\circ}\text{C}$ ). Ils sont ensuite filés et étirés pour obtenir un module d'élasticité élevé. Ces fibres sont produites et commercialisée par la société Dupont de Nemours sous la marque Kevlar. En comparaison avec les fibres de verre, le prix des fibres d'aramide est élevé ce qui a

été un frein pour leur développement. Néanmoins, le Kevlar possède une résistance spécifique en traction (résistance/densité) très importante et supérieure à la plupart des autres fibres pour ce type de sollicitation. Notons que le Kevlar 49 est essentiellement utilisé pour des applications en matériaux composites. Les principales limites d'utilisation de ces fibres sont :

- La reprise d'humidité. La structure des fibres d'aramides renferme des microporosités qui ont tendance à retenir l'eau en présence d'humidité. Les tissus de Kevlar doivent être séchés avant leur imprégnation par la résine.
- La sensibilité aux rayonnements ultra-violets.
- La faible tenue en compression par rapport à la traction. La contrainte de compression d'une fibre d'aramide est cinq fois inférieure à sa contrainte de traction. C'est une limitation importante pour l'utilisation de composites sollicités en flexion (combinaison traction/ compression) qui seront dimensionnés avec la condition la plus défavorable à savoir la résistance en compression.

Les caractéristiques mécaniques des trois types de fibres les plus répandus dans le domaine des composites hautes performances sont synthétisées dans le (tableau I.3). Ces caractéristiques varient d'un fabricant à l'autre.

Caractéristiques Mécaniques	Fibre de carbone				Fibre de verre		Aramide
	HR		HM		E	R	
Résistance à la rupture (GPa)	3,5	4,5	2,5	4,2	2,5	3,2	3,6
Module de Young (GPa)	240	250	500	500	74	86	125
Allongement à la rupture (%)	1,5	1,8	0,5	0,5	3,5	4	2,9
Masse volumique (g/cm <sup>3</sup> )	1,4	1,8	1,95	1,95	2,6	2,5	1,44

**Tableau I.3 :** Caractéristiques mécaniques principales des fibres de renfort [67].

#### I.3.2.4. Les fibres de bore

Ce sont des filaments de tungstène avec un diamètre de 12  $\mu\text{m}$ , sert de catalyseur à la réaction de chlorure de bore et d'hydrogène 1200 °C. Les fibres de bore obtenues ont un diamètre d'environ 100  $\mu\text{m}$  (la vitesse de croissance est de 1 micron par seconde).

Caractéristiques mécaniques	Bore
Résistance à la rupture (GPa)	3,5
Module de Young (GPa)	400
Allongement à la rupture (%)	0,8
Masse volumique (g/cm <sup>3</sup> )	2,63

*Tableau I.4 : Caractéristiques mécaniques des fibres de bore.*

### I.3.3. Charges et additifs

Les additifs permettent de modifier l'aspect, les caractéristiques du matériau, l'adhérence entre les renforts et la matrice, la coloration, les propriétés anti-UV, les charges ignifugeantes, ou les agents améliorant l'isolation thermique ou acoustique. Ce sont des éléments ajoutés aux matières plastiques au cours de leur élaboration ou de leur transformation et qui visent à leur conférer des caractéristiques particulières utiles lors de la transformation ou des fonctionnalités pour leur usage final.

Les propriétés des matériaux composites résultent de celles de leurs constituants, de leur distribution et répartition géométrique ainsi que de leur fraction volumique. A la différence des matériaux classiques, les caractéristiques mécaniques ne sont connues qu'après fabrication du produit. Le produit est réalisé en même temps que le matériau. L'aspect anisotrope du matériau constitue l'une des singularités fondamentale des composites. Il est possible de contrôler les propriétés souhaitées par un arrangement des renforts lors de la conception de la pièce.

### I.3.4. L'interface fibre-matrice

Il est naturel de penser que les performances des matériaux composites sont fonction des propriétés des constituants de base rentrant dans leur composition. Cependant, ceux-ci n'existeraient pas si les fibres et la matrice ne pouvaient s'associer. L'interface est le siège de cette association et constitue une véritable région stratégique capable d'assurer notamment le transfert des charges de la matrice aux renforts. Les caractéristiques de l'interface dépendent quant à elles de la qualité de la liaison fibre-matrice ce qui fait appel à la notion d'adhésion.

Pour comprendre les phénomènes d'adhésion il faut tout d'abord s'intéresser à la notion de surface. Une surface peut être définie comme un lieu de discontinuité d'au moins une propriété physique (discontinuité d'ordre, d'indice de réfraction, de composition chimique) et constitue une séparation entre deux milieux. Une surface est aussi un lieu thermodynamiquement instable privilégié pour des contacts et des réactions chimiques. Notons que les solides ne peuvent réagir qu'au travers de leur surface. En simplifiant, l'adhésion entre deux matériaux, ou l'affinité entre deux surfaces, peut résulter de différents facteurs :

- L'ancrage mécanique; une rugosité ou une porosité importante sont des éléments favorables à l'adhésion car ils permettent d'accroître la surface de contact entre deux matériaux.
- L'inter diffusion dans le cas de deux polymères.
- La création de liaisons physico-chimiques à l'interface; il existe des liaisons interatomiques de faible et de forte énergie (tableau I.5).

Type de liaison	Energie de liaison (KJ/mol)	Distance interatomique (Å)
Ionique	600-1000	5
Covalente	130-820	4
Métallique	100-150	5
Van der Waals / Hydrogène	4-20	3-5

**Tableau I.5 : Liaisons interatomiques [68].**

Lors de la fabrication du composite. L'adhésion de la phase polymère sur le renfort résulte d'un phénomène de mouillage de la fibre par la résine liquide. Dans ce cas on décrira le phénomène d'adhésion par l'équation thermodynamique suivant le principe de l'énergie d'adhésion de Dupré définie par la relation suivante:

$$W_{adh} = \gamma_s + \gamma_l - \gamma_{sl} \quad (I.1)$$

Où  $\gamma_s$ ,  $\gamma_l$  et  $\gamma_{sl}$  sont respectivement les enthalpies libres de surface de la fibre, de la résine polymère et l'énergie nécessaire pour créer une interface entre la fibre et la résine liquide. En utilisant l'angle de mouillage ( $\theta$ ) des fibres par la matrice, l'énergie d'adhésion s'exprime aussi par la relation d'Young-Dupré :

$$W_{adh} = \gamma_l(1 + \cos \theta) \quad (I.2)$$

Cette relation illustre le fait qu'un bon mouillage se caractérise par des angles de contacts fibre-matrice faibles et permet d'accroître l'énergie d'adhésion. Par exemple, la mouillabilité peut être améliorée à l'aide de traitements de surface des fibres (agents de couplage, ensimage).

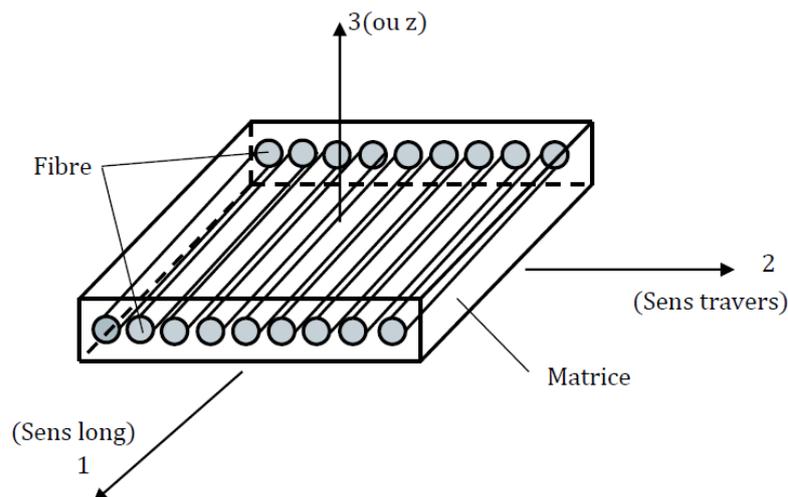
#### I.4. Les matériaux composites structuraux

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc. Généralement les matériaux composites structuraux sont classés en trois catégories :

- Les monocouches ;
- Les stratifiés ;
- Les sandwiches.

##### I.4.1. Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite (figure I.3), et sont formées d'une matière plastique (résine) renforcée d'un matériau fibreux (renfort). Les divers types de monocouches sont définis par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD ou réparties aléatoirement), à fibres tissées, ou à fibres courtes. La superposition de plusieurs monocouches dans la direction de l'épaisseur permet d'obtenir une structure composite stratifiée.



**Figure I.3 :** Pli à Renforcement unidirectionnel.

### I.4.2. Les stratifiés

Les structures composites stratifiées sont constituées de couches successives de renforts imprégnés de résines (figure I.4). Les couches sont également nommées plis. Les structures stratifiées réalisées à partir de matériaux composites sont constituées d'empilements de nappes unidirectionnelles ou bidirectionnelles. Ces nappes sont formées de renforts en fibres longues liées par de la résine. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La résine assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. Les pièces structurales sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. Selon la disposition des couches par rapport au plan moyen, on distingue les stratifiés symétriques et antisymétriques.

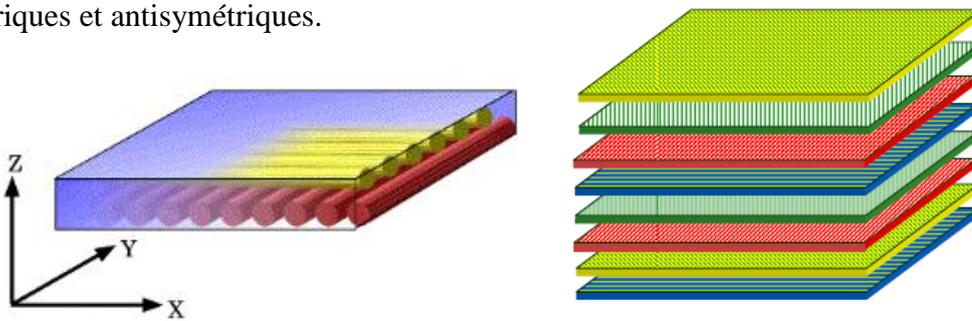
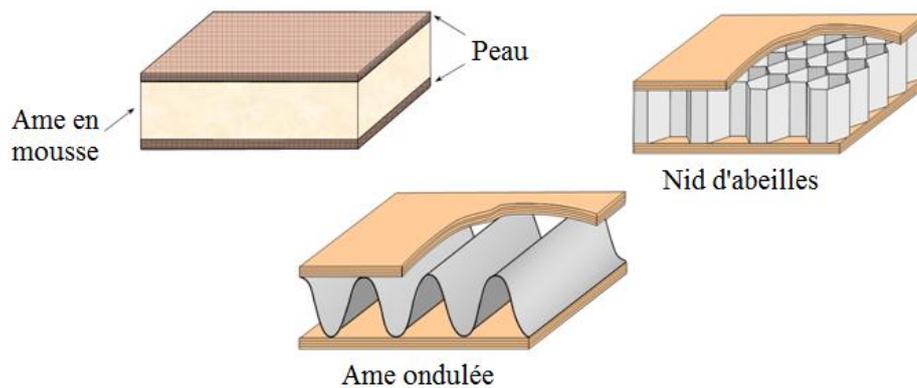


Figure I.4 : Matériau composite stratifié.

### I.4.3. Les sandwichs

Les matériaux composites à structure sandwich sont constitués de deux peaux en matériaux composites entre lesquelles est collé un noyau à faible densité permettant d'augmenter les propriétés du matériau en flexion tout en conservant un poids très faible (figure I.5). Typiquement, l'industrie aéronautique utilise un noyau en forme de nid d'abeille constitué de feuilles ondulées collées ensemble. Ces feuilles sont fabriquées en imprégnant des fibres d'aramide dans une résine phénolique ayant des propriétés ignifuges. Lors de la mise en forme de ce type de panneaux sandwichs, il est souvent nécessaire d'utiliser plusieurs morceaux de noyau afin de fabriquer de grandes pièces. La jonction entre deux noyaux pose un problème de discontinuité qui est réglé dans l'industrie en injectant une mousse dans l'interstice. L'injection de cette mousse ajoute une étape à la fabrication de grandes pièces et constitue un ajout de masse à la structure.



**Figure 1.5 :** Structure composite sandwich.

Les panneaux sandwichs intégrés dans les structures aéronautiques sont légers et rigides ce qui en fait d'excellents transmetteurs de vibration mécaniques et sonores. Ces vibrations vont à l'encontre du confort des passagers et peuvent même causer des bris mécaniques si elles ne sont pas amorties. Généralement les matériaux composites ont un amortissement plus élevé que les métaux, mais celui-ci demeure insuffisant et il est nécessaire de trouver des solutions pour l'améliorer. L'amortissement peut être assuré par des systèmes dit « actifs », c'est-à-dire des systèmes nécessitant une boucle d'asservissement permettant d'obtenir un bon amortissement en réponse à une vibration donnée. Cependant, un tel système est consommateur d'énergie et ajoute une masse non négligeable à la structure. C'est pourquoi l'industrie aéronautique s'est tournée vers des systèmes « passifs » permettant d'amortir les vibrations pour un ajout de masse plus faible.

### **I.5. Domaines d'Application des matériaux composites**

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques élevées associés à un faible poids (besoins de l'industrie aérospatiale). Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (aéronautique, automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...etc.), ces performances remarquables sont à l'origine des solutions technologiques innovantes.

### **I.5.1. Produits aéronautiques**

Dans la construction aéronautique, la compétition est rude entre les matériaux classiques, l'aluminium principalement et les matériaux composites à haute performance, essentiellement ceux à base de fibres de carbone. Les premiers disposent d'une avance considérable en termes d'expérience et d'industrialisation; les seconds ont longtemps été confinés à des pièces de structure secondaire peu sollicitées (aérofreins, volets, aménagements de cabine,...etc.), du fait de leur coût élevé par rapport à l'aluminium, mais aussi de leur médiocre résistance aux chocs et de leur difficulté d'assemblage.

Toutefois, les composites ne cessent de gagner du terrain, car ils offrent de nombreux avantages. Ils facilitent et réduisent la maintenance des appareils grâce à leur résistance à la corrosion, ainsi qu'à leur excellente tenue à la fatigue. Ils allègent la structure d'un avion et améliorent ainsi sa rentabilité : un gain de 450 kg permet d'embarquer 6 passagers supplémentaires. Ils résistent bien au feu et limitent les émissions toxiques. Ils permettent aussi de réaliser des pièces multifonctions, ce qui évite la pose d'une multitude de rivets constituant autant de points faibles. Tous ces avantages font que l'utilisation des composites s'étend progressivement des pièces de structures secondaires vers des fonctions aux fortes exigences mécaniques. Aujourd'hui, ils constituent certains des sous-ensembles de la structure : parties centrales et arrières du fuselage de l'A380; voilure extrême de l'ATR 72; voilure complète de l'A400M.

