

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : voie et Ouvrage d'Art

Présenté par :

AISSET MOHAMED AMINE

BENAMARA NACER

Sujet du mémoire

***VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FGM
PEROSER SUR FONDATION ELASTIQUE***

Soutenu publiquement le :00/00/2019 .devant le jury composé de :

Mr : H.SERBAH

Président

Mr : R.BENFERHAT

Rapporteur

M^{lle} :

Examineur

Mr :

Examineur

M^{lle} :

Examineur

2018/2019

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

RÉSUMÉ

Les matériaux à gradient de propriétés ou FGM sont une nouvelle gamme de matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (en général, métal et céramique) à travers l'épaisseur du matériau. Ce travail est consacré à l'étude de l'effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique. Une nouvelle théorie raffinée à ordre élevé sera utilisée basée sur l'axe médian. La règle modifiée du mélange couvrant la porosité et la variation du taux de distribution est utilisé pour décrire les propriétés des plaques FGM poreuses.

L'effet du taux de distribution de porosité entre les particules de la plaque sur le comportement dynamique des plaques FGM en Al / Al₂O₃, Al/ZrO₂ sont présentés sous formes numériques et graphiques. L'effet de l'indice de puissance, les paramètres de rigidité de la fondation et la géométrie de la plaque sont également présentés.

Mots-clés : Matériaux FGM, Théorie raffinée de déformation de cisaillement, Comportement dynamique, Fondation élastique.

ملخص

تعد خصائص التدرج أو مواد متدرجة الخصائص أو مجموعة جديدة من المواد المركبة التي لها تباين تدريجي ومستمر في الكسور الحجمية لكل مكون من المكونات (عادةً من المعدن والسيراميك) عبر سمك المادة. يكرس هذا العمل لدراسة تأثير معدل توزيع المسامية على التردد الأساسي للوحة مواد متدرجة الخصائص على أساس مرن. سيتم استخدام نظرية مكررة جديدة عالية المستوى بناءً على المحور المتوسط. يتم استخدام القاعدة المعدلة للخلط التي تغطي المسامية وتباين نسبة التوزيع لوصف خصائص صفائح مواد متدرجة الخصائص.

يتم عرض تأثير معدل توزيع المسامية بين جزيئات اللوحة على السلوك الديناميكي لألواح مواد متدرجة الخصائص في Al / Al₂O₃ و Al / ZrO₂ في أشكال رقمية ورسومية. كما يتم عرض تأثير مؤشر الطاقة، ومعاملات صلابة الأساس وهندسة اللوحة.

الكلمات المفتاحية: مواد متدرجة الخصائص ، نظرية التشوه المكررة ، السلوك الديناميكي ، الأساس المرن.

RESUME

ملخص

Sommaire

Liste des figures

Liste des Tableaux

Liste des notations

Introduction générale

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1. Définition	06
I.2. Les composants élémentaires de matériaux composites	06
I.2.1. Le renfort.....	07
I.2.1.1 Les fibres de carbone	08
I.2.1.2 Les fibres de Kevlar : appelées aussi aramides	10
I.2.1.3 Les fibres de Verre	12
I.2.1.4 Autres renforts (bore et carbure de silicium)	13
I.3 Les matrices organiques	14
I.3.1 Les matrices thermoplastiques (TP).....	15
I.3.2 Les matrices thermodurcissables (TD).....	16
I.3.3 Les polyesters insaturés.....	17
I.3.3.1 Les résines époxydes	18
I.3.3.2 Les vinylesters.....	18
I.3.3.3 Les phénoliques.....	18
I.3.3.4 Les Polyuréthanes et polyurées	19
I.3.4 Les matrices métalliques	19
I.3.5 Les matrices céramiques	19
I.3.6 Avantages et inconvénient des matériaux composites	20
I.3.4 Les domaines d'application des composites	20
III.8.1.conclusion.....	27

Chapitre II : Généralités sur les matériaux composites avancés

II.1. Introduction.....	29
II.2. Concept des matériaux FGM	30
II.3. Différences entre FGM et matériaux composites traditionnels	31
II.4. Historique de développement des FGM	33
II.5. Les méthodes de fabrication des FGM	35
II.5.1. Coulage en bande "Tape Casting" II.5.1. Coulage en bande "Tape Casting"	36
II.5.2. Coulage séquentiel en barbotine "Slip Casting" :	36
II.5.3. Dépôt par Electrophorèse	37
II.5.4. Compaction sèche des Poudres	38
I.5.5. Projection plasma	38
I.5.6. Frittage et Infiltration	39
I.5.7. Dépôt physique en phase vapeur "PVD"	39
I.5.8. Dépôt chimique en phase vapeur "CVD"	40
II.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	40
II.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	41
II.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	42
II.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM	43
II.7. Domaines d'application des FGM	44
II.8 Conclusion	46

Chapitre III : différente théorie des plaques

III.1 Introduction	48
III.2. Définition d'une plaque	48
III.3. Modele analytiques des plaques FGM	49
III.3.1. Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)	51
III.3.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	51
III.3.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	46
III.4. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé (HSDT)	54
III.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques	58
III.6.1. Les modèles couches discrètes	59

III.6.2. Les modèles zig-zag	60
III.7. Approche quasi-3D.....	60
III.8.Conclusion.....	61

Chapitre IV : Analyse dynamique d'une plaque FGM avec porosité

IV.1. Introduction	63
IV.2. Formulation théorique	64
IV.3. Résultats	72
IV.4. Conclusion	80

Chapitre V: Effet du taux d'Effet du taux de porosité sur le comportement dynamique des plaques FGM reposées sur une fondation élastique

V.1 Introduction	83
V.2. Formulation de la problématique	84
V.3.Les équations principales et les conditions aux limites	86
V.4.Résultats	90
V.5.Conclusion	105

Conclusions Générales

Bibliographiques

Liste des figures

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites avancés

Figure I.1 : Classification des fibres	08
Figure I.2 : procédé de fabrication des fibres de carbone à partir de PAN	09
Figure I.3 : Les différentes familles de matrice	14
Figure I.4 : Production européenne de la fibre de verre [Berreur 2001]	25
Figure I.5 : Consommation mondiale de la fibre de verre (Source : St Gobain-Vétrotex). 25	
Figure I.6 : Application de la fibre de verre (Source : St Gobain-Vétrotex).....	26
Figure I.7 : Application des résines époxy	27

Chapitre II : Généralités sur les matériaux composites

Figure I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés	31
Figure I.2 : FGM "les fractions de volume graduées dans la direction verticale" [31]	32
Figure I.3 : Caractéristiques des matériaux FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [32]	32
Figure I.4 : Vue microscopique d'une section transversale de l'os.....	33
Figure I.5 : Principe de la méthode coulage en bande [39]	36
Figure I.6 : Principe de l'installation d'EPD pour la production des FGM [43].....	37
Figure I.7 Méthode de projection plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. "La composition est graduée dans la direction plane"[45]	38
Figure I.8 : Technique de préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur "CVD" [47].....	40
Figure I.9 : Géométrie d'une plaque en FGM.	41
Figure I.10 : Variation de la fraction volumique dans une plaque "P-FGM"	44

Chapitre III : différente théorie des plaques

Figure III.1 : Géométrie d'une plaque de forme rectangulaire.....	49
Figure III.2 : Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (CPT) [53]	51
Figure III.3 : Cinématique de la plaque de Reissner-Mindlin (FSDT) [53].....	52
Figure III.4 : Cinématique de la plaque d'ordre élevé (HSDT) [53].....	54
Figure III.5 : : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur z	57

Liste des figures

Figure III.6 : Variation de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur z 58

Figure III.7 Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre [85]60

Chapitre IV : Analyse dynamique d'une plaque FGM avec porosité

Figure IV.1 : Géométrie et dimension d'une plaque FGM reposé sur une fondation élastique77

Figure IV.2 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie77

Figure IV.3: Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie78

Figure IV.4 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur.....78

Figure IV.5 Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur.....79

Figure IV.6 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique79

Figure IV.7 : : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique...79

Figure IV.8 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique79

Figure IV.9 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique79

Figure IV.10: Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique .59

Figure IV.11 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte de cisaillement τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique...59

**Chapitre V: Effet du taux d'Effet du taux de porosité sur le comportement dynamique
des plaques FGM reposées sur une fondation élastique**

Figure V.1 : Géométrie et dimension d'une plaque FGM.....	84
Figure V.2 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport de géométrie (a/b) d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃	96
Figure V.3 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport de géométrie (a/h) d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂	96
Figure V.4 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃	97
Figure V.5 : Variation la fréquence fondamentale au centre en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂	97
Figure V.6 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'indice de puissance (P) d'une plaque FGM en Al/Al ₂ O ₃	98
Figure V.7 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'indice de puissance (P) d'une plaque FGM en Al/ZrO ₂	98

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites avancés

Tableau I.1 : Propriétés des fibres de carbone utilisées en génie civil09

Tableau I.2 : Avantages et Handicaps des fibres de carbone10

Tableau I.3 : Les propriétés des fibres de kevlar11

Tableau I.4 : Avantages et Handicaps des fibres aramides [Maurice 1998]11

Tableau I.5 : Composition moyenne et propriétés des différentes fibres de verre [bathias 2005]12

Tableau I.6 : Avantages et Handicaps des fibres de verre [Maurice 1998].....13

Tableau I.7 : Propriétés physiques et mécaniques des résines thermoplastiques16

Tableau I.8 : Propriétés des Résines thermodurcissables.17

Tableau I.9 : avantages et limites des polyesters insaturés18

Tableau I.10 : avantages et limites des époxydes18

Tableau I.11 : les composites à matrice métallique19

Tableau I.12 : Marché mondial de la fibre de verre [Berreur 2001]24

Chapitre II : Généralités sur les matériaux composites

Tableau II.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....30

Chapitre III : différente théorie des plaques

Tableau III.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques en matériaux composites avancés.....56