### **I.5.2. Produits militaires**

Pour les missiles, le principal avantage pour le constructeur d'utiliser des matériaux composites est de pouvoir proposer à ces clients des produits associant performance et légèreté. Par contre l'utilisation des composites sur les ailettes de guidage des missiles permet de garder une bonne maîtrise de la trajectoire jusqu'à la cible finale. A cause de l'échauffement cinétique provoqué par le frottement de l'air sur la structure des ailettes de missile, en fin de trajectoire les ailettes en alliage d'aluminium peuvent fondre dans certaines conditions et le missile poursuit sa trajectoire sans contrôle, ce qui entraîne une perte de précision du tir. L'utilisation de matériaux composites sur les ailettes de part leur faible conductivité thermique fait qu'en fin de mission, les ailettes conservent une certaine intégrité de forme, ce qui permet de maintenir la trajectoire du missile sans perte de précision.

### **I.5.3. Produits spatiaux (satellites)**

Les déformations de la structure peuvent avoir une origine thermique avec des expositions à la température pouvant varier entre  $-180^{\circ}\text{C}$  lorsque le satellite est dans l'ombre et  $+160^{\circ}\text{C}$  lorsque le satellite est exposé au soleil. De plus, sur la même structure, entre la face éclairée et la face à l'ombre, le gradient de température peut être important. Les structures en matériaux composites à matrice organique, de par la valeur négative du coefficient de dilatation thermique des fibres de carbone et d'autre part la valeur positive du coefficient de dilatation thermique de la matrice, peuvent, avec une orientation optimisée des différentes couches constituant la structure, présenter globalement un coefficient de dilatation thermique proche de zéro pour l'ensemble de la structure. La stabilité géométrique de la structure est apportée par sa raideur globale. L'utilisation des fibres de carbone à très haut module sur les composites permet de répondre à cette préoccupation. Le principal inconvénient des composites à matrices organiques pour les applications satellites est sans aucun doute la reprise d'humidité, pendant les opérations d'assemblage et pendant le stockage avant lancement [69].

### **I.5.4. Construction navale**

D'après la littérature, la première apparition des matériaux composites en construction navale se situerait en 1946. L'US NAVY (la marine de guerre des États-Unis) réalise à cette époque des embarcations de 28 pieds, destinées au transport de personnels, suivant deux techniques : le moulage sous pression et l'injection sous vide avec des taux de fibres modestes (de l'ordre de 25 %). Progressivement la technique de stratification au contact en voie humide s'impose pour les applications navales. A partir de 1955, l'apparition des tissés de roving ainsi que de nouvelles techniques de moulage entraîne une croissance rapide des applications des matériaux composites, toujours limitées à de petites unités (jusqu'à 57 pieds) : vedettes de patrouilles Côtières, transports de personnels, navires de débarquement ...etc. [70].

Afin de remplacer le bois, putrescible, par des matériaux insensibles à la corrosion marine et à l'eau de mer, tout en assurant une excellente flottabilité, en permettant de réaliser des volumes creux importants et solides à bas prix. Pour les bateaux de taille moyenne (bateaux de plaisance, de pêche, grands catamarans de compétition et aussi les petits navires commerciaux ou les chasseurs de mines qui ne doivent pas avoir de coques métalliques) on construit donc des coques volumineuses en stratifiés polyester-verre, sur lesquelles on

assemble les membrures, poutres et renforts longitudinaux et couples, qui sont aussi réalisés en matériaux composites, qui peuvent être collés ou assemblés par stratification [71].

### **I.5.5. Construction civile**

Depuis une dizaine d'année, une alternative est proposée : il s'agit de renforcer ou de réparer les ouvrages en béton par des matériaux composites à matrice organique collés extérieurement sur des structures dégradées. Les matériaux composites, en particulier à base de fibres de carbone, de par leur rigidité spécifique, présentent un grand intérêt pour la réparation. De plus, malgré leur prix élevé, ils présentent un avantage économique car ils peuvent être mis en œuvre directement sur les structures par moulage au contact, procédé appelé aussi polymérisation in-situ ou stratification directe. Ceci permet de réduire considérablement les coûts liés à la manipulation des matériaux ainsi que les problèmes liés aux interruptions des activités des ouvrages réparés.

Dans le domaine du génie civil, les matériaux composites sont utilisés pour le renforcement et la réhabilitation d'éléments structuraux en béton armé, tels que les poutres, les dalles, les colonnes et les murs. Les premières recherches sur l'application de ce nouveau matériau destinées aux ouvrages de génie civil datent de 1980, bien que ce soit plutôt vers 1990 que le matériau est utilisé, d'abord sur une base expérimentale, puis progressivement sur une base commerciale. Le confinement des colonnes en béton se réalise à l'aide d'enveloppes en matériaux composites à base de fibres de verre, de carbone ou d'aramide. Ces enveloppes appliquées aux colonnes améliorent le confinement du béton, ainsi que sa ductilité et sa résistance en compression. Les différents composites offrent des modules d'élasticité et des rigidités variés pouvant modifier le comportement axial et radial du béton confiné.

### **I.6. Qualités générales des matériaux composites**

Les qualités principales les plus citées des matériaux composites sont :

- Légèreté (gain de masse) ;
- Tenue mécanique particulière (fatigue, résiliences,...) ;
- Rigidité adaptable selon le type de renforts ;
- Bon comportement à la corrosion ;
- Résistance chimique, tenue électrique et une meilleure isolation thermique ;
- Amélioration de la tenue au feu ;

- Fabrication facile, maintenance réduite et réparation possible.

Ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les défauts principaux les plus courants sont les suivants :

- Sensibilité aux agents atmosphériques (rayons UV, humidité, température) ;
- Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre) ;
- Tolérance aux dommages (représente le point faible le plus important) ;
- Problèmes d'assemblage (grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs).

### **I.7. Conclusion**

Pour beaucoup d'applications structurales, les matériaux composites apparaissent comme de sérieux concurrents des métaux du fait principalement de leur légèreté qui permet un gain de poids, de leur insensibilité à la corrosion saline, la résistance à l'oxydation et enfin l'isolation thermique et électrique. Du fait de leur importance, dans ce premier chapitre, on a fait appel aux définitions et des notations liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et leurs caractéristiques mécaniques. Nous avons aussi discuté sur les matériaux composites structuraux et leurs avantages principaux qu'offrent ces matériaux pour le renforcement des structures à hautes performances.

# *Chapitre II*

*Théories des plaques composites*

*Stratifiées*

## Chapitre II : Théories des plaques composites stratifiées

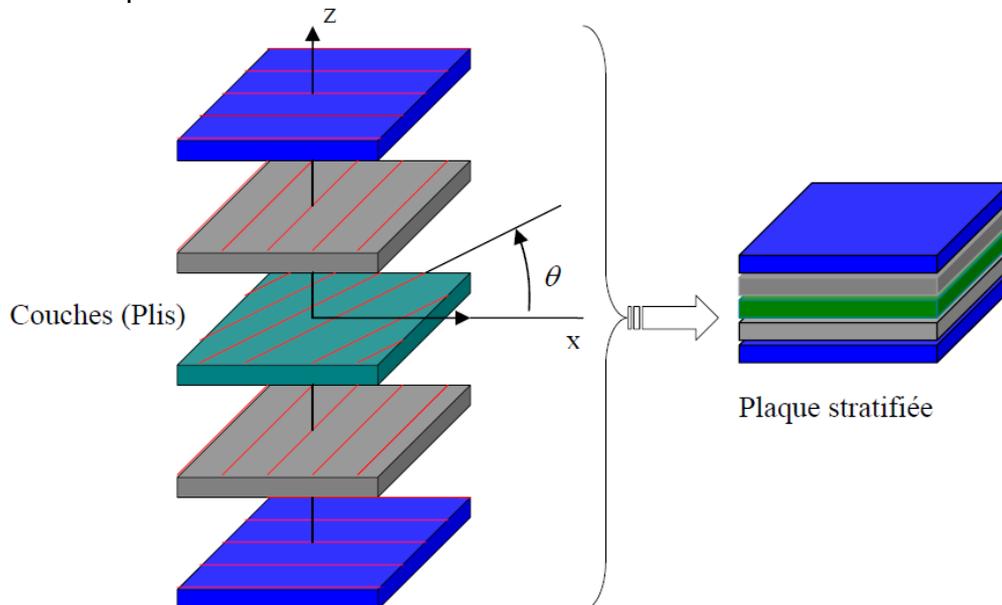
### II.1. Introduction

Des matières composites, particulièrement des plaques stratifiées, ont largement répondues aux besoins des constructeurs dans divers genres des machines tel que les structures aéronautiques, astronomiques, marines, transport (automobiles etc.) et le génie civil, à cause de leur haute rigidité, leur poids et à la haute résistance au choc et la forte anisotropie. Ces concepts donnent une importance à l'étude des matériaux composites considérés sous la forme des plaques constituées des couches différentes ou non. En effet, plusieurs auteurs ont proposés des théories se basant sur des approches analytiques aux problèmes des plaques composites stratifiées.

La théorie classique des plaques stratifiées est celle basée sur la plus ancienne hypothèse de Kirchhoff qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre communément associée à Mindlin [7] qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Elle conduit, de par l'hypothèse (des sections droites restent droites) à un vecteur des contraintes de cisaillement transversal constant dans l'épaisseur, ce qui oblige l'introduction des facteurs de corrections. Certes, les facteurs de correction du cisaillement transversal, une fois introduits dans les modèles du 1er ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluation dépend malheureusement du nombre de stratifications. Pour écarter à jamais ce type de problème, des théories d'ordre supérieur ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney [72], qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à 3. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique; elle exige en effet un grand nombre de paramètres. D'autres théories sont apparues par la suite, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

## II.2. Définition d'un stratifié

On appelle « stratifié » un matériau composé d'un ensemble ordonné de couches d'orientation et d'épaisseur données, constituées de divers matériaux (figure II.1). Une couche d'un stratifié est souvent appelée une strate. Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié. Par exemple, un stratifié de type  $[90^\circ, 0^\circ]_{2s}$  est constitué en fait de 8 couches orientées comme suit : deux groupes de plis à  $90^\circ$  et  $0^\circ$ , puis par symétrie de deux groupes de plis à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure.



**Figure II.1:** Nomenclature des stratifiés composites.

Une des propriétés essentielles des matériaux composites est le caractère directionnel de leurs propriétés mécaniques. En effet, ces matériaux ne possèdent pas du tout les mêmes propriétés dans le sens des renforts que dans la direction perpendiculaire aux renforts. Ce type de propriétés est souvent modélisé par une loi de comportement élastique orthotrope, loi qui permet de représenter un matériau dont les propriétés mécaniques élastiques possèdent trois directions principales orthogonales (soit trois plans de symétrie). Ce type de loi permet à la fois de modéliser des composites fibreux unidirectionnels et des composites à fibres tissées, comme aussi des matériaux plus isotropes comme par exemple les plastiques renforcés de fibres courtes ou même des matériaux isotropes standard. La loi de comportement d'un

matériau orthotrope élastique en déformations infinitésimales, exprimée dans le repère d'orthotropie du matériau, s'écrit [73]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.1a})$$

Où les constantes de rigidités sont exprimées par :

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad \bar{C}_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad \bar{C}_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ \bar{C}_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \quad \bar{C}_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad \bar{C}_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ \bar{C}_{44} &= G_{23}, \quad \bar{C}_{55} = G_{13}, \quad \bar{C}_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (\text{II.1b})$$

$$\text{Avec :} \quad \Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

Et le lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de poisson est exprimé par :

$$\nu_{ji} = \frac{E_j}{E_i} \nu_{ij} \quad \text{pour } i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.1c})$$

Où les différentes variables sont définies ainsi :

$\sigma_{ij}$  : Tenseur des contraintes nominales représenté sous forme vectorisée ;

$\varepsilon_{ij}$  : Tenseur des déformations infinitésimales représenté sous forme vectorisée ;

$\bar{C}_{ij}$  : Tenseur d'élasticité linéaire orthotrope exprimé sous forme matricielle dans le repère des directions principales du matériau ;

$E_i$  : Module d'élasticité dans la direction principale  $i$  ;

$\nu_{ij}$  : Coefficient de Poisson dans la direction  $j$  pour une traction en  $i$  ;

$G_{ij}$  : Module de cisaillement dans le plan  $ij$ .

Nous remarquons que pour définir un matériau avec ce modèle, dix paramètres constitutifs doivent être déterminés, soit trois modules d'élasticité, trois coefficients de Poisson, trois modules de cisaillement, ainsi que la masse volumique du matériau. Dans ce modèle, les directions principales forment un trièdre orthogonal droit. Il faut également noter que le modèle d'élasticité orthotrope est plus général qu'un modèle de composite unidirectionnel, souvent considéré comme isotrope transverse. On obtient un modèle de matériau composite fibreux isotrope transverse en imposant que :

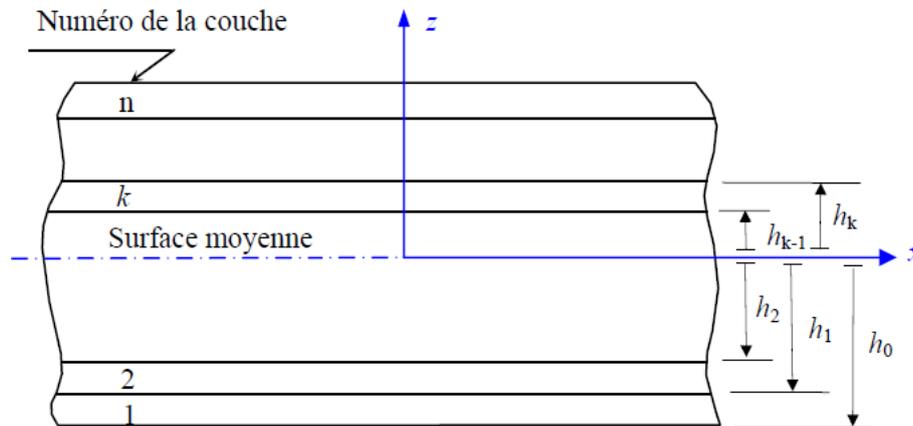
- $E_2$  et  $E_3$  sont égaux au module d'élasticité transverse  $E_T$ ,  $E_1$  étant alors égal au module d'élasticité  $E_L$  dans la direction principale (des fibres).
- $G_{12}$  et  $G_{13}$  sont égaux au module de cisaillement  $G_{LT}$  entre la direction principale et le plan transverse,  $G_{23}$  étant alors égal au module de cisaillement  $G_{TT}$  dans le plan transverse.
- $\nu_{12}$  et  $\nu_{13}$  sont égaux au coefficient de Poisson  $\nu_{LT}$  entre les directions principale et transverse,  $\nu_{23}$  étant alors égal au coefficient de Poisson  $\nu_{TT}$  dans le plan transverse.

On peut ainsi décrire un matériau composite unidirectionnel isotrope transverse par six constantes de matériau :  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $G_{LT}$ ,  $G_{TT}$ ,  $\nu_{LT}$  et  $\nu_{TT}$ . Cependant, en raison des procédés de mise en œuvre des matériaux composites, on remarque souvent qu'un matériau composite unidirectionnel réel ne peut pas être considéré comme parfaitement isotrope transverse. Ainsi, en toute généralité, pour des structures plaques ou coques, les constantes nécessaires à la caractérisation d'un matériau orthotrope sont  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{13}$  et finalement  $\nu_{12}$ .

### II.3. Modélisation géométrique

Les coordonnées du stratifié sont définies avec un axe  $z$  perpendiculaire au plan de stratifié. L'origine de l'axe  $z$  est au centre géométrique (plan médian) du stratifié et les coordonnées dans le plan  $xy$  sont arbitraire. Il est cependant habituel d'assigner l'axe des  $x$  à une direction spécifique de changement ou une direction principale de la structure. Une fois que le système de coordonnées est établi, les angles des strates  $\theta_k$  sont définis comme indiqué à la (figure II.1) c'est-à-dire que  $\theta_k$  est l'angle entre la direction des fibres et l'axe  $x$ . Pour des

raisons d'analyse et de conception du stratifié, il est pratique de définir les coordonnées de la couche ( $k$ ), comme montré sur la (figure II.2) suivante :



**Figure II.2:** Modélisation géométrique de stratifié.

Les notations utilisées sont reportées sur la (figure II.2). L'élément stratifié est constitué de  $n$  couches numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme un plan de référence  $Oxy$  (plan moyen) et l'axe  $Oz$  est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche ( $k$ ) est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure ( $h_{k-1}$ ) et de sa face supérieure ( $h_k$ ).

#### II.4. Comportement mécanique des matériaux stratifiés

L'étude du comportement mécanique élastique d'une structure constituée de matériaux composites est généralement analysée par la théorie des plaques stratifiées, basé sur une évaluation du champ des contraintes et champs des déplacements en tout point de la structure. Cette étude comportera deux phases:

1. L'étude du comportement mécanique de chaque couche, parfois appelé comportement micromécanique ou microscopique du matériau composite. Cette étude est souvent désignée par microanalyse du matériau composite;
2. L'étude du comportement global du matériau constitué de plusieurs couches, et désigné généralement par comportement macroscopique du matériau composite ou comportement du stratifié.

Ces deux études étant effectuées, le comportement mécanique global d'une structure en composite sera ensuite analysé en adaptant les outils classiques du calcul des structures au comportement macroscopique des matériaux composites.

Nous développerons donc de manière assez détaillée les éléments de cette théorie en considérant les hypothèses suivantes :

- L'interface entre les couches est parfaite (Continuité des déplacements et des déformations) ;
- Chaque couche est un matériau homogène avec des propriétés effectives connues ;
- Les propriétés de la couche individuelle peuvent être isotropes, orthotropes ou transversalement isotropes ;
- Chaque couche est dans un état de contrainte plane ;
- Le stratifié se déforme selon les hypothèses de « Kirchhoff - Love » pour la flexion et la traction des plaque minces : La normale au plan médium reste droite et est normale au plan médium déformé après déformation ; Les normales au plan médium ne changent pas de longueur.

#### II.4.1. Champ des déplacements

La théorie classique des stratifiés se situe dans le cadre général des schémas du premier degré de la théorie des plaques qui ne prend pas en compte le cisaillement transverse. Ces schémas expriment les déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  en un point de la plaque, de coordonnées  $(x, y, z)$  rapportées au plan moyen de la plaque, sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Sachant que  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont les déplacements d'un point  $(x, y, z = 0)$  du plan moyen

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= u_0(x, y, 0), \\ v_0(x, y) &= v_0(x, y, 0), \\ w_0(x, y) &= w_0(x, y, 0) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

### II.4.2. Champ des déformations

A partir du champ de déplacement de la relation (II.2), on peut déduire le champ de déformation qui peut être exprimé en coordonnées cartésiennes par les relations de la théorie d'élasticité linéaire suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\
 \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \\
 \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x, \\
 \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y,
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

La théorie classique simplifiée des stratifiés fait l'hypothèse que la déformation est continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre. Le stratifié se comporte comme une seule couche (afin d'éviter le délaminage) mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales.

Alors toute droite normale à la surface moyenne avant déformation restera droite et normale et gardera une longueur constante après déformation de la plaque, donc la théorie classique des stratifiés néglige le cisaillement transverse:  $\gamma_{xz} = 0$  et  $\gamma_{yz} = 0$  ce qui conduit d'après les relations (II.4) à définir les rotations dues à la flexion (sans cisaillement):

$$\begin{aligned}
 \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \\
 \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

En tenant compte de ces deux relations, Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après les expressions (II.2) par :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y), \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y), \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \tag{II.6}$$

Le champ des déformations s'écrit donc sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{II.7}$$

En introduisant les déformations en membrane :

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y), \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y), \quad \gamma_{xy}^0 = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \tag{II.8}$$

Et les déformations en flexion et torsion dépendent de la matrice des courbures de la poutre sollicitée en flexion:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y), \quad k_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y), \quad k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y) \tag{II.9}$$

L'état de déformation  $\{\varepsilon\}$ , en tout point du stratifié, peut être calculé à partir de la déformation plane  $\{\varepsilon^0\}$  et de la courbure  $\{k\}$  du plan moyen en utilisant l'expression finale qui emploie l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \tag{II.10}$$

### II.4.3. Champs de contraintes

Le champ de contraintes dans la couche  $k$  s'exprime par la relation générale sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k \tag{II.11}$$

L'utilisation des relations (II.7) et (II.11), nous aide à récrire cette dernière expression sous une forme plus explicite:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Sous forme compacte :

$$\{\sigma\}^k = [\bar{Q}]^k \{\varepsilon^0\} + z[\bar{Q}]^k \{k\} \quad (\text{II.13})$$

La matrice  $\{\sigma\}^k$  représente la matrice des contraintes dans la couche  $k$  :  $h_{k-1} \leq z \leq h_k$ .

La matrice de rigidité réduite  $[\bar{Q}_{ij}]^k$  varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

#### II.4.4. Comportement en membrane-flexion-torsion

Le comportement élastique d'un pli constitue la base avec laquelle le comportement du stratifié est décrit, en tenant compte des caractéristiques indépendantes de chaque pli.

Dans ce paragraphe, on va étudier le comportement du stratifié lorsqu'il est soumis à un ensemble de sollicitations, cette étude est indispensable si l'on désire que la déformation du stratifié ne soit pas trop importante, ou bien que les contraintes conservent des valeurs admissibles.

##### II.4.4.1. Comportement en Membrane

Nous considérons dans ce qui suit un stratifié plan pourvu de la symétrie miroir. L'épaisseur totale du stratifié est noté  $h$ . il est constitué de  $n$  plis. Le pli numéro  $k$  a une épaisseur notée  $e_k$ . Le plan  $(x-y)$  est le plan de symétrie (ou plan moyen).

Le composite stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan, qui sont notées  $(N_x, N_y, N_{xy})$  par unité de longueur suivant la direction  $y$  ou la direction  $x$  (figure II.3). Il s'agit là d'efforts dits de membrane, ou éléments de réduction pour les contraintes, ou encore flux d'efforts dans le stratifié. Les efforts de membrane sont obtenus par intégration des contraintes par unité de longueur de chaque couche à travers l'épaisseur du stratifié.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.14})$$

$N_x$  : Effort résultant dans la direction x par unité de longueur suivant y.

$N_y$  : Effort résultant dans la direction y par unité de longueur suivant x.

$N_{xy}$  : Cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction y.

Dans le cas du stratifié, on a une répartition continue des contraintes dans une couche, mais discontinue d'une couche à une autre.

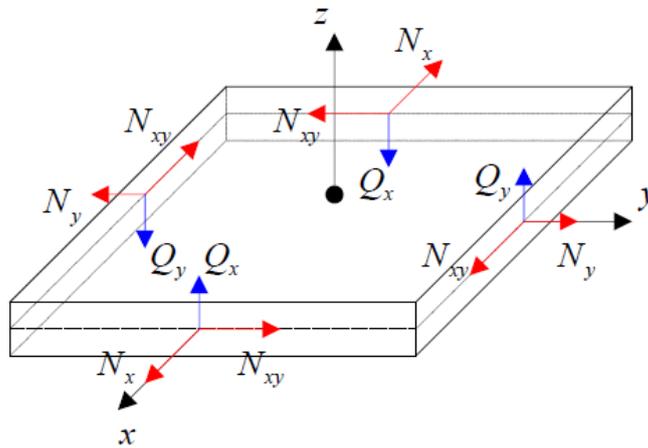


Figure II.3 : Résultantes des efforts sur une plaque stratifiée.

Les efforts en membranes seront exprimés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k dz \quad (\text{II.15})$$

Où  $h_{k-1}$  et  $h_k$  sont respectivement les coordonnées de la couche d'ordre  $k$  et  $k-1$  dans la direction perpendiculaire au stratifié définies par la figure II.2.

La substitution de l'équation (II.12) dans l'équation (II.15) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.16})$$

Puisque la matrice  $[\bar{Q}_{ij}]^k$  n'étant pas en fonction de la distance  $z$ ,  $\{\varepsilon^0\}$  et  $\{k\}$  sont indépendantes de  $z$  et de l'ordre de la disposition des couches dans le stratifié, la relation (II.16) peut alors être écrite comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Dont les coefficients  $A_{ij}$  sont appelés les rigidités de membrane :

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k - h_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k e_k \quad (\text{II.18})$$

Et Les coefficients  $B_{ij}$  sont appelés les rigidités de couplage membrane-flexion :

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k e_k z_k \quad (\text{II.19})$$

#### II.4.4.2. Comportement en flexion et torsion

##### ▪ Résultantes en flexion

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes sur un élément du stratifié. Les moments de flexion et de torsion sont définis par:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k z dz \quad (\text{II.20})$$

Les composantes  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$ , respectivement, et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la (figure II.4).

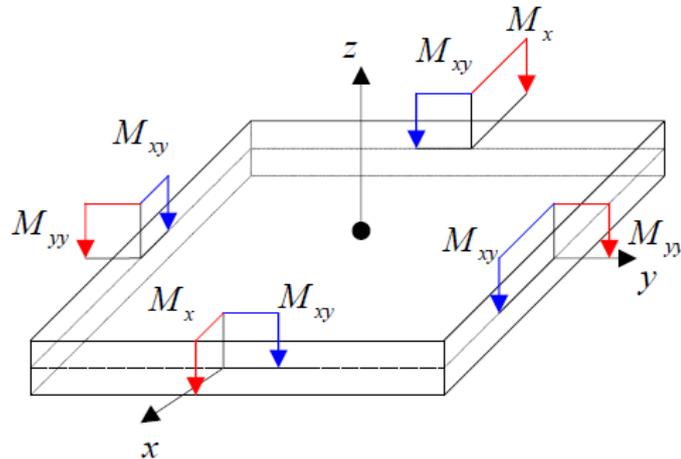


Figure II.4 : Moments de flexion et de torsion sur une plaque stratifiée.

Substituant l'équation (II.12) dans l'équation (II.20), nous aurons l'expression des moments par unité de longueur :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme contractée suivante :

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{k\} \quad (\text{II.22})$$

Dont les coefficients  $D_{ij}$  sont appelés les rigidités de flexion :

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^k \left( e_k z_k^2 + \frac{z_k^3}{12} \right) \quad (\text{II.23})$$

▪ **Résultantes en cisaillement**

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié (figure II.3) :

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{II.24})$$

**II.4.5. Equation constitutive de la théorie classique**

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures dans le cadre de la théorie classique. Elle s'obtient en regroupant les expressions (II.17) et (II.21) suivant une seule écriture matricielle sous la forme [74] :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Sous forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

**II.5. Constantes de rigidité d'un stratifié orthotrope**

Un matériau orthotrope, soumis à un état de contraintes planes est caractérisé par ses modules de l'ingénieur  $E_L, E_T, \nu_{LT}$  et  $G_{LT}$  rapportés à ses axes principaux ( $L, T, T'$ ). La direction  $L$  est la direction des fibres pour un composite unidirectionnel ou la direction chaîne pour un composite à renfort tissu. Les directions  $T$  et  $T'$  sont les directions transverses aux fibres pour le composite unidirectionnel (figure II.5a). Pour un matériau à renfort tissu, la direction  $T$  est celle de la trame et la direction  $T'$  est orthogonale au plan du tissu (figure II.5b).

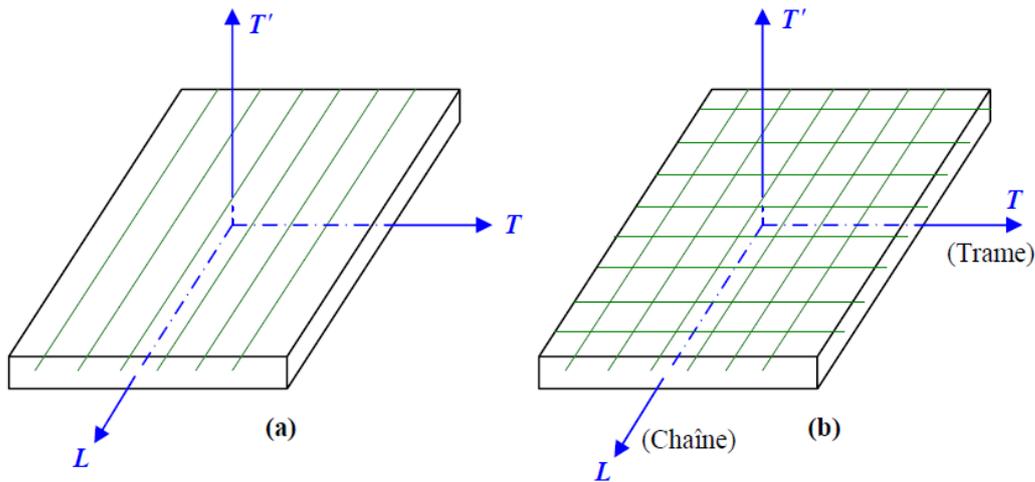


Figure II.5 : Directions principales : a) d'un matériau unidirectionnel, b) d'un matériau à renfort tissu,

Pour un état de contraintes planes, les relations contraintes déformations s'écrivent dans les axes des matériaux suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_T \\ \sigma_L \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Où les constantes de la matrice de rigidité  $Q_{ij}$  sont exprimées par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}}, & Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

En fonction des modules de l'ingénieur :  $E_L$  et  $E_T$  les modules d'Young longitudinal et transversal,  $\nu_{LT}$  le coefficient de Poisson mesuré dans un essai de traction longitudinale et  $G_{LT}$  le module de cisaillement mesuré dans le plan de la couche.