Chapitre IV : Analyse dynamique d'une plaque FGM avec porosité

Tableau IV.1 : Comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée simplement appuyée $k=1; aa=0; a/b=1$ 74

Tableau IV.2 : Comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque rectangulaire $E_{11}=E_{22}=\rho_{11}=\rho_{22}=1; k=1; aa=0$74

Tableau IV.3 : Comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/ZrO₂. $a/h=5; a/b=1; aa=0.2$ 74

Liste des tableaux

Tableau IV.4 : Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/Al ₂ O ₃ a/b=1	75
Tableau IV.5 : Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/ZrO ₂ a/b=1	75
Tableau IV.6 : Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/Al ₂ O ₃	76
Tableau IV.7 : Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/ZrO ₂	76

Chapitre V: Effet du taux d'Effet du taux de porosité sur le comportement dynamique des plaques FGM reposées sur une fondation élastique

Tableau V.1 : Comparaison de la flèche adimensionnelle d'une plaque mince et isotrope simplement appuyée sous un chargement uniforme.....	92
Tableau V.2 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur. $K_0=K_I=10$	92
Tableau V.3 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la flèche adimensionnelle d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_0=K_I=10$ et a/h=4.....	93
Tableau V.4 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur. $K_0=K_I=10$	94
Tableau V.5 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte longitudinale σ_{xx} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_0=K_I=10$	94
Tableau V.6 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport d'épaisseur. $K_0=K_I=10$	95
Tableau V.7 : Effet de la forme de distribution de porosité sur la contrainte normale σ_{yy} d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique en fonction du rapport de géométrie. $K_0=K_I=10$ et a/h=4.....	95

Liste des abréviations, symboles et notations

Nous donnons ci-dessous les principales notations, symboles et abréviations utilisées dans cette mémoire.

FGM : Les matériaux à gradient de propriétés.

E : Le module de Young.

$E(z)$: Module de Young en fonction de « z ».

E_c : Module de Young de la céramique.

E_m : Module de Young du métal.

G : Le module de cisaillement.

$G(z)$: Module de cisaillement en fonction de « z ».

ν : Le coefficient de Poisson.

$\nu(z)$: Coefficient de Poisson en fonction de « z ».

V : La fraction volumique.

ρ : La masse volumique.

α : Le coefficient de dilatation thermique.

P_c et P_m sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement.

p : Paramètre du matériau (l'exposant de la fraction volumique qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro).

a : Longueur de la plaque suivant la direction de x .

b : Largeur de la plaque suivant la direction de y .

h : l'épaisseur de la plaque suivant la direction de z .

a/h : L'élancement.

u, v, w_b, w_s Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque.

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α .

w : La flèche de la plaque.

$w_{,\square}$: La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

φ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α .

γ_α^0 : La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

$f(x_3)$ où bien $f(z)$: La fonction de gauchissement suivant l'épaisseur de la plaque.

∂ : Dérivée partielle.

i et j Sont des nombres naturels.

ϕ_x, ϕ_y , Les rotations autour des axes x, y

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ Déformation dans la direction x, y

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Les contraintes normales.

σ_{xz}, σ_{yz} : Les déformation de cisaillement.

τ_{xz}, τ_{yz} : les contraintes de cisaillement.

$T(z)$: Un champ de température (Chargement thermique).

T_0 : La température de référence.

Q_{ij} : Les coefficients de rigidité.

Ω : La surface supérieure de la plaque.

f_e : La densité de la force de réaction de la fondation.

K_w : Le module de réaction du sol-fondation (coefficient d'élasticité de la fondation).

N, M , et S : Les résultantes des contraintes.

A_{ij}, B_{ij} , etc : les termes de la matrice de rigidité de la plaque.

\mathbf{K} : La matrice symétrique.

$\{ \}$: Vecteur colonne.

$[]$: Matrice.

Introduction générale :

Les matériaux à gradient de propriété sont des composites macroscopiquement non homogènes et ils sont généralement fabriqués d'un mélange du métal et de céramique. En variant graduellement la fraction volumique de ces constituants, les propriétés effectives de ces matériaux changent d'une façon continue d'une face à une autre, et par conséquent les problèmes d'interfaces seront éliminés et les concentrations des contraintes thermiques seront réduites. En raison de la résistance thermique élevée, les matériaux à gradient de propriété sont utilisés comme des éléments de structure travaillant dans des environnements à haute température, ils peuvent être soumis à des gradients thermiques extrêmement élevés, tel que le cas des structures d'aéronautiques, véhicules spatiaux, enceintes nucléaires et d'autres applications dans le domaine de l'ingénierie.

En effet, la déformation thermomécanique des structures fonctionnellement gradués ont attiré l'attention de nombreux chercheurs au cours des dernières années dans les différentes applications d'ingénierie qui comprenant la conception des structures aéronautiques, les composants du moteur thermique et les centrales nucléaires.

L'évaluation du comportement de déformation thermomécanique des structures de plaque à gradient de propriété dépend considérablement de la cinématique du modèle de plaque.

Plusieurs théories des plaques sont disponibles pour analyser les déformations des plaques composites. Le problème important de l'utilisation de la théorie classique des plaques de Kirchhoff (CPT), est qu'elle ne tient pas compte des effets de cisaillement transversal et par conséquent elle fournit des résultats raisonnables pour des plaques relativement minces. Cependant, dans des plaques épaisses et moyennement épaisses, les déformations de cisaillement transversales doivent être prises en compte. Il existe de nombreuses théories des plaques qui incluent ces déformations [Reissner, 1945; Mindlin, 1951]. Ces théories sont souvent appelées la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour éliminer le problème de la distribution constante de la contrainte de cisaillement transversale. Les théories de déformation cisaillement d'ordre élevé (HSDT) ont été développés pour améliorer l'analyse des réponses des structures, et ils sont largement utilisées par de nombreux chercheurs [Lo et al, 1977, Levinson, 1980, Murthy, 1981, Reddy, 1984, Bert,

1984, Matsunaga 2000, Karama et al, 2003, Şimşek, 2009, 2010, Zenkour et Alghamdi, 2010, Ait Atmane et al, 2010]. [Praveen et Reddy, 1998], ont présenté une analyse du comportement thermo élastique des plaques FGM rectangulaires incluant les effets non linéaires des déformations de cisaillement transverse et l'inertie de rotation. [Reddy et al, 2000] ont étendu cette théorie des plaques FGM rectangulaires à une formulation du premier ordre des plaques annulaires et circulaires en flexion. Des solutions pour la flexion, les forces et moments résultants ont été présentées. La théorie originalement formulée par [Praveen et Reddy 1998] a été par la suite étendue par [Reddy, 2000], à des relations plus générales des plaques FGM permettant de prendre en considération des déformations du troisième ordre. Reddy a également développé des modèles en éléments finis pour des plaques FGM épaisses en se basant sur une théorie de cisaillement des plaques d'ordre supérieur (HSDPT) pour étudier la réponse dynamique non linéaire sous l'effet d'une pression uniforme. [Cheng et Batra, 2000a] ont relié les flèches d'une plaque polygonale fonctionnellement gradué simplement appuyée donnée par la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre et les théories de déformation de cisaillement de troisième ordre à celle d'une plaque de Kirchhoff homogène équivalente. [Cheng et Batra, 2000b] ont également présenté les résultats du flambement et des vibrations d'une plaque polygonale FG simplement appuyé basée sur la théorie des plaque de Reddy. Des solutions analytiques en 3D pour les plaques sont utiles car ils fournissent des résultats de référence pour évaluer la précision des différentes théories des plaques en 2D et les formulations en éléments finis. [Cheng et Batra, 2000c] ont présenté aussi une méthode asymptotique pour étudier les déformations thermo élastiques en 3D, d'une plaque elliptique en FGM. [Vel et Batra, 2002] ont proposé une solution exacte en 3D pour la déformation thermo élastique des plaques fonctionnellement graduées (FGM) simplement appuyées de petites dimensions. [Zhang et al. 2003] ont développé la solution exacte pour les contraintes thermiques autour d'un trou dans une plaque à gradation fonctionnelle. Une théorie des plaques raffinée généralisée est utilisée pour étudier le comportement en flexion cylindrique des plaques en FG par [Bian et al, 2005] et un modèle stratifié est utilisé pour rapprocher la plaque en FG en supposant homogénéité du matériau dans chaque couche mince.

[Lü et al. 2009a] ont présenté des solutions semi-analytiques d'élasticité 3-D pour les plaques à gradient de propriétés multidirectionnelles orthotropes en utilisant la méthode différentielle quadrature (DQM). [Lü, Lim et al, 2009b] ont étudié la vibration libre d'une plaque FGM épaisse reposant sur un support élastique, en utilisant les solutions exactes 3D.