## II.5.1. Équations de mouvement des stratifiés orthotropes

### II.5.1.1. Stratifié orthotrope dans ses axes

Dans le cas d'une couche orthotrope d'épaisseur  $h$ , et dans le cas où les axes  $(L, T, T')$  du stratifié orthotrope coïncident avec les axes  $(x, y, z)$  de référence de la plaque, l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Où les coefficients de rigidité sont exprimés par :

$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11}h, & D_{11} &= Q_{11} \frac{h^3}{12}, \\ A_{12} &= Q_{12}h, & D_{12} &= Q_{12} \frac{h^3}{12}, \\ A_{22} &= Q_{22}h, & B_{ij} &= 0, & D_{22} &= Q_{22} \frac{h^3}{12}, \\ A_{16} &= A_{26} = 0, & D_{16} &= D_{26} = 0, \\ A_{66} &= Q_{66}h, & D_{66} &= Q_{66} \frac{h^3}{12} \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Dans le cas d'un stratifié orthotrope rapporté à ses axes, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations en membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

Les équations de mouvement sont ensuite obtenues en reportant l'équation constitutive (II.29) du stratifié dans les relations fondamentales des plaques. Ces équations de mouvement s'écrivent :

$$A_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial x \partial y} = \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.31})$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.32})$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{II.33})$$

Où  $q$  est la charge de pression exercée sur le stratifié.

### II.5.1.2. Stratifié orthotrope hors axes

Dans le cas où les axes  $(L, T)$  du matériau orthotrope font un angle  $\theta$  avec les axes de référence  $(x, y)$ , (figure II.6), l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Où les coefficients de rigidité sont exprimés par :

$$A_{ij} = \bar{Q}_{ij} h, \quad B_{ij} = 0, \quad D_{ij} = \bar{Q}_{ij} \frac{h^3}{12} \quad (\text{II.35})$$

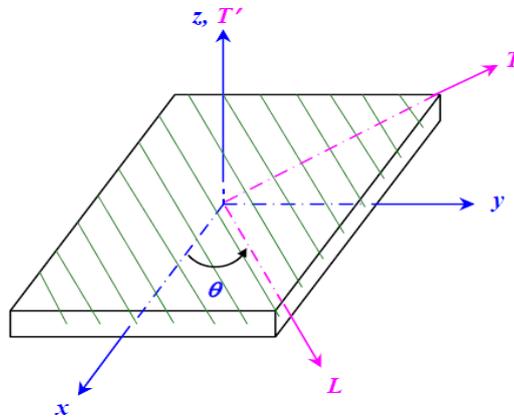


Figure II.6 : Stratifié hors axes.

Ces relations introduisent les coefficients de rigidité réduite hors axes exprimés en fonction des coefficients rapportés aux axes du stratifié. A nouveau, il y a l'absence de couplage membrane flexion-torsion. Toutefois, contrairement au cas d'une couche orthotrope dont les axes coïncident avec les axes de référence de la plaque, nous observons un couplage traction-cisaillement, au niveau du comportement en membrane, ainsi qu'un couplage flexion-torsion. Les équations de mouvement (II.31) à (II.33) sont alors modifiées suivant :

$$A_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial x^2} + (A_{16} + A_{66}) \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.36})$$

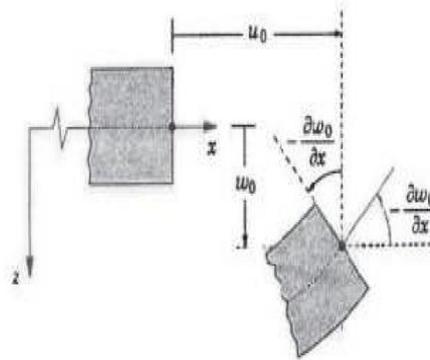
$$A_{16} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial t^2}, \quad (\text{II.37})$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{II.38})$$

## II.7. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (Classical Plate Theory CPT) :

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement ( $L/h$ ).

La théorie CPT (Classic alplate Theory) se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, (Figure II.7), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. [75]



**Figure II.7 :** Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff. [75]

Le champ de déplacements basé est donnée par :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la Plaque ( $z = 0$ ). Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

### II.8. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear déformation Théorie(FSDPT))

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre continué la théorie classique des plaques en tenant compte l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction de correction de cisaillement. (Figure II.8)

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

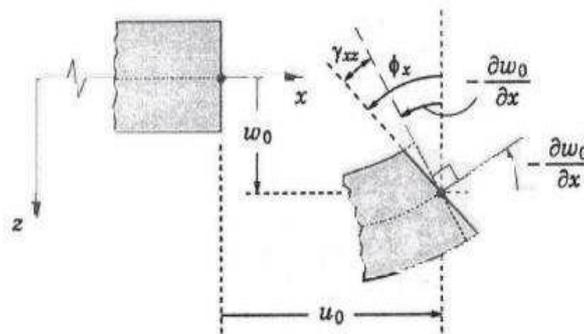


Figure : II.8. Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin. [75]

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie Classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement  $(\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y})$

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en Cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

### II.9. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher-Order Shear Deformation Theory HSDPT) :

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction (Figure II.9).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z)\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z)\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement  $(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$ ,  $\Psi(z)$  est une fonction de cisaillement transverse caractérise les théories correspondante.

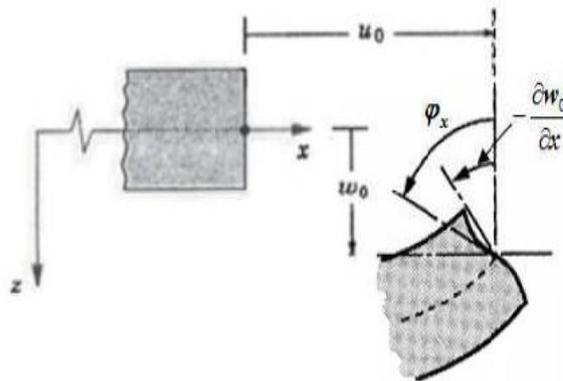


Figure : II.9. Illustration de la plaque de théorie d'ordre élevé. [75]

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant  $f(z)=0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDPT) peut être obtenue par  $f(z)=z$ .

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale. Nous citons en particulier :

L'approche d'Ambartsumya avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)
 \tag{II.4}$$

L'approche de Reissner avec :

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.5})$$

L'approche de Levinson, Murthy avec:

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier avec ;

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{z}{h} \quad (\text{II.7})$$

Touratier propose le modèle "sinus" (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur.

La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\
&= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right)
\end{aligned} \tag{II.8}$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy. Récemment, Afaq et al, proposent un modèle exponentiel (ESDPT) avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \tag{II.9}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$ , alors que la fonction ne permet qu'un développement en puissance impair. La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate Theory HSDPT) développée est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \tag{II.10}$$

et

$$\Psi_{x=0}$$

**II.10. Conclusion**

Au cours de ce chapitre, on a présenté les différentes théories des plaques stratifiées.

On peut conclure ces théories :

Théorie classique des stratifiés : néglige la contrainte du cisaillement transversal avec un facteur de correction.

Théorie du premier ordre : prise en compte la contrainte du cisaillement transversal est linéaire avec un facteur de correction.

Théorie d'ordre élevé : prise en compte la contrainte du cisaillement transversal est de différente forme «suivant la théorie» et sans facteur de correction ; de cinq inconnu ou plus sauf la théorie raffinée à deux variables «RPT» est de quatre inconnus. [76]

# *Chapitre III*

*Etude du comportement vibratoire des  
plaques composites stratifiées  
à empilements équilibrés*

## **Chapitre III : Etude du comportement vibratoire des plaques composites stratifiées antisymétriques**

### **III.1. Introduction**

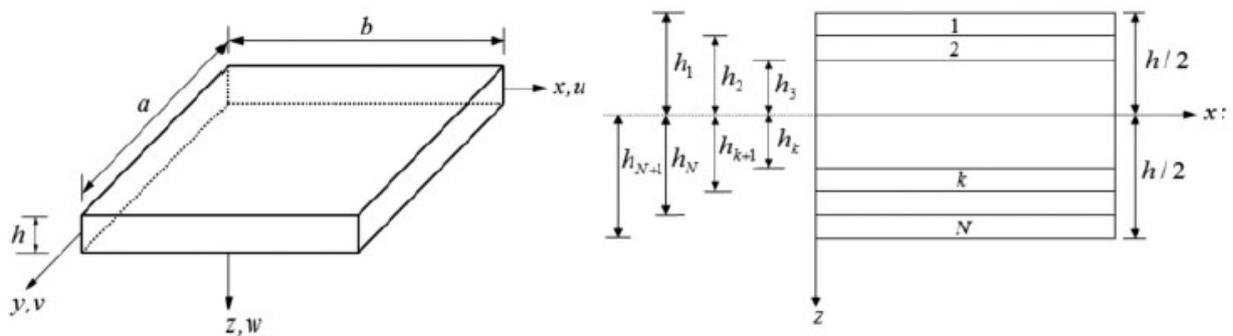
La détermination de la contrainte de cisaillement transverse développée dans l'épaisseur des poutres et des plaques soumises à la flexion, est habituellement effectuée sous quelques hypothèses bien connus, basées sur la forme du champ de déplacement à travers leurs épaisseurs. Ces théories étant conçues comme une approximation d'une réalisation de trois dimensions, on comprend qu'il puisse en exister plusieurs, différentes entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées. Autrefois les fréquences propres de vibration d'une structure des rigidités des matériaux constitutif, toutefois la recherche systématique des modes n'est pas aisée car la déformée d'une plaque résulte de la superposition des déformées de différents modes. Dans tous les cas les vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinématique et l'énergie de déformation des éléments des plaques.

La vibration libre des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie d'ordre élevé à deux variables est un travail de recherche très intéressant. La présente théorie identifie la distribution trigonométrique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque, et qui satisfait aux conditions aux limites des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. L'équation du mouvement est dérivée de principe des travaux virtuels. La technique de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques exactes des plaques composites stratifiées antisymétriques à plis croisés et à plis équilibrés. Des résultats numériques obtenus par la présente théorie raffinée à quatre variables sont comparés aux autres solutions d'élasticité en trois dimensions et celles calculées à l'aide du premier ordre et les autres théories d'ordre supérieur. On peut conclure que la théorie proposée est non seulement précise mais également efficace pour prédire les fréquences naturelles des plaques composites stratifiées.

### III.2. Configuration géométrique

En Considérons à titre d'exemple numérique une plaque rectangulaire en matériaux composites stratifiées antisymétriques, simplement appuyée de longueur ( $b$ ), une largeur ( $a$ ) et une épaisseur ( $h$ ), comme représentée sur la figure (III.1) ci-après. Cette plaque est constituée d'un nombre  $n$  de couches homogènes.

Le système global de coordonnées cartésiennes est choisi avec l'origine dans le coin et sur le plan médian de la plaque ( $z = 0$ ). Par conséquent, le domaine de la plaque est défini comme :  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  et  $-h/2 \leq z \leq h/2$ .



**Figure III.1** : Géométrie de la plaque et système de numérotation des couches.

### III.3. Hypothèses de la présente théorie à quatre variables

Le champ de déplacement de la présente théorie raffinée est choisi selon les hypothèses suivantes:

- 1) Le déplacement transversale est divisé en deux composantes : la première est celle de la flexion ( $w_b$ ) et la deuxième est de cisaillement ( $w_s$ ) ;
- 2) Les composantes de flexion des déplacements dans le plan sont similaires à celles données par la théorie classique CLPT dans certains aspects tels que les conditions aux limites et les expressions de moments ;
- 3) La contrainte normale dans la direction transversale ( $\sigma_z$ ) est négligeable devant les autres contraintes normales ( $\sigma_x$ ) et ( $\sigma_y$ ) ;
- 4) Les composantes de cisaillement des déplacements dans le plan donnent lieu à des variations trigonométriques des contraintes de cisaillement et par conséquent à des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque de telle manière que ces contraintes disparaissent sur la surface supérieure et inférieure de la plaque.

### III.4. Champ de déplacement

Sur la base de ces hypothèses, le champ de déplacement en un point quelconque de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la plaque peut être obtenu sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (III.1)$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)$$

$f(z)$  Est appelée fonction de cisaillement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque en matériaux composite stratifié .ainsi le choix de la fonction  $f(z)$  est basé sur les résultats de l'élasticité tridimensionnelle ou toute autre information sur la distribution des contraintes de cisaillement transverse. Dans cette étude la fonction de cisaillement est exprimée par:

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (III.2)$$

Et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (III.3)$$

Où  $u_0$  et  $v_0$  désignent les déplacements le long des directions de coordonnées  $x$  et  $y$  d'un point matériel situé sur le plan médian de la plaque;  $w_b$  et  $w_s$  sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement. Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$ .

### III.5. Champ de déformations

Selon le champ proposé, la déformation transverse normale est encore nulle ( $\epsilon_z$ ). Le champ de déformation est obtenu en substituant les termes du champ de déplacement dans la relation d'élasticité linéaire déformations-déplacements. Il est donné comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.4})$$

Alors la substitution du déplacement de l'équation (III.1) dans l'équation (III.4) donne :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

Où les termes qui groupent le champ de déformation ont pour expressions :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

### III.6. Champ de contraintes

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour une plaque composite stratifiée être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Où :  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. Les coefficients de rigidités  $Q_{ij}$  peuvent être exprimés en fonction des constantes d'ingénieur comme :

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (\text{III.8})$$

$$Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}$$

Puisque les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées dans le repère global du stratifié  $(x, y, z)$ . Les relations constitutives pour n'importe quelle couche  $k$  d'un matériau stratifié dans le système de coordonnées  $(x, y)$ , correspondent à un état de contraintes planes, elles s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité transformés  $\bar{Q}_{ij}$  sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k, \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^k \quad (\text{III.9})$$

Où  $\bar{Q}_{ij}$  sont les coefficients de rigidité transformés. Cependant un point très important peut ajouter pour l'utilisation des équations stratifiées est que la matrice transformer  $[\bar{Q}_{ij}]$  varier avec l'orientation des fibres de chaque couche. Cette dernière peut être exprimée par les relations suivantes [52]:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Où  $(\theta)$  est l'angle de rotation des fibres de chaque couche avec les axes de coordonnées de référence.

### III.7. Equations de mouvement

Les équations de mouvement de la présente théorie sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. La version dynamique de ce principe pour étudier les problèmes de flexion des plaques stratifiées antisymétriques considérées est donnée comme :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \int_0^a \int_0^b \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dy dz \\ & + \sum_{k=1}^n \int_0^a \int_0^b \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \delta \mathbf{v} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \delta \mathbf{w} \right) dx dy dz - \int_0^a \int_0^b q(x, y) \delta w dx dy = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Où  $(\rho^k)$  est la densité du matériau,  $q(x, y)$  est la charge transversale agissant sur la surface supérieure de la plaque et  $(\delta)$  est l'opérateur variationnel. On fait l'intégration de l'équation (III.11) à travers l'épaisseur de la plaque, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b \left( N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + N_y \delta \varepsilon_y + M_y^b \delta k_y^b + M_y^s \delta k_y^s \right. \\ & \left. + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_x \delta \gamma_{xz}^s + Q_y \delta \gamma_{yz}^s \right) dx dy \\ & + \sum_{k=1}^n \int_0^a \int_0^b \int_{h_k}^{h_{k+1}} \rho^k \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \delta \mathbf{v} + \frac{\partial^2 (\mathbf{w}_b + \mathbf{w}_s)}{\partial t^2} (\delta \mathbf{w}_b + \delta \mathbf{w}_s) \right) dx dy dz \quad (\text{III.12}) \\ & - \int_0^a \int_0^b q(x, y) (\delta \mathbf{w}_b + \delta \mathbf{w}_s) dx dy = 0 \end{aligned}$$

Où les résultantes des contraintes  $(N_x, N_y, N_{xy}), (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b), (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s)$  et  $(Q_x, Q_y)$  sont définis comme :

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz, \\ (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz, \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f(z) dz, \\ (Q_x, Q_y) &= \sum_{k=1}^n \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Les contraintes résultantes définies dans l'équation (III.13) peuvent être liées aux contraintes définies par l'équation (III.5) par les équations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & A_{12} & B_{12} & C_{12} & A_{16} & B_{16} & C_{16} \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & A_{22} & B_{22} & C_{22} & A_{26} & B_{26} & C_{26} \\ A_{16} & B_{16} & C_{16} & A_{26} & B_{26} & C_{26} & A_{66} & B_{66} & C_{66} \end{bmatrix} \{\phi\}, \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & D_{11} & E_{11} & B_{12} & D_{12} & E_{12} & B_{16} & D_{16} & E_{16} \\ B_{12} & D_{12} & E_{12} & B_{22} & D_{22} & E_{22} & B_{26} & D_{26} & E_{26} \\ B_{16} & D_{16} & E_{16} & B_{26} & D_{26} & E_{26} & B_{66} & D_{66} & E_{66} \end{bmatrix} \{\phi\}, \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & E_{11} & F_{11} & C_{12} & E_{12} & F_{12} & C_{16} & E_{16} & F_{16} \\ C_{12} & E_{12} & F_{12} & C_{22} & E_{22} & F_{22} & C_{26} & E_{26} & F_{26} \\ C_{16} & E_{16} & F_{16} & C_{26} & E_{26} & F_{26} & C_{66} & E_{66} & F_{66} \end{bmatrix} \{\phi\} \quad (\text{III.16})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{55} & 0 \\ 0 & P_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^s \\ \gamma_{yz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.17})$$

Où les coefficients de rigidité de la plaque  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}$  et  $P_{ij}$  et les éléments du vecteur  $\{\phi\}$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \sum_{K=1}^n \bar{Q}_{ij} \int_{h_k}^{h_{k+1}} (1, z, z^2) dz; \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ (C_{ij}, E_{ij}) &= \sum_{K=1}^n \bar{Q}_{ij} \int_{h_k}^{h_{k+1}} (1, z) f(z) dz; \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ F_{ij} &= \sum_{K=1}^n \bar{Q}_{ij} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [f(z)]^2 dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ P_{ij} &= \sum_{K=1}^n \bar{Q}_{ij} \int_{h_k}^{h_{k+1}} [g(z)]^2 dz \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

$$\{\phi\} = \{ \varepsilon_x^0, k_x^b, k_x^s, \varepsilon_y^0, k_y^b, k_y^s, \gamma_{xy}^0, k_{xy}^b, k_{xy}^s \}^T$$

En faisant l'intégration par parties de l'équation (III.12) et ensuite la collection des coefficients ou bien des termes de  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$  et  $\delta w_s$ , on obtient les équations de mouvement suivantes:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial t^2}; \\ \delta \mathbf{v}_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial t^2}; \\ \delta \mathbf{w}_b : \frac{\partial^2 \mathbf{M}_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y^b}{\partial x \partial y} + \mathbf{q} &= I_0 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{w}_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2} \right) \\ &- I_2 \left( \frac{\partial^4 \mathbf{w}_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \mathbf{w}_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^4 \mathbf{w}_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \mathbf{w}_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right); \\ \delta \mathbf{w}_s : \frac{\partial^2 \mathbf{M}_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathbf{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{Q}_y}{\partial y} + \mathbf{q} &= I_0 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{w}_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^4 \mathbf{w}_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \mathbf{w}_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \\ &- I_4 \left( \frac{\partial^4 \mathbf{w}_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \mathbf{w}_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

En remplaçant les contraintes résultantes des équations (III.14) à (III.17) dans l'équation (III.19), les équations de mouvement de la présente théorie peuvent être réécrites comme:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_0 : A_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial y^2} \\ - B_{11} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_b}{\partial x^3} - B_{26} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_b}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 \mathbf{w}_b}{\partial x \partial y^2} - 3B_{16} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_b}{\partial x^2 \partial y} - C_{11} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_s}{\partial x^3} - C_{26} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_s}{\partial y^3} \\ - (C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^3 \mathbf{w}_s}{\partial x \partial y^2} - 3C_{16} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_s}{\partial x^2 \partial y} + I_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_0 : A_{16} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial y^2} \\ - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 \mathbf{w}_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{16} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_s}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_b}{\partial x \partial y^2} - C_{22} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_s}{\partial y^3} \\ - (C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^3 \mathbf{w}_s}{\partial x^2 \partial y} - C_{16} \frac{\partial^3 \mathbf{w}_s}{\partial x^3} - 3C_{26} \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial x \partial y^2} + I_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_0}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_b : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} \\
 & + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{26}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
 & - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - E_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - E_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} - 4E_{16} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} \\
 & - 4E_{26} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} + I_0 \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) - I_1 \left( \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + q = 0
 \end{aligned} \tag{III.22}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_s : & C_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + 3C_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + C_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + (C_{12} + 2C_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + C_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
 & + C_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - 3C_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - E_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(E_{12} + 2E_{26}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - E_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - 4E_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} \\
 & - 4E_{26} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - 4F_{16} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 4F_{26} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - F_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(F_{12} + 2F_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - F_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + P_{55} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2} \\
 & + 2P_{45} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + P_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + I_0 \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + q = 0
 \end{aligned} \tag{III.23}$$

Pour les plaques stratifiées antisymétriques multicouches à séquence d'empilement croisé :

$$\begin{aligned}
 A_{16} &= A_{26} = B_{16} = B_{12} = B_{26} = B_{66} = C_{16} = C_{12} = C_{66} \\
 &= D_{16} = D_{26} = E_{16} = E_{26} = F_{16} = F_{26} = P_{45} = 0
 \end{aligned} \tag{III.24}$$

Et pour les plaques stratifiées antisymétriques à séquence d'empilement équilibré :

$$\begin{aligned}
 A_{16} &= A_{26} = B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = C_{11} = C_{12} \\
 &= C_{22} = C_{66} = D_{16} = D_{26} = E_{16} = E_{26} = F_{16} = F_{26} = P_{45} = 0
 \end{aligned} \tag{III.25}$$

Les constantes d'inertie de masse apparaissent dans les équations de mouvement (III.20) à (III.23) sont définies comme Suit :

$$\begin{aligned}
 (I_0, I_1) &= \sum_{K=1}^n \rho^k \int_{h_k}^{h_{k+1}} (1, z^2) dz, \\
 I_2 &= \sum_{K=1}^n \rho^k \int_{h_k}^{h_{k+1}} z f(z) dz, \\
 I_3 &= \sum_{K=1}^n \rho^k \int_{h_k}^{h_{k+1}} [f(z)]^2 dz
 \end{aligned} \tag{III.26}$$

#### IV.8. Solutions analytiques des plaques stratifiées simplement appuyées

Pour Analyser la vibration libre des plaques composite stratifiées antisymétriques simplement appuyées, nous avons utilisés la technique de Navier. Dans cette étude deux types de plaques stratifiées différentes sont considérés, à empilement croisés  $[0/90]_n$ , et à empilement équilibré  $[\theta/-\theta]_n$ . Pour le premier type à plis croisés, les conditions aux limites sur les bords de la plaque simplement appuyée peuvent être exprimées comme:

Aux arêtes  $x=0$  et  $x=a$  :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad (III.27)$$

Et aux arêtes  $y=0$  et  $y=b$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_x = M_y^b = M_y^s = 0 \quad (III.28)$$

Navier a présenté la solution des plaques simplement appuyées par une double série trigonométrie. La solution de Navier transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. Les variables de déplacement  $(u_0, v_0, w_b, w_s)$  qui satisfont les conditions aux limites des plaques stratifiées multicouches à plis croisés et simplement appuyées citées aux équations précédentes (III.27) et (III.28), peuvent être exprimées sous la forme d'une double série trigonométrique selon Reddy [8] :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \sin \omega_{mn} t \\ V_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \cos \omega_{mn} t \\ W_{bmn} \sin \alpha x \sin \beta y \sin \omega_{mn} t \\ W_{smn} \sin \alpha x \sin \beta y \sin \omega_{nm} t \end{Bmatrix} \quad (III.29)$$

Et pour le cas d'un stratifié à plis équilibré, les conditions aux limites reliées aux déplacements pour un bord simplement appuyé sont:

Aux arêtes  $x=0$  et  $x=a$  :

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_{xy} = M_x^b = M_x^s = 0 \quad (III.30)$$

Et aux arêtes  $y=0$  et  $y=b$  :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_{xy} = M_x^b = M_y^s = 0 \quad (III.31)$$

Les variables de déplacement ( $u_0, v_0, w_b, w_s$ ) qui satisfont les conditions aux limites des plaques stratifiées multicouches à plis équilibrés et simplement appuyées, équations (III.30) et (III.31), peuvent être aussi exprimées sous la forme d'une double série trigonométrique :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \cos \omega_{mn} t \\ V_{mn} \cos \alpha x \cos \beta y \sin \omega_{mn} t \\ W_{bmn} \sin \alpha x \sin \beta y \sin \omega_{mn} t \\ W_{smn} \sin \alpha x \sin \beta y \sin \omega_{mn} t \end{Bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Où  $U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}$ , et  $W_{smn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence naturelle associée avec  $(m, n)$  le mode propre de vibration et les constantes  $\alpha = m\pi/a$ ,  $\beta = n\pi/b$ . En substituant les équations (III.29) et (III.32) dans les équations de mouvement (III.20) à (III.23), la vibration libre ( $q=0$ ) des plaques composites stratifiées peut être obtenue à partir de l'équation suivante :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{14} & \mathbf{K}_{24} & \mathbf{K}_{34} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} - \omega_{mn}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{43} & \mathbf{M}_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

Où les éléments de la matrice de rigidité [K] et la matrice de masse [M] sont définis pour un stratifié antisymétrique à empilement croisé et équilibré selon les expressions ci-après.

- Eléments de la matrice de rigidité [K] pour les plaques stratifiées multicouches à empilement croisé :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{11} &= (A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \\
 \mathbf{K}_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta, \\
 \mathbf{K}_{13} &= -\alpha^3 \mathbf{B}_{11}, \\
 \mathbf{K}_{14} &= -\alpha^3 \mathbf{C}_{11}, \\
 \mathbf{K}_{22} &= (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \\
 \mathbf{K}_{23} &= \beta^3 \mathbf{B}_{22}, \\
 \mathbf{K}_{24} &= -\beta^3 \mathbf{C}_{22} \\
 \mathbf{K}_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}\beta^4 \\
 \mathbf{K}_{34} &= E_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(E_{12} + 2E_{66}) + E_{22}\beta^4 \\
 \mathbf{K}_{44} &= F_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(F_{12} + 2F_{66}) + F_{22}\beta^4 + P_{44}\beta^2 + P_{55}\alpha^2
 \end{aligned} \tag{III.34}$$

- Eléments de la matrice de rigidité [K] pour les plaques stratifiées multicouches à empilement équilibré :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{11} &= (A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2), \\
 \mathbf{K}_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta, \\
 \mathbf{K}_{13} &= -(3B_{16}\alpha^2\beta + B_{26}\beta^3), \\
 \mathbf{K}_{14} &= -(3C_{16}\alpha^2\beta + C_{26}\beta^3), \\
 \mathbf{K}_{22} &= (A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2), \\
 \mathbf{K}_{23} &= -(B_{16}\alpha^3 + 3B_{26}\alpha\beta^2), \\
 \mathbf{K}_{24} &= -(C_{16}\alpha^3 + 3C_{26}\alpha\beta^2), \\
 \mathbf{K}_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}\beta^4 \\
 \mathbf{K}_{34} &= E_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(E_{12} + 2E_{66}) + E_{22}\beta^4 \\
 \mathbf{K}_{44} &= F_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(F_{12} + 2F_{66}) + F_{22}\beta^4 + P_{44}\beta^2 + P_{55}\alpha^2
 \end{aligned} \tag{III.35}$$

Et les éléments de la matrice masse [M] pour les plaques stratifiées sont :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{11} &= \mathbf{M}_{22} = \mathbf{I}_0; \\
 \mathbf{M}_{12} &= \mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{13} = \mathbf{M}_{31} = \mathbf{M}_{14}; \\
 \mathbf{M}_{42} &= \mathbf{M}_{24} = 0; \\
 \mathbf{M}_{33} &= \mathbf{I}_1(\alpha^2 + \beta^2) + \mathbf{I}_0; \\
 \mathbf{M}_{34} &= \mathbf{I}_2(\alpha^2 + \beta^2) + \mathbf{I}_0; \\
 \mathbf{M}_{43} &= \mathbf{I}_2(\alpha^2 + \beta^2) + \mathbf{I}_0; \\
 \mathbf{M}_{44} &= \mathbf{I}_3(\alpha^2 + \beta^2) + \mathbf{I}_0;
 \end{aligned} \tag{III.36}$$

L'équation (III.33) représente le problème bien connu de la valeur propre. La procédure de solution de ce problème est donnée par Bathe [52]. De cette solution, on peut obtenir diverses fréquences naturelles pour les plaques en matériaux composites stratifiés antisymétriques.

### **III.9. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution générale pour résoudre le comportement de vibration libre des plaques en matériaux composites stratifiés antisymétriques en utilisant une simple théorie raffinée à quatre variables. Le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La théorie proposée à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description trigonométrique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque.

# *Chapitre IV*

*Résultats et discussion*

## Chapitre IV : Résultats et discussions

### IV.1. Introduction

L'objectif principal de ce travail a été de proposer un modèle analytique basé sur la théorie d'ordre élevé à quatre variables pour l'analyse du comportement vibratoire des plaques simplement appuyées en matériaux composites stratifiés antisymétriques. Plusieurs plaques ont été analysées en fonction de l'orientation des fibres, à cet effet deux types de stratifiés ont été choisis, le premier à empilement croisé et le deuxième à empilement équilibré, notre but est de confronter les résultats obtenus aux résultats des autres modèles d'ordre élevé proposés dans la littérature. Cette théorie est vibrationnelle, elle néglige le coefficient de correction de cisaillement, et donne une description parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres des plaques étudiées.