[Ying et al, 2009] ont utilisé une méthode semi-analytique pour étudier les déformations thermiques des plaques épaisses fonctionnellement graduées (FGM) ou l'analyse est basée directement sur la théorie d'élasticité en 3D. Une théorie bidimensionnelle d'élasticité est utilisée par [Lim et al. 2009] pour étudier la vibration dans le plan axiale des arcs circulaires FG avec l'effet de température. Une théorie générale de déformation d'ordre élevé à deux dimensions a été employée par [Matsunaga, 2009] pour le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées (FGM). [Benyoucef et al, 2010] ont présenté une analyse du comportement statique en flexion des plaques épaisses sandwiches en FGM reposant sur un support élastique (Winkler-Pasternak) en se basant sur la théorie de cisaillement des plaques d'ordre élevé (HSDPT). Une approche de la solution asymptotique pour les vibrations des arcs circulaires FG simplement appuyées est développée dans le cadre de la théorie d'élasticité à deux dimensions par [Zeng et al. 2012]. [Bouderba et al, 2013] ont étudié la réponse thermomécanique en flexion des plaques fonctionnellement graduées reposant sur les fondations élastiques de type (Winkler- Pasternak) en utilisant une théorie raffinée de déformation de cisaillement trigonométrique (RTSDT). [Yaghoobi et Yaghoobi, 2013] ont proposé une approche analytique pour l'analyse du flambement des plaques sandwiches symétriques avec des faces en FGM reposant sur une fondation élastique, cette approche est basée sur la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre des plaques dans le cas d'un chargement mécaniques, thermiques et thermomécaniques. Tounsi et ses collaborateurs [Hadji et al, 2011;. Houari et al, 2011;. Abdelaziz et al, 2011;. Merdaci et al, 2011;. Bourada et al, 2012;. Tounsi et al, 2013; Hamidi et al, 2013] ont développé de nouvelles théories raffinée des plaques pour la réponse statique, flambement et vibration libre d'une plaque sandwich en FGM simplement appuyée avec seulement quatre fonctions inconnues [Daouadji et al, 2013] ont présenté une solution analytique de la flexion des plaques en matériaux à gradient fonctionnel. Les propriétés mécaniques sont considérées varier dans la direction de l'épaisseur suivant une loi de distribution en puissance d'un mélange métall-céramique. Dans cette théorie les facteurs de correction de cisaillement ne sont pas nécessaires et le nombre des fonctions inconnues impliqués est seulement quatre, contrairement aux autres théories de déformation de cisaillement qui nécessite 5 inconnus ou plus. [Derras et al, 2013] ont étudié l'analyse non linéaire en flexion cylindrique des plaques à gradient de propriété dont la formulation est basée sur une nouvelle théorie d'ordre supérieur et raffinée. Les plaques sont soumises à une charge de pression, et la non-linéarité géométrique introduite dans les équations d'équilibre en se basant sur les hypothèses de Von-

Karman. Les solutions sont obtenues en minimisant l'énergie potentielle totale et les résultats ont été comparés à celles prédit par la théorie classique, du premier ordre et d'ordre supérieur citées dans la littérature. L'objectif de ce travail est de développer une solution analytique pour l'analyse de la flexion thermomécanique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées. Pour cela une nouvelle théorie hyperbolique raffinée de déformation de cisaillement incluant la déformation de cisaillement transverse et la déformation normale «l'effet de l'étirement de l'épaisseur» est proposé. Contrairement aux autres théories d'ordre élevé, la présente théorie contient six inconnus. Les faces de la plaque sandwich sont constitués de deux matériaux isotropes (métal-céramique) variant à travers l'épaisseur selon une simple loi de distribution de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Par conséquent les propriétés matérielles telles que le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique sont supposés être variés aussi selon la même loi de distribution de puissance. La couche centrale est constituée complètement en céramique. Les résultats numériques pour les flèches et les contraintes sont obtenues et leurs précisions sont vérifiées en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature. Pour atteindre nos objectifs, troisième chapitre,

Chapitre I: Matériaux Composites Classiques

I.1 Définition :

Un matériau composite est défini d'une manière générale comme étant la combinaison macroscopique de deux ou plusieurs matériaux non miscibles, qui se complètent et qui ont des caractéristiques différentes. Ce qui donne un matériau hétérogène et anisotrope. Le composé final aura des propriétés que les éléments constitutifs seuls ne possèdent pas.

On appelle de façon courante, matériaux composites, des arrangements de renforts (fibres et/ou particules) noyés dans une matrice (résines), dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible, que celle des renforts. La matrice assure la cohésion du matériau et l'orientation et la tenue des fibres. Elle permet aussi de transmettre à ces fibres, qui assurent l'ossature du matériau, les sollicitations auxquelles sont soumises les pièces. Les renforts, sous forme de fibres, contribuent à l'amélioration de la résistance mécanique et de la rigidité de la pièce obtenue, dans laquelle ils sont incorporés.

Le but recherché dans ces associations est de combiner les propriétés de plusieurs classes de matériaux pour réaliser des pièces ou des produits directement à la forme désirée, avec des propriétés bien précises (résistance mécanique, densité); donc la logique qui nous induit à penser composite est expliquée par l'exemple suivant:

Les métaux sont en général tenaces (ils résistent à la propagation de fissures) et ductiles (ils présentent des déformations importantes avant de se rompre), mais de masse volumique élevée. Les matières plastiques sont légères mais présentent de faibles propriétés mécaniques. Les céramiques sont rigides et résistantes, mais fragiles.

Il est donc du ressort de l'ingénieur de concevoir des structures tout en plaçant le bon matériau sous la bonne forme (morphologie des renforts), et au bon endroit (notion de répartition dans l'espace).

I.2 Les composants élémentaires de matériaux composites

Les performances mécaniques des composites fibreux sont directement liées aux caractéristiques mécaniques de leurs constituants : la matrice, les fibres mais aussi l'interface fibre-matrice

- La rigidité d'un composite est assurée principalement par les fibres qui possèdent des caractéristiques mécaniques beaucoup plus élevées que la matrice.
 - Quant à la matrice, elle permet de donner la forme géométrique de la structure, d'assurer la cohésion de l'ensemble des fibres et de les protéger contre le milieu ambiant. Mais son rôle principal est de transférer les efforts mécaniques d'une fibre à l'autre.
 - L'interface est la zone de transition entre les fibres et la matrice. Elle possède des caractéristiques chimiques et mécaniques différentes de celles des fibres et de la matrice.
- Une large gamme de fibres et de matrices est disponible, mais dans ce qui suit, nous présenterons quelques-uns des matériaux les plus couramment utilisés.

I.2.1 Le renfort

Les fibres ou les renforts, doivent assurer la bonne tenue mécanique des matériaux. Le renfort se présente généralement sous la forme de fibres dont l'orientation au sein du composite dépend de la sollicitation mécanique qu'elles doivent supporter. Leurs caractéristiques doivent être les suivantes : caractéristiques mécaniques élevées en termes de rigidité et de résistance, compatibilité physico-chimique élevée avec les matrices.

Les principaux types de renforts se distinguent par leur géométrie (particules, billes, fibres courtes, fibres longues), par leur disposition, notamment pour les 3D (feutres, nappe de mat 2D, nappes unidirectionnelles, tissages 2D, tissage 3D) ou par leur nature (minérale ou organique).

Une variété de fibres est présentement disponible : différents types de fibres de verre, de carbone, d'aramide (Kevlar), de graphite, de bore, de silice, de carbure de silicium et d'aluminium sont disponibles. Elles représentent une gamme de propriétés mécaniques incluant des résistances en traction de 700 à 4200 MPa et des modules d'élasticité de 50 GPa à 400 GPa.

Les principales fibres utilisées sont :

Fibre de Carbone ;

Fibre de Kevlar ;

Fibre de Verre;

Fibre de Bore.

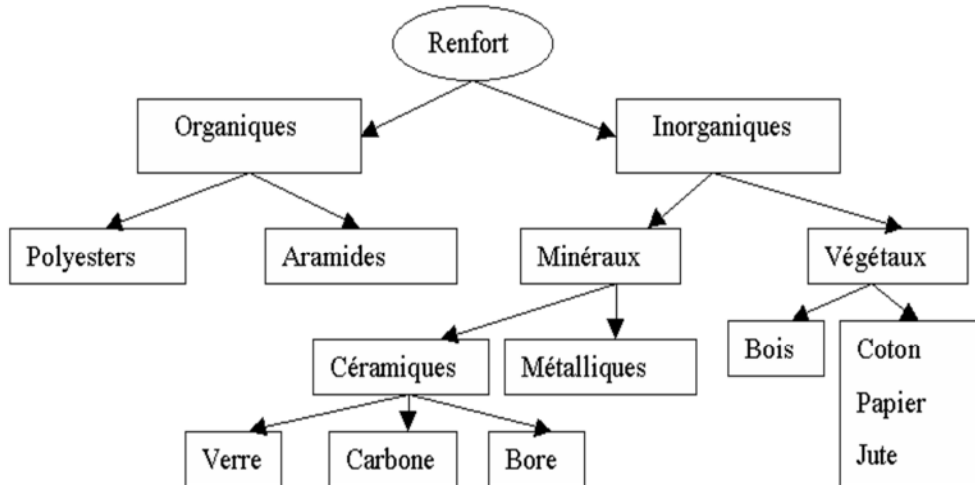


Figure. I.1 : Classification des fibres

I.2.1.1 Les fibres de carbone

Elles sont produites à partir de la pyrolyse contrôlée de fibres organiques appelées :

«Précurseurs». Il existe deux types de fibres de carbone :

Celles à haute ténacité ($\sigma \approx 2500$ à 3000 MPa avec $E \approx 250$ GPa) issues d'une mise en œuvre par carbonisation pour une température de combustion de 1000 à 1500 °C ;

Et celles à haut module ($\sigma \approx 2000$ à 2500 MPa avec $E \approx 400$ à 800 GPa) ($400\ 000$ MPa) issues d'une fabrication par graphitisation pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

Les principales étapes de cette fabrication sont un étirage (orientation), une oxydation, une carbonisation et, pour obtenir une fibre à haut module, une graphitisation. La fabrication des fibres de carbone fait appel à une technologie très délicate. En effet, les caractéristiques de la fibre obtenue en fin de processus dépendent, non seulement de la qualité de la fibre polyacrylonitrile de départ (ou précurseur), mais également du déroulement précis et rigoureux de chaque étape du procédé de fabrication dont les étapes sont les suivantes :

- fabrication de précurseur (PAN),
- étirage (orientation),
- oxydation (250°C à 400°C) dans l'air sous tension,
- carbonisation (600°C à 1300°C) sous atmosphère inerte fibres de carbone haute résistance (HR),
- graphitisation de 1800°C à 3000 °C sous atmosphère inerte fibres de carbone haut module (HM).