Dans ce chapitre, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie raffinée pour déterminer les fréquences naturelles adimensionnelles des plaques stratifiés antisymétriques simplement appuyées à empilement croisé et équilibré à la fois. Les effets du rapport de la géométrie de la plaque, le rapport d'élançement, le rapport de rigidité et le nombre de couche sur les fréquences naturelles des stratifiés sont étudiées. Durant cette analyse, les résultats obtenus par la présente théorie sont comparés à ceux des autres théories disponibles dans la littérature, à savoir les théories CPT, FSTD, TSDT et la solution exacte d'élasticité tridimensionnelle. La description des différentes théories des stratifiés sont présentées dans le tableau (IV.1) en fonction de nombre des inconnus et selon le champ de déplacement utilisé. Dans tous les exemples, un facteur de correction de cisaillement de  $5/6$  est utilisé seulement pour la théorie FSTD et nous observons que les inerties rotatives sont incluses dans toutes les théories. Toutes les couches sont assemblées pour avoir la même épaisseur, de la densité et des propriétés matérielles orthotropes dans les axes principaux.

Tableau IV.1 : Les différentes théories des plaques stratifiées

Notation	Théories	Nombre des inconnus
<b>CPT</b>	Théorie classique	3
<b>FSDT</b>	Théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre	5
<b>HSDT</b>	Théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé	5
<b>Présente</b>	La présente théorie raffinée	4

## IV.2. Propriétés des matériaux stratifiées utilisés

A travers ce présent travail de mémoire cinq types de matériaux différents ont été utilisés dont les propriétés matérielles adimensionnelles sont les suivant :

➤ **Matériau 1 :**

$$E_1/E_2 = 25, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5, G_{23}/E_2 = 0.2, \nu_{12} = 0.25$$

➤ **Matériau 2 :**

$$E_1/E_2 = 3, 10, 20, 30, \text{ et } 40, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6, G_{23}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25$$

➤ **Matériau 3 :**

$$E_1/E_2 = 40, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.6, G_{23}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25$$

➤ **Matériau 4 :**

$$E_1 = 276 \text{ GPa}, E_2/E_3 = 6.9 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 4.14 \text{ GPa}, G_{23} = 3.45, \nu_{12} = 0.25,$$

➤ **Matériau 5 :**

$$E_1/E_2 = 15, G_{12}/E_2 = 0.5, G_{13}/E_2 = 0.5, G_{23}/E_2 = 0.35, \nu_{12} = 0.3$$

La fréquence naturelle fondamentale est représentée en tant que terme adimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) défini pour présenter les résultats numériques de la vibration libre des plaques stratifiées multicouches antisymétriques à empilement croisé et équilibré, ce terme peut être défini sous la forme suivante :

$$\bar{\omega} = \omega_{mn} \frac{b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (\text{IV.1})$$

### IV.3. Résultants numériques et discussions

Dans ce chapitre, divers exemples numériques sont présentés et discutés afin de vérifier l'exactitude de la présente théorie pour analyser le comportement vibratoire des plaques en matériaux composites stratifiés antisymétriques, simplement appuyées. Même à travers cette étude nous essayons au début à examiner la réponse statique des plaques stratifiées multicouches à séquence d'empilement croisé soumises à une charge sinusoïdale pour évaluer les performances de la présente théorie. La charge transversale ( $q$ ) est également exprimée en équation (IV.2) en fonction d'une double série de Fourier et la solution analytique peut être obtenue en utilisant le système d'équation algébrique donné par l'équation (IV.3) ci-dessous.

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{IV.2})$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_0 \\ q_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

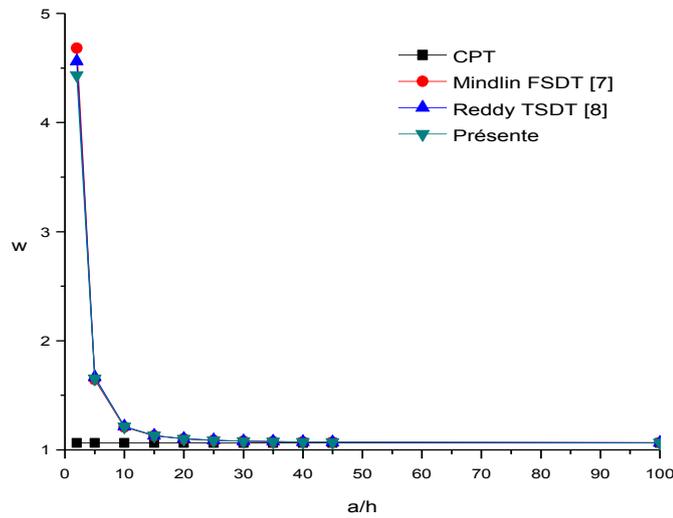
Les résultats obtenus sont données sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement du déplacement transversal  $\bar{w}$ , la contrainte de flexion axiale  $\bar{\sigma}_x$  et la contrainte de cisaillement transversal  $\bar{\tau}_{xz}$ .

$$\bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right) = \frac{100h^3 E}{q_0 a^4} w, \quad \bar{\sigma}_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right) = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_x, \quad \bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz} \quad (\text{IV.4})$$

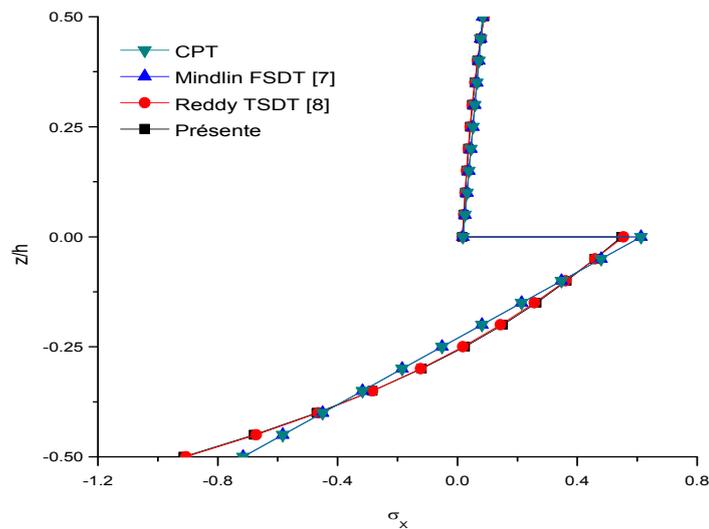
#### IV.3.1. Analyse statique d'une plaque stratifiée antisymétrique [0°/90°]

Dans cette problématique, on examine la réponse statique d'une plaque composite stratifiée antisymétrique à deux couches [0°/90°] (matériau 1) pour comprendre la répartition des contraintes normales et les contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque. Une plaque stratifiée carrée ( $b=a$ ) simplement appuyée le long de tous les bords est considérée pour l'analyse numérique détaillée. La plaque est soumise à une charge transversale sinusoïdale sur la surface supérieure agissant dans la direction  $z$ .

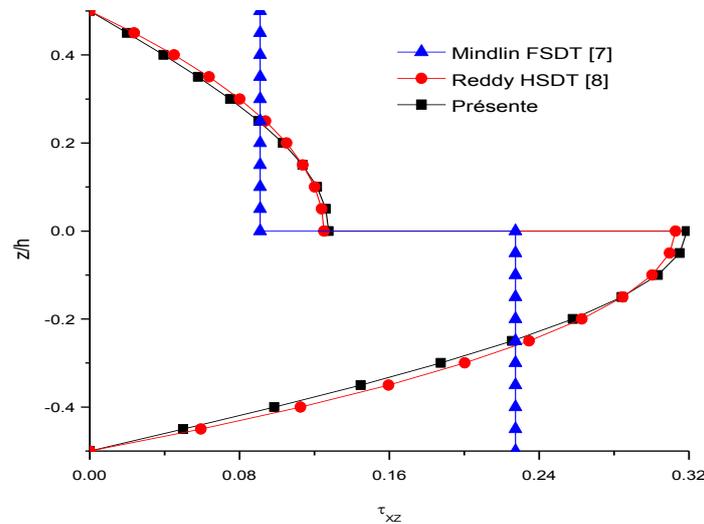
La variation du déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}$  en fonction du rapport d'élanement ( $a/h$ ) est tracée sur la figure (IV.1), tandis que la répartition des contraintes normales axiales  $\bar{\sigma}_x$  et les contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}$  dans le plan perpendiculaire sont tracées dans les figures (IV.2) et (IV.3) respectivement.



**Figure IV.1 :** Effet du rapport d'élanement ( $a/h$ ) sur le déplacement transversal adimensionnel  $\bar{w}$  d'une plaque stratifiée antisymétrique carrée sous une charge sinusoïdale



**Figure IV.2 :** Distribution des contraintes normales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée antisymétrique carrée sous une charge sinusoïdale, ( $a/h=4$ )



**Figure IV.3 :** Distribution des contraintes de cisaillement transversal adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée antisymétrique carrée sous une charge sinusoïdale. ( $a/h=4$ )

Les résultats obtenus par la théorie proposée à quatre variables sont comparés à ceux générés en utilisant la théorie de la déformation du cisaillement du troisième ordre de Reddy [8], la théorie de la déformation du cisaillement de premier ordre de Mindlin [7] et la théorie classique des plaques. L'examen de ces figures a confirmé que les résultats actuels sont en excellent accord avec ceux obtenus par la théorie TSDT à cinq variables de Reddy. On peut observer également que l'augmentation du rapport d'élançement a un effet bénéfique sur la diminution de la flèche adimensionnelle.

### IV.3.2. Analyse de la vibration libre des stratifiés antisymétriques croisés $[0^\circ/90^\circ]_n$

#### IV.3.2.1. Effet du rapport d'orthotropie sur les fréquences

Dans cette partie une plaque en matériau composite stratifiée antisymétrique avec un rapport d'élançement ( $a/h=5$ ) et le rapport de rigidité peut être varié de 3 à 40 et le nombre de couches varie entre 2 à 10 couches, a été analysé en utilisant les propriétés physiques du matériau 2. Les résultats numériques d'une plaque stratifiée antisymétrique simplement appuyée à empilement croisé sont présentés dans le tableau (IV.2). On peut constater que les résultats présentés par Mindlin [7], Reddy [8], Thai et Kim [24] et Sayyad et Ghugal [48] sont

utilisés à des fins de comparaison avec notre analyse. Les résultats obtenus par la présente théorie sont en excellent accord avec ceux obtenus par des solutions d'élasticité exactes 3D données par Noor et Burton [3] et Autres théories [27, 29] disponibles dans la littérature. En effet la théorie classique CPT surestime les fréquences naturelles de vibration dues à la négligence de la déformation de cisaillement.

**Tableau IV.2 :** Fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  des plaques stratifiées antisymétriques carrée à plis croisé  $[0^\circ/90^\circ]_n$  avec  $a/h=5$ , matériau 2.

n	Stratifié	Théories	$E_1/E_2$				
			3	10	20	30	40
2	$[0^\circ/90^\circ]_1$	Présente	6.2188	6.9964	7.8379	8.5316	9.1236
		Thai et Kim (RPT1) [24]	2.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
		Thai et Kim (RPT2) [24]	6.2167	6.9836	7.8011	8.4646	9.0227
		Sayyad et Ghugal [48]	6.2417	7.0150	7.8537	8.5452	9.1357
		Reddy [8]	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	8.0871
		Mindlin [7]	6.2085	6.9392	7.7060	8.3211	8.8383
		CPT	6.7705	7.7420	8.8555	9.8337	10.721
		Exact [3]	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625
4	$[0^\circ/90^\circ]_2$	Présente	6.5012	8.1929	9.6205	10.5268	11.1628
		Thai et Kim (RPT1) [24]	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
		Thai et Kim (RPT2) [24]	6.5008	8.1949	9.6252	10.5334	11.1705
		Sayyad et Ghugal [48]	6.5255	8.2177	9.6252	10.5477	11.1805
		Reddy [8]	6.5043	8.2246	9.6885	10.6198	11.2708
		Mindlin [7]	6.5043	8.2246	9.8865	10.6198	11.2708
		CPT	7.1690	9.7192	12.476	14.7250	16.6725
		Exact [3]	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6789
6	$[0^\circ/90^\circ]_3$	Présente	6.5567	8.4005	9.9210	10.8603	11.5102
		Thai et Ki (RPT1) [24]	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
		Thai et Kim (RPT2) [24]	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5009
		Sayyad et Ghugal [48]	6.5815	8.4305	9.9407	10.855	11.5025
		Reddy [8]	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
		Mindlin [7]	6.5569	8.4183	9.9427	10.8828	11.5264
		CPT	7.2415	10.053	13.058	15.4907	17.5897
		Exact [3]	6.6100	8.4143	9.8398	10.6958	11.2728
10	$[0^\circ/90^\circ]_5$	Présente	6.5860	8.5171	10.0766	11.0345	11.6935
		Thai et Kim (RPT1) [24]	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
		Thai et Kim (RPT2) [24]	6.5842	8.5126	10.0671	11.0186	11.6705
		Sayyad et Ghugal [48]	6.6100	8.5397	10.0957	11.0500	11.6855
		Reddy [8]	6.5842	8.5126	10.0614	11.0197	11.6730
		Mindlin [7]	6.5837	8.5132	10.0638	11.0058	11.6444
		CPT	7.2415	10.053	13.0585	15.4907	17.5897
		Exact [3]	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6246

### IV.3.2.2. L'influence du rapport d'élancement sur fréquences

Le tableau (IV.3) montre les résultats d'analyse de la vibration libre pour un autre exemple sur les plaques carrées en matériaux composites stratifiés antisymétriques à empilement croisé, simplement appuyées en utilisant les propriétés matérielles du matériau 3, avec un rapport d'élancement qui peut varier entre 5 à 100 et le nombre de couche varie de 2 à 10. Dans ce cas le rapport de rigidité ( $E_1/E_2=40$ ). Comme la solution exacte d'élasticité 3D donnée par Noor et Burton [3] n'est disponible que pour le rapport d'élancement ( $a/h=5$ ), les résultats numériques obtenus des fréquences naturelles adimensionnelles par la présente théorie de la déformation du cisaillement sont comparés à ceux rapportés par Thai Et Kim [24], Sayyad et Ghugal [48], Reddy [8] et ont observé qu'ils avaient un bon accord entre eux.

**Tableau IV.3 :** Fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  des plaques stratifiées antisymétriques carrées à plis croisé  $[0^\circ/90^\circ]_n$  avec  $E_1/E_2=40$ , matériau 3.