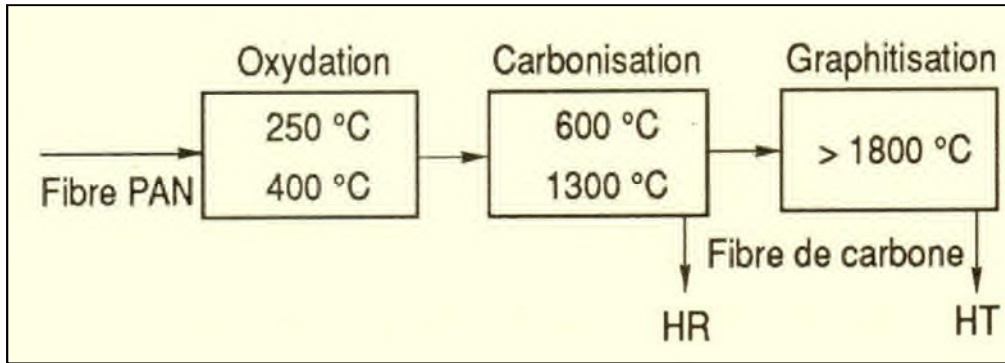


Figure. I.2 : procédé de fabrication des fibres de carbone à partir de PAN

Suivant les conditions de fabrication, il existe toute une variété de fibres de carbone.

Mais, actuellement trois sortes sont commercialisées :

Les fibres à haute résistance classique (types : As4, As6, T300 et X635) ; Les fibres à haute résistance module intermédiaire (types : IM6, X636); Les fibres à haut module (types : M40 et HM5).

Les fibres de carbone se différencient par le taux de carbone plus ou moins élevé qui modifie les allongements et les contraintes à la rupture et les modules d'élasticité.

D'un fabricant à l'autre, les propriétés mécaniques varient suivant les propriétés physiques et mécaniques moyennes. Elles sont données dans le tableau ci - dessous:

Tableau. I.1: Propriétés des fibres de carbone utilisées en génie civil

Propriétés en traction	HR		IM	HM	
R_t (MPa) $\times 10^3$	3 à 5	4 à 4.5	47 à 52	2 à 2.5	1.1 à 2
E_{oT} (MPa) $\times 10^4$	22 à 24	23.5 à 25	27.5 à 30	35 à 40	45 à 50
A_R (%)	1.2 à 1.5	1.6 à 1.8	1.4 à 1.6	0.5 à 0.7	0.3 à 0.5
ρ (g / cm ³)	1.75 à 1.8	1.75 à 1.8	1.7 à 1.8	1.8 à 1.85	1.9 à 1.95

R_t : Résistance à la rupture ;

E_{oT} : Module de Young ;

A_R : l'allongement à la rupture.

Une particularité importante de ces fibres est leur coefficient de dilatation linéique négatif ou quasi nul dans le sens axial ($-1 \cdot 10^{-6}$ à $-0,1 \cdot 10^{-6}$ K⁻¹) ; c'est-à-dire que les fibres se raccourcissent quand on les chauffe et s'allongent quand on les refroidit, et cela dans un large domaine de températures.

Cette caractéristique a été mise à profit pour réaliser des poutres géométriquement stables pour des applications optiques en orientant correctement les fibres dans les différentes couches du stratifié symétrique.

Dans le tableau ci-dessous sont énumérées quelques avantages et limites d'utilisation des fibres de carbone :

Tableau. I.2 : Avantages et Handicaps des fibres de carbone

Avantages	Handicaps
Excellentes propriétés mécaniques, Très bonne tenue en température (non oxydante), Dilatation thermique nulle, Bonne conductibilité thermique et électrique, Bonne tenue à l'humidité, Usinage aisé, Faible densité.	Prix très élevé, Précautions à prendre dans la mise en œuvre (fibre cassantes) Tenue limitée aux chocs et à l'abrasion Difficile avec les résines. Mauvais comportement chimique avec : Oxygène : 400°C Acides oxydants chaud Métaux corrosion galvanique

I.2.1.2 Les fibres de Kevlar : appelées aussi aramides

Ces fibres sont directement issus de la chimie organique, marque d'origine de Dupont de Nemours-USA.

On part de polyamides aromatiques à liaison amide, d'où leur nom aramide, dont la structure est constitué de noyaux benzéniques reliés par des groupes CO et HN. L'élaboration des fibres est effectuée par synthèse à basse température (-10°C) puis par filage en solution. Le diamètre moyen de ces fibres est de 19 microns [A].

Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité. Le module d'Young de ces fibres est égal ou supérieur à celui du verre [B].

Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent d'une adhérence moyenne entre la matrice et les fibres. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

les fibres bas module: ($E \approx 70$ GPa) utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles

Les fibres à haut module: ($E \approx 130$ GPa) employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

Les propriétés physiques et mécaniques de ces deux types de fibres sont représentées dans le tableau ci-après :

Tableau. I.3 : Les propriétés des fibres de kevlar

Propriétés en traction	Kevlar 49	Kevlar 29
Rt (MPa)	3000	2700
EoT (MPa)	120000 à 130000	60000
AR (%)	2.1	4
Masse volumique (g / cm ³)	1.45	1.44

Du point de vu dilatation, le Kevlar présente la même particularité dans le sens des fibres que celle du carbone.

Les fibres subissent différents traitements de surface (ensimages) destinés à empêcher leur rupture pendant leur mise en œuvre (ensimage textile) et à améliorer l'adhérence avec la résine choisie à l'intérieur du stratifié (ensimage plastique). Certains traitements sont supposés assurer les deux fonctions (ensimage textilo-plastique).

Dans le tableau ci-après sont énumérées quelques avantages et limites d'utilisation des fibres aramides :

Tableau. I.4 : Avantages et Handicaps des fibres aramides [A].

Avantages	Handicaps
Bonne résistance spécifique à la traction	Prix élevé,
Faible densité. (1.45)	Faible tenue en Pression
Dilatation thermique nulle,	Reprise d'humidité importante (4%) étuvage
Absorption des vibrations, amortissement	avant imprégnation
Excellente résistance aux chocs et à la fatigue	Faible adhérence avec les résines
Bon comportement chimiques vis à vis des carburants.	d'imprégnation
	Sensibilité aux UV
	Usinage difficile
	Tenue au feu, (décomposition à 400°C)

I.2.1.3 Les fibres de Verre :

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 95% des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD). L'industrie verrière propose plusieurs produits différents par leur composition chimique et leurs prix : le verre E d'une part et d'autre part les verres R et S très voisins (le premier est français et le second américain).

Ils sont obtenus à partir de silice (SiO_2) et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1.250°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues.

Suivant les applications auxquelles elles sont destinées (Tableau I.5), les fibres de verre sont réparties en cinq qualités :

fibres E pour les composites grandes diffusions (GD) ; il est le moins cher que les autres types de verre ;

fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;

fibres R et S qui contiennent plus d'alumine ; pour les composites hautes performances.

-fibres C résistent bien à la corrosion en milieu acide.

Les propriétés de ces fibres sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Tableau. I.5 : Composition moyenne et propriétés des différentes fibres de verre [C]

Type de verre	E	S	R	C	D
SiO₂	54	65	60	65	74
Al₂O₃	15	25	25	4	
CaO	18		9	14	0.2
MgO	4	10	6	3	0.2
B₂O₃	8			5.5	23
F	0.3				
Fe₂O₃	0.3				
TiO₂					0.1
Na₂O				8	1.2
K₂O	0.4			0.5	1.3
Propriétés					
Densité	2.54	2.49	2.49	2.49	2.16
Résistance(20°C) GPa	3.5	4.65	4.65	2.8	2.45
Module élastique(20°C) GPa	73.5	86.5	86.5	70	52.5
Déformation à la rupture %	4.5	5.3	5.3	4.0	4.5

Propriétés spécifiques	Usage général	Propriétés mécaniques renforcées	Propriétés mécaniques renforcées	Alcali-résistant	Propriétés diélectriques renforcées
-------------------------------	---------------	----------------------------------	----------------------------------	------------------	-------------------------------------

Les fibres de verre utilisées dans les composites ont un diamètre de l'ordre de 10 micromètres, nettement supérieur au diamètre critique (de l'ordre de 3 micromètres) pour que la fibre ne présente pas de risque respiratoire et ne puisse engendrer des maladies tel que cancers.

Dans le tableau ci-après sont énumérées quelques avantages et limites d'utilisation des fibres de verre:

Tableau. I.6 : Avantages et Handicaps des fibres de verre [A].

Avantages	Handicaps
Bonne résistance spécifique (pour le verre R), une bonne adhérence entre fibres et résines, tenue a la température élevée, incombustibilité, dilatation et conductivité thermique faible, Bon rapport de performances mécanique/prix, Bonnes propriétés diélectriques.	Faible module (par rapport au carbone ou aramide), Vieillessement au contact de l'eau.

I.2.1.4 Autres renforts (bore et carbure de silicium)

Ces deux types de renforts sont appelés au même principe de fabrication et ont des propriétés et des domaines d'application voisins. Leur utilisation reste toutefois très marginale (navette spatiale).

Ces matériaux sont fabriqués à base de bore, bore-carbure de bore, carbure de silicium, bore-carbure de silicium ; On opère par dépôt en phase gazeuse sur une âme en tungstène portée à 1200°C, qui sert de substrat. Le diamètre du mono filament est plus important que pour les autres fibres (100 à 150 microns).

Les prix et difficultés de mise en œuvre (fragilité, usinage difficile, manipulation dangereuse) freinent le développement de ces types de renforts.

La matrice

La matrice constitue l'élément de liaison entre les renforts et assure leur protection vis-à-vis des agents agressifs et la prévention contre une rupture catastrophique.

D'une manière générale, les matériaux composites structuraux de part la nature du renfort sont fortement anisotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés sont très différentes suivant la

direction considérée.

D'autre part, les matériaux composites sont légers, c'est-à-dire que les masses volumiques de leurs constituants sont de l'ordre de 1 à 3.5 g / cm³.

Dans ce qui suit on présente trois catégories de matrices :

Les matrices organiques (résines synthétiques) ;

Les matrices métalliques ; Les matrices céramiques.

Le schéma ci-dessous montre les différentes résines existantes de par leurs natures. Les cas les plus développés actuellement sont les résines thermodurcissables.