$n$	Stratifié	Théories	$a/h$				
			5	10	20	50	100
2	$[0^\circ/90^\circ]_1$	présente	9.1236	10.5811	11.1088	11.2756	11.3003
		Thai et Kim(RPT1)[24]	—	10.5686	11.1052	11,2751	11,3002
		Thai et Kim(RPT2)[24]	—	10.5480	11.0997	11,2742	11,2999
		Sayyad et Ghugal [48]	—	10.5930	11.1320	11.3000	11.3000
		Reddy [8]	9.0871	11.5680	11.1052	11.2751	11.3002
		Mindin[7]	8.8383	10.4731	11.0779	11.2705	11.2990
		CPT	10.721	11.1537	11.2693	11.3023	11.3070
4	$[0^\circ/90^\circ]_2$	présente	11.1628	14.8376	16.5699	17.1843	17.2782
		Thai et Kim(RPT1)[24]	—	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
		Thai et Kim(RPT2)[24]	—	14.8433	16.5719	17.1847	17.2783
		Sayyad et Ghugal [48]	—	14.8570	16.6080	17.2250	17.3000
		Reddy [8]	11.1716	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
		Mindin[7]	11.2708	14.9214	16.6008	17.1899	17.2796
		CPT	16.6725	17.1448	17.2682	17.303	17.3082
6	$[0^\circ/90^\circ]_3$	présente	11.5102	15.4633	17.3768	17.1843	17.2782
		Thai et Kim(RPT1)[24]	—	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
		Thai et Kim(RPT2)[24]	—	15.4627	17.3769	18.0643	18.1698
		Sayyad et Ghugal [48]	—	15.4830	17.4160	18.1250	18.2000
		Reddy [8]	11.5012	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
		Mindin[7]	11.5264	15.5010	17.3926	18.0673	18.1706
		CPT	17.5897	18.0461	18.1652	18.1990	18.2038
10	$[0^\circ/90^\circ]_5$	présente	11.6935	15.7733	17.7679	18.4882	18.5989
		Thai et Kim(RPT1)[24]	—	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
		Thai et Kim(RPT2)[24]	—	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
		Sayyad et Ghugal [48]	—	15.7930	17.8160	18.5500	18.6000
		Reddy [8]	11.6730	15.770	17.7743	18.4984	18.6970
		Mindin[7]	11.6444	15.7790	17.7800	18.4995	18.6100
		CPT	17.5897	18.0461	18.1652	18.1990	18.2038

### IV.3.2.3. Analyse de la vibration libre des stratifiés antisymétriques équilibrés [45°/-45°]

Pour illustrer l'exactitude des résultats obtenus par la présente théorie, un autre exemple est ajouté dans le cas d'analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées antisymétriques à empilement équilibré à deux couches [45°/-45°]. Les couches ont une même épaisseur, et sont constituées de matériau 2. Les rapports d'éclatement varient de 4 à 100, alors que les rapports d'orthotropie varient de 3 à 40. Les résultats des fréquences naturelles adimensionnelles obtenus par la théorie raffinée à quatre variables tableau (IV.4) sont comparés avec ceux disponibles dans la littérature, tels que les résultats présentés par Thai et Kim [24], Kant et Manjunatha [49], Pandya et Kant [21], Reddy [8], Mindlin [7] et enfin la théorie classique CPT. L'examen du tableau (IV.4) affirme que les résultats numériques obtenus en utilisant la présente actuelle sont en excellent accord avec ceux obtenus par d'autres théories [7, 8, 21, 22, 27].

**Tableau IV.4 :** Fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  des plaques stratifiées antisymétriques carrées à plis équilibré [45°/-45°], matériau 2.

$E_1/E_2$	Théories	$a/h$				
		4	10	20	50	100
3	Présente	6.0900	7.0747	7.2706	7.3293	7.3378
	Thai et Kim (PRT1) [24]	6.0861	7.0739	7.2705	7.3293	7.3378
	Thai et Kim (PRT2) [24]	6.0852	7.0738	7.2705	7.3293	7.3378
	Kant et Manjunatha [49]	6.1223	7.1056	7.3001	7.3583	7,3666
	Pandya et Kant [21]	6.0803	7.0728	7.2702	7.3295	7,3383
	Reddy [8]	6.0861	7.0739	7.2705	7.3293	7,3378
	Mindlin[7]	6.0665	7.0700	7.2694	7.3291	7,3378
	CPT	6.9251	7.2699	7.3228	7.3378	7,3400
10	Présente	7.3669	8.9709	9.3279	9.4379	9.4540
	Thai et Kim (PRT1) [24]	7.3470	8.9660	9.3266	9.4377	9.4540
	Thai et Kim (PRT2) [24]	7.3259	8.962	9.3255	9.4376	9.4540
	Kant et Manjunatha [49]	9.4540	8.9893	9.3265	9.4377	9.5123
	Pandya et Kant [21]	7.2159	8.9328	9.3174	9.4363	9.4540
	Reddy [8]	7.34770	8.966	9.3266	9.4377	9.4540
	Mindlin[7]	7.2169	8.9324	9.3173	9.4362	9.4537
	CPT	8.7950	9.3444	9.4304	9.4548	9.4583
20	Présente	8.4595	10.7275	11.2806	11.4559	11.481
	Thai et Kim (PRT1) [24]	8.4152	10.715	11.277	11.455	11.481
	Thai et Kim (PRT2) [24]	8.396	10.689	11.272	11.454	11.81
	Kant et Manjunatha [49]	8.049	10.641	11.298	11.507	11.539
	Pandya et Kant [21]	8.0074	10.5876	11.240	11.449	11.840
	Reddy [8]	8.4152	10.715	11.277	11.455	11.428
	Mindlin[7]	8.1185	10.627	11.252	11.451	11.481
	CPT	10.631	11.341	11.453	11.484	11.489

Suite du tableau IV.4

$E_1/E_2$	Théories	$a/h$				
		4	10	20	50	100
30	Présente	9.2434	12.118	12.8719	13.1163	13.1527
	Thai et Kim (PRT1) [24]	9.1752	12.097	12.866	13.115	13.152
	Thai et Kim (PRT2) [24]	9.0341	12.062	12.856	13.113	13.152
	Kant et Manjunatha [49]	8.5212	11.893	12.842	13.157	13.204
	Pandya et Kant [21]	8.4847	11.844	12.789	13.102	13.149
	Reddy [8]	9.1752	12.866	12.866	13.115	13.152
	Mindlin[7]	8.7213	12.821	12.821	13.108	13.151
	CPT	12.159	12.989	12.989	13.158	13.163
40	Présente	9.8501	13.2931	14.25738	14.5738	14.6215
	Thai et Kim (PRT1) [24]	9.7594	13.263	14.246	14.572	14.621
	Thai et Kim (PRT2) [24]	9.5498	13.207	14.230	14.564	14.620
	Kant et Manjunatha [49]	8.8426	12.912	14.171	14.601	14.667
	Pandya et Kant [21]	8.8096	12.867	14.122	14.550	14.615
	Reddy [8]	9.7594	13.263	14.246	14.572	14.621
	Mindlin[7]	9.1609	13.044	14.561	14.561	14.618
	CPT	13.506	14.139	14.587	14.63	14.636

Les fréquences naturelles des plaques stratifiées antisymétriques carrées à plis équilibré où l'orientation des fibres est différente [ $15^\circ/-15^\circ$ ], [ $30^\circ/-30^\circ$ ] dont les couches sont constituées par les propriétés physiques du matériau 3, sont présentées dans le tableau (IV.5) et comparés à avec les autres théories disponibles dans la littérature [7, 8, 21 à 23]. Les fréquences naturelles adimensionnelles obtenues pour les rapports d'élanement 4 à 100 sont en excellent accord avec les autres théories. , on peut observer que l'augmentation du rapport longueur sur épaisseur ( $a/h$ ) peut provoquer la diminution de la rigidité de la plaque et par conséquent, augmente les fréquences naturelles adimensionnelles pour les deux types de stratifiés. Le tableau (IV.5) montre également les fréquences naturelles adimensionnelles pour les plaques composites stratifiées antisymétriques à deux couches (matériau 2) avec différente orientation des fibres et en fonction d'un rapport des modules de Young qui peut aller de 3 à 40. On constate qu'avec l'augmentation du rapport d'orthotropie la rigidité de la plaque augmente et par conséquent augmente fréquences naturelles.

**Tableau IV.5 :** Fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  des plaques stratifiées antisymétriques carrées à deux couches  $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$ , matériau 3.

$\theta$	Théories	$a/h$				
		4	10	20	50	100
$15^\circ$	Présente	9.4639	13.1955	14.3221	14.7058	14.7638
	Senthilnathan et al. [23]	9.4119	13.1793	14.3173	14.7050	14.6745
	Kant and Manjunatha [49]	8.5142	12.7600	14.2324	14.7629	14.8445
	Pandya and Kant [21]	8.4789	12.6928	14.1507	14.6754	14.7563
	Reddy [8]	8.8117	12.8126	14.1881	14.6819	14.7577
	Mindlin [7]	8.4662	12.6802	14.1457	14.645	14.7557
$30^\circ$	Présente	9.6357	12.9539	13.8744	14.1783	14.2237
	Senthilnathan et al. [53]	9.5564	12.9283	13.8667	14.1770	14.2235
	Kant et Manjunatha [49]	8.6739	12.935	13.8010	14.2137	14.2763
	Pandya et Kant [21]	8.6393	12.5442	13.5452	14.1562	14.2184
	Reddy [8]	9.4455	12.8730	13.8487	14.1738	14.2225
	Mindlin [7]	9.8169	12.6807	13.7896	14.1637	14.2198

**Tableau IV.6 :** Fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  des plaques stratifiées antisymétriques carrées à deux couches  $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$ , matériau 2.

$\theta$	$a/h$	$E_1/E_2$				
		3	10	20	30	40
$15^\circ$	4	6.1751	7.5093	8.4440	9.0274	9.4639
	10	7.1890	9.3232	11.0766	12.2692	13.1956
	20	7.3903	9.7347	11.7554	13.1827	14.3222
	50	7.4506	9.8622	11.9725	13.4858	14.7059
	100	7.4593	9.8809	12.0049	13.5313	14.7638
$30^\circ$	4	6.1083	7.3253	8.3399	9.0671	9.6358
	10	7.0998	8.9264	10.5771	12.8668	12.9540
	20	7.2956	9.2816	11.1209	12.5975	13.8744
	50	7.3545	9.3909	11.2929	12.8339	14.1784
	100	7.3631	9.4070	11.3183	12.8690	14.2238
$60^\circ$	4	6.1083	7.3253	8.3399	9.0671	9.6358
	10	7.0987	8.9264	10.5771	11.8668	12.9540
	20	7.2956	9.2816	11.1209	12.5975	13.8744
	50	7.3545	9.3909	11.2929	12.8339	14.1783
	100	7.3631	9.4070	11.3183	12.8690	14.2238

#### IV.3.4. Analyse de la vibration libre des stratifiés antisymétriques équilibrés $[45^\circ/-45^\circ]_2$

Les fréquences naturelles des plaques stratifiées antisymétriques carrées à plis équilibré où l'orientation des fibres est  $[45^\circ/-45^\circ]_2$  dont les couches sont constituées par les propriétés physiques du matériau 4, les fréquences pour les six premiers modes de vibrations pour le rapport  $(a/h=5)$  et  $(a/h=10)$  sont présentées dans le tableau (IV.7). Les solutions analytiques proposées par Matsunaga [15], Kulkarni et Kapurie [23] et les solutions obtenues par la méthode des éléments finis de Chalak et al. [50] et Chakrabarti et Sheikh [26] sont utilisés à des fins de comparaison, on observe que les résultats actuels sont en bon accord avec la référence [23].

**Tableau IV.7 :** Fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  des plaques stratifiées antisymétriques carrées à quatre couches  $[45^\circ/-45^\circ]_2$ , matériau 4.

$a/h$	théories	Mode de vibration					
		1	2	3	4	5	6
5	Présente	12.5295	21.7713	21.7713	29.4406	32.4780	32.4780
	Kulkarni et kapuria [23]	12.5293	21.4012	21.4012	29.3154	32.0688	32,0688
	Chakrabatieet Sheikh [26]	11.813	18.7780	18.9260	23.9570	25.3290	25.4380
	Chalak et al. [50]	11.9131	20.2298	20.2298	27.2263	30.1993	30.0387
10	Présente	18.3062	35.0905	35.0905	50.1181	54.8630	54.8630
	Matsunaget [15]	17.5885	32.6571	32.6571	46.6888	50.6147	50.6147
	Kulkarni et Kapuria [23]	18.3144	34.5392	34.5392	50.0729	53.8869	53.8869
	Chakrabatieet Sheikh [29]	17.934	33.3000	33.4640	47.2370	50.5840	50.6340
	Chalak et al [50]	17.6921	32.8839	32.8839	47.2914	51.5889	52.0283

#### IV.3.5. Analyse de la vibration libre des stratifiés antisymétriques équilibrés $[45^\circ/-45^\circ]_5$

Un autre exemple traite également le problème de la vibration libre des plaques carrées en matériaux composites stratifiés antisymétriques à plis équilibrés à dix couches  $[45^\circ/-45^\circ]_5$ . Les couches sont de même épaisseur, soit  $0,1h$  et composées par les propriétés du matériau 5. Les résultats numériques des fréquences naturelles adimensionnelles obtenus en utilisant la présente théorie et d'autres théories [7, 8, 27] ainsi que avec les solutions exactes d'élasticité 3D données par Noor et Burton [3] sont présentés dans le tableau (IV.8). On constate que les résultats obtenus par la présente théorie de la déformation du cisaillement transversal sont en

bon accord avec la théorie d'ordre élevé de Reddy [8] et même avec la théorie raffinée des plaques de Thai et Kim [24] et la théorie de déformation du cisaillement de premier ordre FSDT de Mindlin [7]. Cependant La théorie classique CPT surestime les fréquences naturelles pour ( $a/h=5$  et  $10$ ) en raison de la négligence de la déformation du cisaillement transversal.

**Tableau IV.8 :** Fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  des plaques stratifiées antisymétriques carrées à dix couches  $[45^\circ/-45^\circ]_5$ , matériau 5.

Stratifié	Théories	$a/h$		
		5	10	100
$[45^\circ/-45^\circ]_5$	Présente	10.1672	13.6111	15.9482
	Reddy [8]	10.1537	13.6078	15.9482
	Thai et Kim (RPT1) [24]	10.1537	13.6078	15.9482
	Thai et Kim (RPT2) [24]	10.1516	13.6078	15.9482
	Mindlin [7]	10.1288	13.6140	15.9484
	CPT	15.4661	15.8460	15.9775
	Exact [3]	9.9825	13.5100	15.9500

D'autre part, nous avons constaté dans ce cas que l'accroissement des rapports d'élanement (longueur/épaisseur) des plaques stratifiées antisymétriques peut augmenter la fréquence fondamentale adimensionnelle d'une manière considérable.

**Tableau IV.9 :** Fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  des plaques stratifiées antisymétriques carrées à quatre couches  $[\theta^\circ/-\theta^\circ]_5$ , matériau 5.

$a/h$	$\theta=15^\circ$	$\theta=30^\circ$	$\theta=45^\circ$	$\theta=60^\circ$	$\theta=90^\circ$
5	4.2396	9.96343	10.1672	9.9634	11.6893
10	12.1322	13.1540	13.6111	13.1540	15.7739
100	13.7247	15.2365	15.9482	15.2365	18.6097

Le dernier tableau (IV.9) montre les résultats d'analyse des plaques carrées en matériaux composites stratifiés antisymétriques à plis équilibrés constitués par dix couches, en fonction de la variation du rapport géométrique ( $a/h$ ) et en fonction des angles d'orientation des fibres afin d'étudier l'influence de ces derniers sur les fréquences naturelles adimensionnelles en utilisant la présente théorie d'ordre élevé basée sur un champ de

déplacement transverse et en gardant les mêmes conditions aux limites imposés aux bords de la plaque. D'après Les résultats obtenus, on observe que l'accroissement des rapports géométriques des plaques stratifiées peut augmenter les fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une manière considérable ainsi que l'angle d'orientation des fibres à un effet significatif sur les fréquences de vibration des plaques stratifiées.

#### **IV.4. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution analytique du comportement vibratoire des plaques composites stratifiées antisymétriques simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevé qui prend en compte l'effet de la déformation de cisaillement transversale. Le nombre de variables dans cette théorie est seulement quatre ce qui permet de réduire les équations de mouvements et simplifier le problème étudié. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution trigonométrique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque tout en remplissant les conditions de nullité des contraintes sur les bords libres, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Les résultats obtenus sont ainsi commentés avec les autres théories disponibles dans la littérature.

# *Conclusion générale*

## **Conclusion générale**

L'utilisation des plaques stratifiées comme élément de résistance au choc et vibration est courante dans toutes les filières d'ingénieur en structure: mécanique, aéronautique, aérospatiale, civile, navale, matériel de sport et militaire. Devant ce vaste et important éventail de domaine d'applications, il est aisé de comprendre l'intérêt et la demande urgente de s'impliquer dans l'analyse dynamique et du comportement vibratoire des plaques.

Dans le cadre de ce travail, nous avons présentés une méthode analytique en utilisant une théorie d'ordre élevé de déformation du cisaillement trigonométrique à quatre variables pour l'analyse de la vibration libre des plaques composites stratifiées antisymétriques à plis croisés et équilibrés. La théorie tient en considération les effets des déformations du cisaillement transversal à travers l'épaisseur sans n'exigence d'un facteur de correction. La validité de la théorie a été démontrée par plusieurs problèmes. Sur la base des caractéristiques importantes de la présente théorie, les résultats numériques et les discussions sont conclus que cette théorie donne des excellentes valeurs des fréquences naturelles par rapport à celles obtenues par d'autres théories d'ordre élevé et d'ordre inférieur. Étant donné que la théorie ne contient que quatre variables inconnues et par conséquent réduit le nombre d'équations et minimise le temps de calcul mathématique, il est fortement recommandé pour l'analyse du comportement statique et vibratoire des plaques stratifiées et même on peut valider cette théorie sur les plaques sandwichs.

A la fin, il reste des travaux à faire, pour les futurs masters concernant le traitement de ce type de problème :

- Analyse de la flexion et de vibration des plaques et poutres sandwichs par la présente théorie.
- Application la présente théorie pour d'autres conditions de chargement et d'appuis
- Avoir des solutions analytiques par d'autre moyen de calcul, tel que la méthode des éléments finis.

## **Références bibliographiques**

- [1] Srinivas S, Joga Rao CV and Rao AK. An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. *J Sound Vib* 1970; 12: 187–199.
- [2] Srinivas S and Rao AK. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int J Solids Struct* 1970; 6: 1463–1481.
- [3] Noor AK and Burton WS. Three-dimensional solutions for anti-symmetrically laminated anisotropic plates. *ASME J Appl Mech* 1990; 57: 182–188.
- [4] Messina A. Three-dimensional free vibration analysis of cross-ply laminated rectangular plates through 2D and exact models. *Mech Adv Mater Struct* 2012; 19: 250–264.
- [5] Brischetto S. An exact 3d solution for free vibrations of multilayered cross-ply composite and sandwich plates and shells. *Int J Appl Mech* 2014; 6: 1–42.
- [6] Brischetto S. Three-dimensional exact free vibration analysis of spherical, cylindrical, and flat one-layered panels. *Shock Vib* 2014; 2014: 1–29.
- [7] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME J Appl Mech* 1951; 18: 31–38.
- [8] Reddy JN. A simple higher order theory for laminated composite plates. *ASME J Appl Mech* 1984; 51: 745–752.
- [9] Carrera E. A study of transverse normal stress effect on vibration of multilayered plates and shells. *J Sound Vib* 1999; 225: 803–829.
- [10] Ghugal YM and Pawar MD. Buckling and vibration of plates by hyperbolic shear deformation theory. *J Aerospace Eng Technol* 2011; 1: 1–12.
- [11] Soldatos KP. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mech* 1992; 94: 195–200.
- [12] Karama M, Afaq KS and Mistou S. A new theory for laminated composite plates. *Proc IMechE, Part L: J Materials: Design and Applications* 2009; 223: 53–62.
- [13] Aydogdu M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Compos Struct* 2009; 89: 94–101.
- [14] Liu Q and Zhao Y. Effect of soft honeycomb core on flexural vibration of sandwich

panel using low order and high order shear deformation models. *J Sandw Struct Mater* 2007; 9: 95–108.

[15] Matsunaga H. Vibration and stability of angle ply laminated composite plates subjected to in-plane stresses. *Int J Mech Sci* 2001; 43: 1925–1944.

[16] Rao MK and Desai YM. Analytical solutions for vibrations of laminated and sandwich plates using mixed theory. *Compos Struct* 2004; 63: 361–373.

[17] Rao MK, Scherbatiuk K, Desai YM, et al. Natural vibrations of laminated and sandwich plates. *ASCE J Eng Mech* 2004; 130: 1268–1278.

[18] Kant T and Swaminathan K. Analytical solution for free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Compos Struct* 2001; 53: 73–85.

[19] Kant T and Swaminathan K. Free vibration of isotropic, orthotropic, and multilayer plates based on higher order refined theories. *J Sound Vib* 2001; 241: 319–327.

[20] Swaminathan K and Patil S. Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates. *Compos Struct* 2008; 82: 209–216

[21] Pandya BN and Kant T. Finite element stress analysis of laminated composite plates using higher-order displacement model. *Compos Sci Technol* 1988; 32: 137–155.

[22] Aagaah MR, Mahinfalah M and Jazar GN. Natural frequencies of laminated composite plates using third order shear deformation theory. *Compos Struct* 2006; 72: 273–279.

[23] Kulkarni SD and Kapuria S. Free vibration analysis of composite and sandwich plates using an improved discrete Kirchhoff quadrilateral element based on third order zigzag theory. *Comput Mech* 2008; 42: 803–824.

[24] Thai HT and Kim SE. Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory. *Int J Mech Sci* 2010; 52: 626–633.

[25] Shimpi RP and Patel HG. Free vibrations of plate using two variable refined plate theory. *J Sound Vib* 2006; 296: 979–999.

[26] Chakrabarti A and Sheikh AH. Vibration of laminate-faced sandwich plate by a new refined element. *ASCE J Aersp Eng* 2004; 17: 123–134.

[27] Pandit MK, Sheikh AH and Singh BN. Analysis of laminated sandwich plates based on an improved higher order zigzag theory. *J Sandw Struct Mater* 2010; 12: 307–325.

[28] Elmalich D and Rabinovitch O. A high-order finite element for dynamic analysis of soft-core sandwich plates. *J Sandw Struct Mater* 2012; 14: 525–555.

- [29] Frostig Y, Phan CN and Kardomateas GA. Free vibration of unidirectional sandwich panels, Part I: compressible core. *J Sandw Struct Mater* 2013; 15: 377–411.
- [30] Phan CN, Frostig Y and Kardomateas GA. Free vibration of unidirectional sandwich panels, Part II: Incompressible core. *J Sandw Struct Mater* 2013; 15: 412–428.
- [31] Bessaim A, Houari MSA, Tounsi A, et al. A new higher order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *J Sandw Struct Mater* 2013; 15: 671–703.
- [32] Levy M. Memoire sur la theorie des plaques elastique planes. *J Math Pures Appl* 1877; 30: 219–306.
- [33] Stein M. Nonlinear theory for plates and shells including effect of shearing. *AIAA J* 1986; 24: 1537–1544.
- [34] Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 1991; 29: 901–916.
- [35] Shimpi RP and Ghugal YM. A layerwise shear deformation theory for two-layered cross-ply laminated plates. *Mech Compos Mater St* 2002; 7: 331–353.
- [36] Shimpi RP and Ainapure AV. Free vibration of two-layered cross-ply laminated plates using layer-wise trigonometric shear deformation theory. *J Reinf Plast Compos* 2004; 23: 389–405.
- [37] Roque CMC, Ferreira AJM and Jorge RMN. Free vibration analysis of composite and sandwich plates by a trigonometric layerwise deformation theory and radial basis functions. *J Sandw Struct Mater* 2006; 8: 497–515.
- [38] Shimpi RP, Arya H and Naik NK. A higher order displacement model for the plate analysis. *J Reinf Plast Compos* 2003; 22: 1667–1688.
- [39] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2- Buckling and free vibration. *Int J Solids Struct* 2005; 42: 5243–5258.
- [40] Zenkour AM. Bending of FGM plates by a simplified four-unknown shear and normal deformations theory. *Int J Appl Mech* 2013; 5: 1–15.
- [41] Ghugal YM and Sayyad AS. Free vibration of thick isotropic plates using trigonometric shear deformation theory. *J Solid Mech* 2011; 3: 172–182.
- [42] Ghugal YM and Sayyad AS. Stress analysis of thick laminated plates using trigonometric shear deformation theory. *Int J Appl Mech* 2013; 5: 1–23.
- [43] Sayyad AS and Ghugal YM. Effect of stress concentration on laminated plates. *J Mech* 2013; 29: 241–252.
- [44] Sayyad AS and Ghugal YM. On the buckling of isotropic, transversely isotropic and

laminated composite rectangular plates. *Int J Struct Stab Dyn* 2014; 14: 1–32.

[45] Neves AMA, Ferreira AJM, Carrera E, et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Part B: Eng* 2012; 43: 711–725.

[46] Ferreira AJM, Roque CMC and Jorge RMN. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Comput Struct* 2005; 83: 2225–2237.

[47] Mantari JL, Oktem AS and Soares CG. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Compos Part B: Eng* 2012; 43: 1489–1499.

[48] Sayyad AS and Ghugal YM. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results. *Compos Struct* 2015; 129: 177–201.

[49] Kant T and Manjunatha BS. An un-symmetric FRC laminate C3 finite element model with 12 degrees of freedom per node. *Eng Comput* 1988; 5: 300–308.

[50] Chalak HD, Chakrabarti A, Iqbal MA, et al. Free vibration analysis of laminated soft core sandwich plates. *J Vib Acoust* 2013; 135: 1–15.

[51] Jones RM. *Mechanics of composite materials*. London: Taylor and Francis, 1999.

[52] Bathe KJ. *Finite element procedures*. New Delhi: Prentice Hall, 1996.

[53] Senthilnathan NR, Lim SP, Lee KH, et al. Vibration of laminated orthotropic plates using a simplified higher order deformation theory. *Compos Struct* 1988; 10: 211–229.

[54] Berbain F., Chevalier A., Choudin C., *Mise en œuvre des composites - Méthodes et matériels*. Techniques de l'ingénieur. Plastiques et Composites, no. A 3720, 1997.

[55] Reinhart T.J., Clements L.L., *Introduction to composites*. Engineered materials handbook: Composites. Ohio, USA : ASM International, vol.1: 27–34, 1993.

[56] Gurdal Z., Haftka R.T., Hajela P., *Design and optimization of laminated composite materials*. Canada: Wiley-Interscience Publication, 352 p. ISBN 047125276X., 1999.

[57] Beeby A.W., The prediction of crack widths in hardened concrete. *The structural Engineer*, vol. 57A(1): 9–17, 1979. of hardened cement paste. Bulletin 23, Research laboratories of

- [58] Pierre, P., Etude du comportement mécanique des composites cimentaires armés de microfibres d'acier. Thèse de doctorat de l'Université Laval, Québec, Canada, 1998.
- [59] Chan, Y.W., LI, V.C., Effects of transition zone densification on fiber/cement paste bond strength improvement. *Advanced cement based materials*, vol. 5: 8–17, 1997.
- [60] Beaudoin J.J., *Handbook of fiber-reinforced concrete-principles, properties developments and applications*. Noyes publication, U.S .A, 332 p, 1990.
- [61] Naaman A. E., Homrighie J. R., Tensile stress-strain properties of SIFCON. *ACI Materials journal*, vol. 86(3): 244–251, 1989.
- [62] Berthelot, J. M., *Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures*. Paris, Masson, 615 p, 1992.
- [63] Bahlouli N., Cours Composites sur le site Internet " <http://www-ipst.u-strasbg.fr/cours/matériaux-composites> ".
- [64] «Glossaire des matériaux composites» - carma –Actualisation, octobre 2006.
- [65] Vacher S., Capteurs à fibres optiques pour le contrôle de l'élaboration et la caractérisation mécanique des matériaux composites. PhD thesis. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, 2004.
- [66] Yves P., influence des propriétés de la matrice sur le comportement mécanique de matériaux composites verre/polyester utilisés en construction navale de plaisance – cas des résines polyester limitant les émissions de styrène. Thèse de doctorat. Université de Bretagne Sud, 2006.
- [67] Remond Y., Lamon J., *Matériaux composites, Elaboration -conception -Structure – Comportement mécanique*. Strasbourg, vol.1 : 12–14, 2003.
- [68] Parneix P., Liu J., Lucas D., Les matériaux composites en construction navale militaire. Communication présentée lors de la réunion des spécialistes RTO AVT sur «Les structures composites à bas coût» ; Norvège, 2001.
- [69] Parneix P., Lucas D., Les matériaux composites en construction navale militaire. *Techniques de l'ingénieur, traité Plastique et Composites*, Réf. AM 5660, 2000.
- [70] Reissner. E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, p. 69–77, 1945.

[71] Powers T.C., Brownyard T.L., Studies of the physical properties he Portland cement association, Chicago, 1948.

[72] Whitney J.M., The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. J.Compos. Mater, vol. 3, p. 534–547, 1969.

[73] Reddy J. N., Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis, CRC Press, 1997.

[74] Berthelot J.-M., Matériaux composites. Comportement mécanique et analyse des structures, Éditions TEC & DOC, 2<sup>ème</sup> édition, 1999.

[75] Benali. H, Sadi .F : Vibration libre des plaques en matériaux à gradient de Propriétés FG avec diverses conditions aux bords en Utilisant la nouvelle théorie de déformation de Cisaillement du premier ordre, université ibn khaldoun de Tiaret.2014/2015

[76] Doudou Aoumeur: vibration libre des plaques composites stratifiées en utilisent la théorie raffinée d'ordre élevé université ibn khaldoun de Tiaret.2013/2014