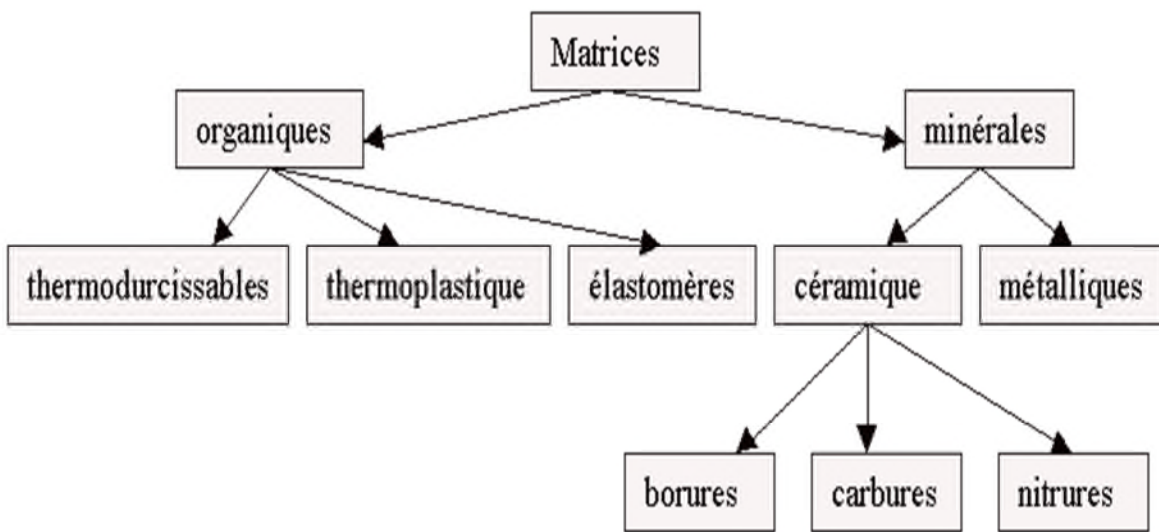


Figure I.3 : Les différentes familles de matrice

I.3 Les matrices organiques

La matrice a pour rôle de lier les fibres renforts, d'assurer le transfert de charge entre elles, de les protéger des chocs, des frottements et de l'environnement extérieur. En outre, elle présente l'avantage d'être chimiquement réactive, ce qui permet l'établissement de liaisons fortes avec le renfort. Elle apporte aussi la tenue chimique de la structure et enfin d'assurer la forme de la structure. Cependant, la matrice ne doit pas être trop rigide pour ne pas contrarier le travail des fibres ce qui fait de sa ductilité un paramètre important.

La satisfaction simultanée de tous ces critères étant difficile, les matrices sont choisies selon le domaine d'utilisation du matériau composite. Cela a donné différentes matrices utilisées selon la fonction pour laquelle le composite est destiné. Ce qui a donné naissance à un matériau nouveau, modulable et adaptable aux caractéristiques mécaniques exigées. Elle est à

base de polymères. Un polymère est un enchaînement de groupes organiques identiques appelés monomères. Un monomère est une suite d'atomes de carbone liés entre eux et avec d'autres éléments (H, N, Si, Cl...).

On distingue les homopolymères, répétition d'une unique structure moléculaire et les copolymères, répétition de plusieurs structures différentes. Ils sont classés en deux catégories: les thermoplastiques (TP) et les thermodurcissables (TD). Il y a aussi les élastomères, qui sont utilisés dans l'industrie automobile. Il est important de bien situer les différences fondamentales de ces deux types de matrices.

I.3.1 Les matrices thermoplastiques (TP)

L'emploi de ces matrices s'est développé à partir des années 1970. Ils se présentent sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient alors), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible et ces polymères sont recyclés par simple chauffage. Ils sont de loin les plus employés du fait de leur faible coût et de leur facilité d'utilisation. Le changement d'état solide/liquide ou pâteux peut se faire plusieurs fois avec une perte de caractéristiques à chaque cycle [D].

Ils comportent deux classes: les amorphes, sans ordre moléculaire, et les cristallins. Les principales matrices TP utilisées (possédant tous une tenue en température supérieure à 100 °C) sont les suivantes :

Polyamide (PA) : tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures ;

Polytéréphtalate éthylénique et butylénique (PET, PBT) : bonne rigidité, bonne ténacité ;

Polycarbonate (PC) : tenue au choc ;

Polysulfure de phénylène (PPS) : résistance à l'hydrolyse ;

Polyoxyméthylène (POM) : bonne tenue à la fatigue ;

Polysulfurés (PSU et PPS) : bonne stabilité chimique et à l'hydrolyse, peu de fluage, tenue au chaud ;

Polypropylène (PP) : peu onéreux et assez stable en température, mais combustible.

De plus en plus, on utilise des thermoplastiques thermostables (tenue thermomécanique est de l'ordre de 140°C), en particulier les suivants :

Polyamide-imide (PAI) ;

Polyéther-imide (PEI) ;

Polyéther-sulfone (PES) ;

Polyéther-éther-cétone (PEEK).

Dans le tableau qui suit des Propriétés physiques et mécaniques de plusieurs types de résines

thermoplastiques sont présentées :

Tableau. I.7 : Propriétés physiques et mécaniques des résines thermoplastiques.

Matrices TP	Masse volumique (kg.m⁻³)	Module d'élasticité longitudinal (Mpa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique ° C-1
PP	900	1200	0.4	30	20 à 400	9×10^{-5}
PPS	1300	4000	/	65	100	5×10^{-5}
PA	1100	2000	0.35	70	200	8×10^{-5}
PES	1350	3000	/	85	60	6×10^{-5}
PEI	1150	3300	/	105	60	6×10^{-5}
PEEK	1300	4000	/	90	50	5×10^{-5}

I.3.2 Les matrices thermodurcissables (TD)

Les composites à matrice thermodurcissable représentent 70% des composites utilisés en Europe. Pour les besoins de grandes consommations donc de gros volumes (90 tonnes en France et 600000 tonnes aux états unis), ces résines sont très utilisées pour des raisons de prix et de facilité de mise en œuvre.

Ils sont formés de macromolécules orientées selon un réseau tridimensionnel et polymérisent selon la forme souhaitée par une transformation irréversible, qu'il est très difficile à rompre, sinon par l'apport d'une importante quantité de chaleur. Cette caractéristique confère à ces résines de meilleures performances thermomécaniques. Ces polymères ne sont pas recyclables, et ce phénomène pose un problème, qui n'a pas encore de solution fiable [D].

Les principales résines thermodurcissables sont :

Les polyesters insaturés : pour les applications grandes diffusion qui présentent un bon compromis cout/performance ;

Les résines époxy (ou époxydes) qui constituent la résine type des composites HP ;

Les vinylesters, dont la chimie de durcissement est identique à celle des polyesters insaturés, mais avec un cout supérieur d'un facteur deux à trois, justifié par une très bonne tenue à la corrosion ;

Les phénoliques, pour leur tenue au feu et à hautes températures.

D'autres familles sont également utilisées (polyuréthanes, mélamines, silicones..) mais encore

en quantités faibles pour les applications composites.

Le tableau suivant regroupe les caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables :

Tableau. I.8: Propriétés des Résines thermodurcissables.

Matrice TD	Masse volumique (kg.m-3)	Module d'élasticité longitudinal (MPa)	Module de cisaillement (MPa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de rupture (traction) MPa	Allongement à rupture %	Coefficient de dilatation thermique °C-1
Epoxyde	1200	4500	1600	0.4	130	2	10×10^{-5}
Phénolique	1300	3000	1100	0.4	70	2.5	1×10^{-5}
Polyester	1200	4000	1400	0.4	80	2.5	8×10^{-5}
Polycarbonate	1200	2400	/	0.35	60	/	6×10^{-5}
Vinylester	1150	3300	/	/	75	4	5×10^{-5}
silicone	1100	2200	/	0.5	35	/	/
Uréthane	1100	700à 7000	/	/	30	100	/
Polyimide	1400	4000à19000	1100	0.35	70	/	8×10^{-5}

I.3.3 Les polyesters insaturés :

C'est la résine la plus utilisée dans l'application composite de grande distribution. Une résine de polyester insaturé contenant un monomère (généralement le styrène) est réticulée à température ambiante par addition d'un catalyseur de type peroxyde organique et d'un accélérateur. Elle passe successivement de l'état liquide visqueux initial à l'état de gel, puis à l'état de solide infusible.

La réaction est exothermique et la température de la résine augmente progressivement depuis le gel jusqu'à un maximum pour redescendre ensuite lentement à la température ambiante. Le durcissement sera d'autant plus rapide ou, si l'on préfère, le temps nécessaire dans le moule sera d'autant plus court que la courbe de température en fonction du temps se rapprochera davantage de la verticale.

Les avantages et limites des polyesters insaturés sont présentés ci-dessous :

Tableau. I.9 : avantages et limites des polyesters insaturés.

Avantages	Inconvénients
Bonne accroche sur fibres de verre ; Possibilité de Translucidité ; Bonne tenue chimique ; Mise en œuvre facile ; Tenue en température (> 150 °C) ; Prix réduit.	Inflammabilité (sauf résines chlorées) ; Tenue vapeur et eau bouillante ; Retrait important (6 à 15 %) ; Durée de conservation en pot limitée ; Emission de styrène.

I.3.3.1 Les résines époxydes

Les résines époxydes sont des résines thermodurcissables qui réticulent de façon irréversible. Elles polymérisent à l'aide d'un durcisseur et d'un accélérateur. La polymérisation a lieu à température ambiante également.

La faible absorption d'eau et l'absence de post-retrait assurent au polymère une bonne résistance aux divers agents chimiques. Ces deux propriétés permettent d'obtenir une protection importante contre la corrosion chimique.

Les avantages et limites des époxydes sont présentés ci-dessous :

Tableau. I.10 : avantages et limites des époxydes.

Avantages	Inconvénients
Tenue mécanique, thermique, chimique et fatigue Faible retrait (1 à 2 %) Excellente adhérence sur fibres Auto-extinguibilité Mise en œuvre facile, sans solvant	Prix élevé Sensibilité à l'humidité et aux UV Vieillessement sous température Sensibilité aux chocs Temps de polymérisation.

I.3.3.2 Les vinylesters

On peut la considérer comme une variante des polyesters produite à partir d'acides acryliques. Elles possèdent une bonne résistance à la fatigue et un excellent comportement à la corrosion, mais demeure combustible.

I.3.3.3 Les phénoliques

Elles sont issues de la polycondensation du phénol et du formol et se caractérisent par une bonne tenue au feu, sans fumée. Elles restent fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à

colorer et à mettre en œuvre.

I.3.3.4 Les Polyuréthannes et polyurées

Dans la fabrication de pièces composites, on utilise surtout des formules élastomériques dont la faible viscosité permet un bon remplissage du moule. Les constituants sont livrés à l'état de prépolymères liquides :

Polyols + polyisocyanates = polyuréthannes ;

Polyéthers + polyamines = polyurées.

I.3.4 Les matrices métalliques :

Les matériaux composites à matrice métallique dont il est question ici ont été développés à partir des années 1960-1965 en deux vagues successives. Des efforts importants de recherche ont été menés aux États-Unis et en France dans les années 60 autour d'une fibre mono filamentaire de bore, sans véritable développement industriel ultérieur. Ce composite métal-métal était pénalisé par le coût très élevé de la fibre. À cette date, les applications envisagées étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sein d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel. Voici quelques composites à matrices métalliques :

Tableau. I.11 : les composites à matrice métallique.

Symbole	Définition
CMAI	composite à matrice aluminium
CMM	composite à matrice métallique
CMMg	composite à matrice magnésium
CMTi	composite à matrice titane
PAN	polyacrylonitrile
PCS	polycarbosilane
PTCS	polytitanocarbosilane

I.3.5 Les matrices céramiques :

Dans les années 80, la disponibilité de nombreux nouveaux matériaux céramiques devait relancer les recherches dans ce domaine avec des perspectives de développement industriel plus encourageantes. Des exemples d'applications industrielles ont été développés dans l'automobile, à l'initiative de l'industrie japonaise.

Lorsque les températures d'utilisation sont supérieures à 1000°C, on a recours aux composite

à matrice céramique. Dans ce type de composite, le renfort est généralement constitué de fibres longues en carbone, en silice ou en carbure de silicium, assemblé par tissage multidimensionnel.

Ces matériaux sont développés essentiellement dans le domaine aérospatial en tant que structure thermique en raison de leur haute résistance thermomécanique spécifique.

I.3.6 Avantages et inconvénient des matériaux composites :

Avantages :

Gain de masse ;

Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques) ;

Grande résistance à la fatigue ;

Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre l'aluminium et des fibres de carbone) ;

Insensibles aux produits chimiques « mécaniques » comme la graisse, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole...etc.

Inconvénients :

Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température,

Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes,

Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques,

Coût parfois prohibitifs (temps, coût, étude et mise en œuvre),

Grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwichs.

I.4 Les domaines d'application des composites

I.4.1 Les composites dans la construction civile :

L'utilisation des composites dans la construction civile est un nouveau créneau, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites. L'handicap majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif. L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur à 6€/kg. [D] .

Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone la résistance aux séismes.

L'utilisation des composites dans le bâtiment ne pourra se développer que si les prescriptions techniques actuelles sont mieux adaptées à leur spécificité.

I.4.2 Les composites dans l'automobile

Le secteur de l'automobile utilise pour 95% des composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais intègre massivement les composites thermoplastiques depuis 2003

Les composites apportent au secteur de l'automobile une facilité d'entretien et une grande liberté de conception ; l'allègement de 1 kg, obtenu par l'utilisation des composites, autorise un surcoût de 3€/kg gagné ou permet d'économiser 1,5 € de carburant par 100 km.

Dans l'automobile, le développement à long terme des composites est menacé par la difficulté de les intégrer dans les chaînes de fabrication et par les exigences de recyclabilité.

En Europe, environ 12 millions de véhicules, d'une masse moyenne de 1000 kg sont produits annuellement, soit 12 millions de tonnes de matériaux [E].

Si à ses débuts, il y a environ 100 ans, une automobile était constituée principalement de bois et d'acier, aujourd'hui elle rassemble de nombreux matériaux appartenant à différentes familles :

matériaux ferreux : fontes, aciers (environ 70 % de sa masse) ;

matériaux non ferreux : aluminium, cuivre, magnésium (environ 5 %) ;

matériaux minéraux : verres, céramiques (environ 4 %) ;

matériaux organiques : peintures, adhésifs, textiles, fluides, caoutchoucs, thermoplastiques et thermodurcissables renforcés ou non par des fibres (verre, carbone, aramide, naturelles) ou des charges minérales (environ 20 %).

Les matériaux organiques composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable renforcées par des fibres, généralement de verre, courtes ou longues ont fait leur apparition dans l'automobile durant les années 60-70. Même s'ils sont aujourd'hui utilisés presque exclusivement pour remplir certaines fonctions, leur taux d'utilisation ne dépasse pas 10 à 15 % selon les véhicules.

A priori, ces matériaux présentent en effet trois handicaps majeurs par rapport aux matériaux métalliques dans le cadre d'une utilisation dans le secteur automobile :

un prix élevé au kilogramme ;

des caractéristiques mécaniques plus faibles ;

des procédés de mise en œuvre souvent lents à l'exception du procédé d'injection. Pourtant les matériaux composites à matrice organique présentent des avantages importants :

une faible densité ;

des technologies de mise en œuvre par moulage qui limitent la matière engagée dans la filière, offrent la possibilité d'obtenir des pièces de forme complexe et suppriment les usinages de finition.

I.4.3 Les composites et la construction électrique

La consommation massive des composites GD, sous forme de semi-produits SMC comprimés, dans les domaines électrique et électronique, prends de l'ampleur avec l'utilisation importante de l'audio visuel (TV, microordinateurs, lecteurs de DVD, etc.....).

En utilisant les propriétés remarquables des matériaux composites, la construction électrique réalise des équipements fiables, aux fonctions multiples et longues durée de vie.

Les cadences de production des composants électriques, pouvant atteindre plusieurs milliers par jour, sont peu compatibles avec celles du procédé de compression SMC. Des exigences croissantes en recyclabilité des produits constituent une menace importante pour ce secteur d'application des composites.

I.4.4 Les composites et la construction industrielle

Le développement des composites TD et TP, avec la possibilité de jouer sur leurs caractéristiques, ont fait que ces matériaux, se sont imposés dans le monde industriel. Les fibres de carbone pourront être utilisées en complément aux fibres de verre à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy.

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

Pour les constructions industrielles standards, les matériaux composites gardent encore leur handicap d'un coût élevé par rapport aux matériaux conventionnels, les métaux. Leur caractérisation en milieu corrosif est encore insuffisamment connue.

I.4.5 Les composites dans les équipements de sports et loisirs

Les performances sportives exigent des matériaux performants. Les matériaux composites répondent bien à ces exigences, malgré un coût relativement élevé. Les sports et loisirs utilisent des composites HP avec un taux de renforts de plus de 70%. Les sports concernés par ces matériaux sont surtout, le tennis, le ski, les sports nautiques etc.....

Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports.

La résistance mécanique et élastique des composites TP reste encore trop faible comparée à celle des alliages légers, en particulier pour les composites à matrice en polypropylène et en

polyamide.

I.4.6 Les composites et la construction nautique

Dans la construction nautique de plaisance et de pêche, les composites sont indispensables pour les embarcations de taille inférieure à 40 mètres. Le moulage au contact représente encore 85% des composites utilisés dans ce secteur. D'ailleurs c'est le seul domaine exploité en Algérie. Les entreprises étatiques et privées telles que ECOREP, 3S, POLYOR, se sont spécialisées dans la construction des bateaux de pêche et de plaisance. Elles utilisent surtout de la résine polyester et la fibre de verre E.

Les problèmes d'environnement sont susceptibles de menacer à terme l'industrie nautique des matériaux composites ; en effet, les nouvelles réglementations européennes limitant les émissions des composés organiques volatiles COV (styrène), qui pourraient constituer une menace pour cette industrie si elle ne s'adapte pas.

I.4.7 Les composites dans l'aéronautique

Avec l'augmentation du prix du pétrole, l'utilisation des matériaux composites est devenue une nécessité. Chaque kilogramme gagné sur la structure d'un avion, fait gagner aux compagnies de voyageurs de l'argent et protège en parallèle l'environnement par réduction des émanations de CO₂. L'aéronautique utilise principalement des composites HP constitués d'une matrice époxy associée à un taux élevé de renforts en fibres de carbone.

L'aéronautique utilise les composites hautes performances pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté, de leur souplesse de forme et des économies de frais de maintenance qu'ils engendrent. Le gain total de 450 kilos sur un Airbus permet d'accueillir six passagers supplémentaires. Un gain de 100 kilos sur la structure d'une fusée allonge sa trajectoire de 100 kilomètres.

I.4.8 Les composites dans le ferroviaire

Les matériaux composites sont utilisés dans le domaine ferroviaire pour deux principaux atouts : un bon comportement au feu et un moulage facile des pièces utilisées. Le secteur ferroviaire utilise principalement des composites à matrice therm durcissable et fibres longues, mais il apparaît peu dynamique.

La généralisation des composites dans le ferroviaire est handicapée par leur coût supérieur à 9€/kg, contre 2€/kg pour les solutions en acier et par les difficultés de l'approche fonctionnelle rencontrées par les concepteurs.

I.4.9 Les composites dans le secteur médical

Les composites TD et TP ont investi récemment le secteur médical et de la sécurité, comme ils ont investi auparavant les autres secteurs. Il s'agit surtout des composites hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part. L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à une meilleure résistance aux chocs, une grande rigidité et une bonne résistance à la corrosion (prothèses, brancards).

Le médical reste attaché à l'utilisation des aciers spéciaux dont le prix de 9€/kg reste bien au dessous de celui des composites HP qui peut atteindre 50€/kg.

I.4.10 Aperçu du marché mondial des composites (tableau 1.6)

Le marché mondial du composite croît, en quantité, de 5,7 % par an depuis 1994 [F]. En 2000, sept millions de tonnes ont été produites, dont plus de 95 % sont des composites de grande diffusion, mais seulement 3% pour les composites TD, contre 9% pour les TP, qui sont apparus au début des années quatre-vingt, alors que les TD, existent depuis les années cinquante. Le marché mondial des fibres de verre s'établit à 2,5 millions de tonnes en 2000. Le tableau 1.1 nous donne une idée sur le marché mondial des composites.

Tableau 1.12. Marché mondial de la fibre de verre [G]

Application	France	Europe	Japon	Etat Unis	Brésil	Monde
Automobile	36(108)	32(640)	13(221)	30(1020)	22(37)	25(1788)
Ferroviaire	2(6)	2(20)	2(34)	1(34)	0(0)	1(72)
Aéronautique	4(12)	1(20)	1(17)	1(34)	3(5)	3(215)
Construction nautique	5(12)	4(160)	3(51)	12(408)	4(7)	6(429)
Construction civile	20(63)	33(620)	35(595)	23(782)	26(44)	30(2145)
Construction industrielle	8(24)	10(200)	14(238)	13(442)	32(54)	10(715)
Electricité électronique	15(45)	8(120)	23(391)	10(340)	8(14)	15(1073)
Sports et Loisirs	8(24)	8(160)	7(119)	8(272)	4(7)	8(572)
Matériel médical	1(3)	1(20)	1(17)	1(34)	0(0)	1(72)
Divers	1(3)	1(20)	1(17)	1(34)	1(2)	1(72)
Total milliers de tonnes	300	2000	1700	3400	169	7150

On constate de grandes disparités, en fonction des applications, dans l'utilisation des composites entre les différentes zones géographiques. La figure ci-dessous présente une comparaison des productions en Europe.

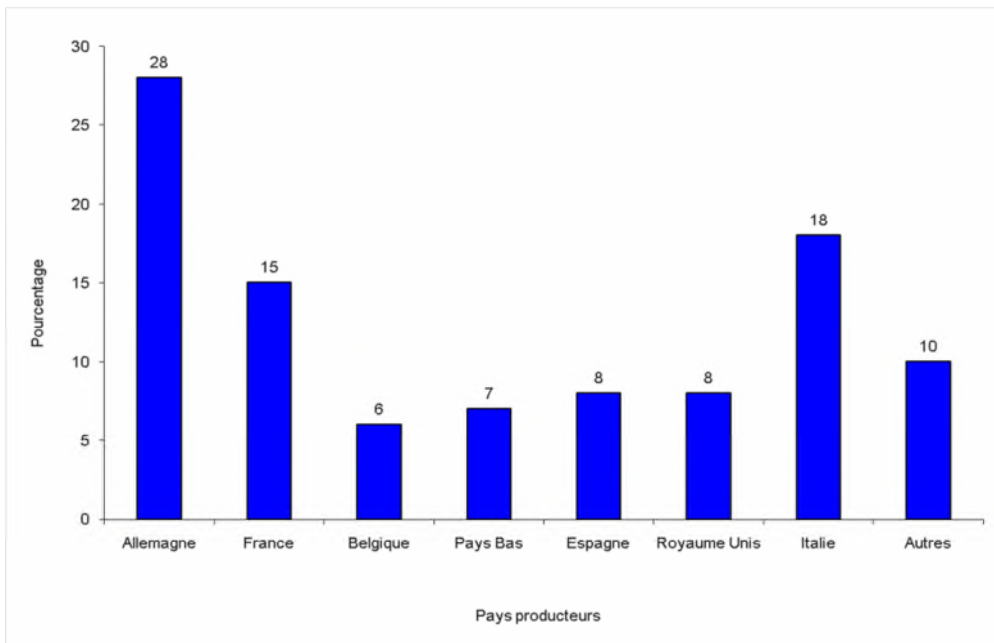


Figure.1.4 : Production européenne de la fibre de verre [G]

Les fibres de verre (500 kT/an en Europe) sont utilisées dans plus de 95% des composites, et plus particulièrement pour les produits GD.

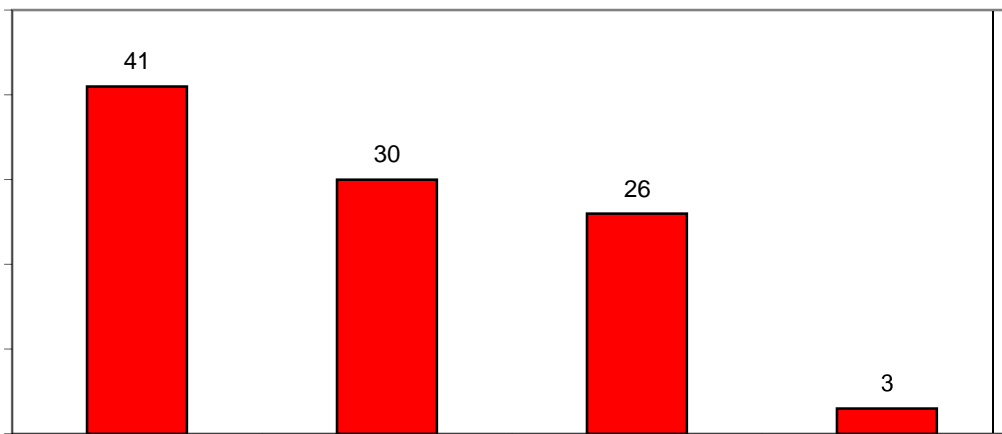


Figure. 1.5 : Consommation mondiale de la fibre de verre (Source : H)

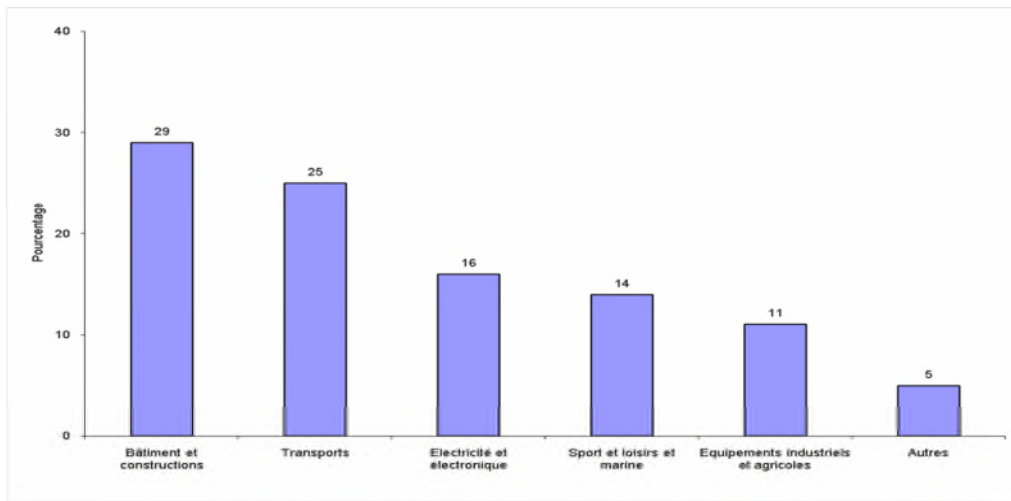


Figure. 1.6 : Application de la fibre de verre (Source : H)

La consommation mondiale de la fibre de verre est estimée à 5,8 Mt par an, elle est donnée par la figure ci-dessus. Et seul 2,6 Mt sont utilisés pour le verre de renforcement, qui entre dans les composites. La croissance de production des fibres de verre est estimée à 4 jusqu'à 10% annuellement jusqu'en 2010. Quant à celle des composites, elle est estimée à 5 jusqu'à 6% par an. La croissance de consommation du verre de renforcement est variable en fonction des continents. L'Amérique du sud a le taux le plus élevé de 12%, suivi de l'Asie avec un taux de 8%. L'Europe et l'Amérique du nord ont un taux plus faible de l'ordre de 5% et 4% respectivement. La plus grande part des fibres est utilisée par la construction et les transports, qui représentent à eux plus de 50%. La figure ci-dessous 1.9, nous donne une idée sur les principales applications des fibres de verre.

Le coût des composites reste relativement élevé, et il est fonction de la nature de ce dernier. Le coût du composite à haute performance HP vari entre 9 et 38€ le kg, en fonction de sa composition, quant à celui de grande diffusion GD, il est de l'ordre de 3 à 6€ le kg. Il reste supérieur à celui des matériaux traditionnels comme l'acier, le bois ou l'aluminium (de 3 euros à 38 euros/kg, selon les performances requises pour les matériaux composites, de 1,5 euros à 5 euros/ kg pour les matériaux plus traditionnels) [Chalaye 2002].

La production mondiale des résines époxy est estimée à 0,83 Mt. Ce qui représente 30% de la demande mondiale. Les principales applications sont données par la figure ci- dessous.

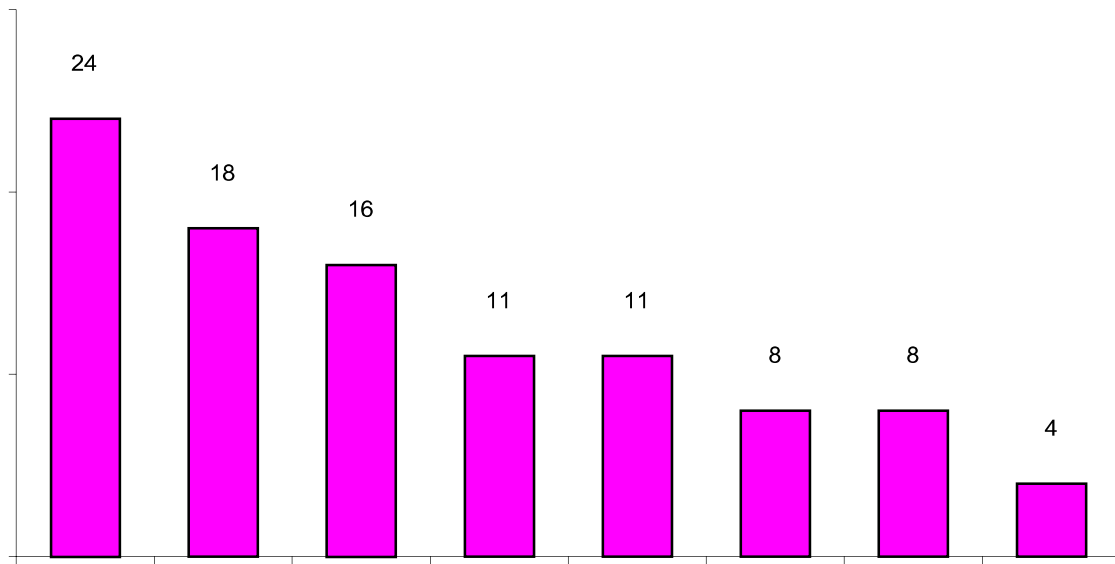


Figure I.7 : Application des résines époxy

Conclusion

Nous avons acquis dans ce chapitre des connaissances sur les matériaux composites conventionnels ainsi que ses domaines d'application et la diffusion de son utilisation à travers le monde, par la suite nous allons voir les différentes méthodes envisagées pour traiter des problèmes de structure composites multicouches tout en traitant l'architecture du composite conventionnel. Sachant que notre matériau d'étude est un composite plus au moins spécifique par rapport au matériau conventionnel.

**Chapitre II:
Généralités sur les
matériaux composites
avancés**

II.1. Introduction :

Depuis le début du vingtième siècle, l'utilisation des matériaux composites multicouches dans différentes applications d'ingénierie a largement augmenté. Malgré les avantages que présentent ces matériaux "grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté, réduction des coûts...etc.", ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes inter-faciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autre mécanisme d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. Ce problème a attiré beaucoup d'attention en raison de son influence significative sur la résistance et la rigidité des structures composites multicouches [26].

À la fin des années 80, une équipe de chercheurs japonais a proposé de surmonter ces difficultés par une solution d'une transition continue des propriétés recherchées, en concevant de nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de composition permettant de diminuer les fortes concentrations de contrainte par l'utilisation d'une nouvelle classe de matériaux composites avancés connus sous le nom de matériaux à gradient de propriétés "Functionally Graded Materials : FGM" dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l'épaisseur de la structure [27].

Au début, les matériaux composites avancés ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrière dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que ces matériaux ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

II.2. Concept des matériaux FGM :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés "FGM" fut proposé à la fin des années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial "National Aerospace Laboratory" au Japon pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales et comme un moyen de préparer les matériaux de barrière thermique pour l'isolation des chambres de nucléaires [28]. Une pièce peut être qualifiée de matériau FGM lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou dis-continuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu [29]. Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc.

La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales. La plupart des "FGM" sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

Tableau II.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

Phase		Caractéristiques mécaniques
Céramique	La face à haute température	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Céramique-métal	Continuité du matériau d'un point à l'autre "couches intermédiaires"	- Élimination des problèmes de l'interface ; - Relaxer les contraintes thermiques

Métal	La face à basse température	<ul style="list-style-type: none">- Bonne résistance mécanique ;- Conductivité thermique élevée,- Très bonne ténacité.
-------	-----------------------------	--

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau "FGM" est illustré dans la figure I.1ci-après. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des "FGM". Dans certains cas, on peut avoir un matériau composite avancé constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [30].

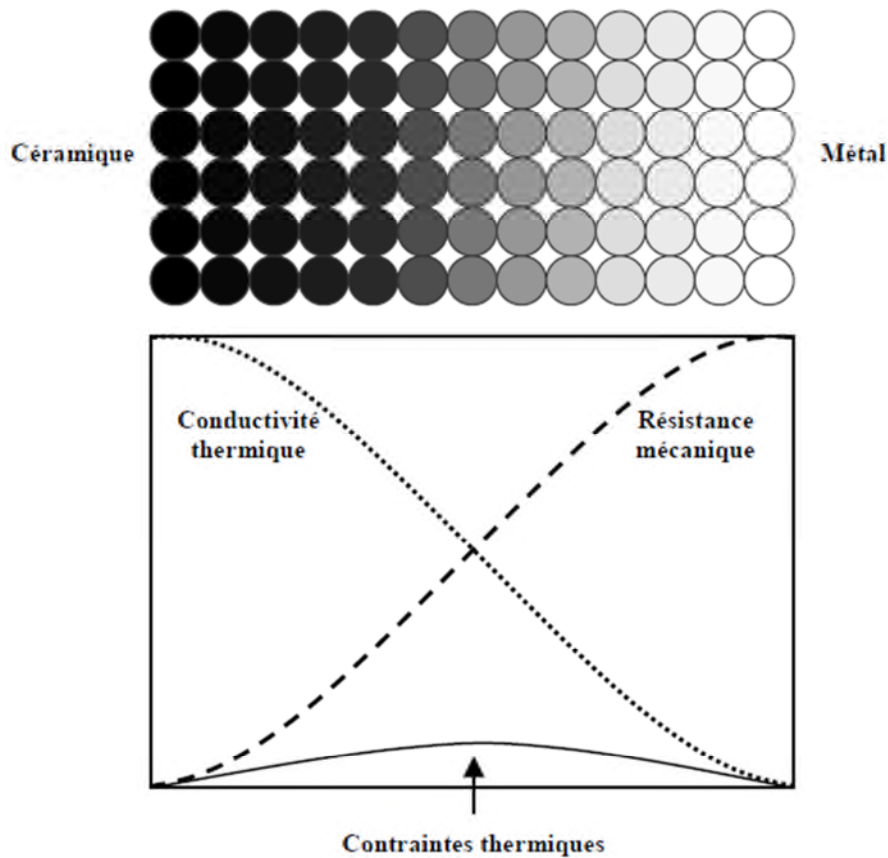


Figure II.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.

II.3. Différences entre FGM et matériaux composites traditionnels :

Les matériaux à gradient de propriétés attirent l'attention en termes de leurs applications dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble et la distribution composante est graduée sans interruption (voir figure I.2). Par exemple, l'un des FGM qui se composent du

métal et de céramique à la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures du côté céramique.

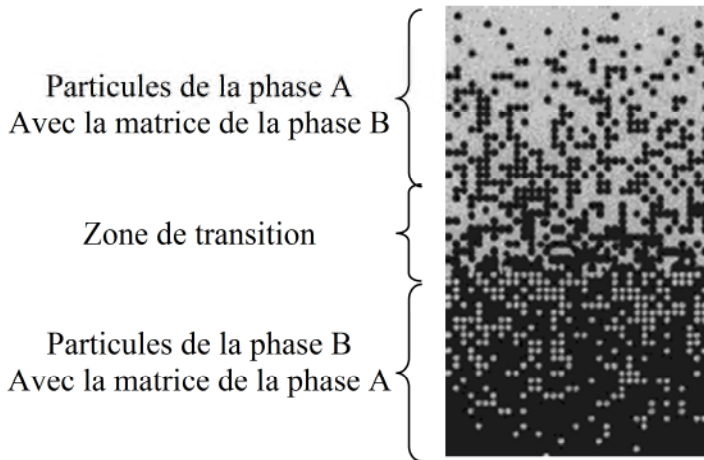


Figure II.2 : FGM "les fractions de volume graduées dans la direction verticale" [31].

Donc ces matériaux sont donc des matériaux composites avancés avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.3.

Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> 1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique 		
Structure	Eléments constitutifs: Céramique ○ Métal ● Microporosité ○ Fibre ◇		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

Figure II.3 : Caractéristiques des matériaux FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [32].

II.4. Historique de développement des FGM :

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été aperçu dans la nature depuis des millions d'années. On peut les trouver dans les tissus des plantes, des animaux et même dans notre corps en citant à titre d'exemple les os (voir figure I.4), les coquilles, les noix de coco et les feuilles de certaines graminées comme les bambous.

Tous ces exemples, ouvrent la porte vers la biométrie qui tente d'appliquer les caractéristiques de la conception de la nature dans les sciences industrielles et médicales.

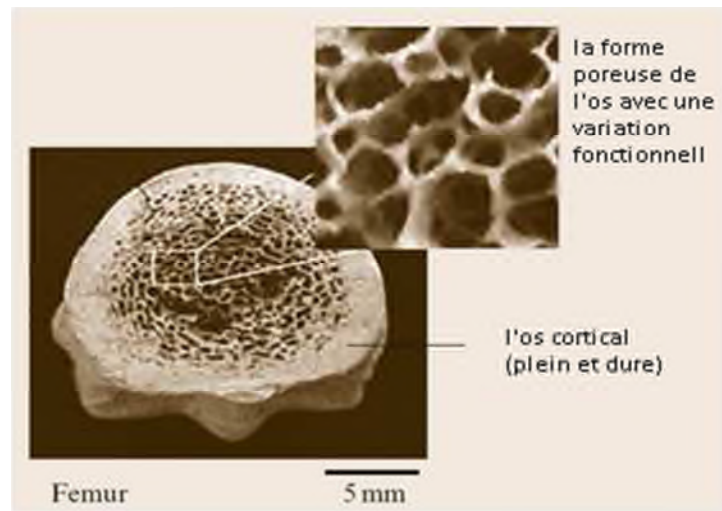


Figure II.4 : Vue microscopique d'une section transversale de l'os.

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre-vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats-Unis, la Chine et la Russie. En 1984 M. Nino et ses collègues à Sendai. Ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [33]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique [34]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [35].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [36].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau côté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques "côté haute températures" et des métaux "côté basse température".

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales "1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre" pouvant résister à des températures maximales de 2000K "température de surface" et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [34].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur et l'optique [37].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [38].

II.5. Les méthodes de fabrication des FGM :

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient de propriétés "FGM" peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène "mélange graduel" et transformation de cette structure en matériau en bloc "solidification". Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté à FGMs: les conditions de ces procédures doivent être choisies pour que le gradient ne soit détruit ou altéré en mode non contrôlée. L'attention doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGMs pendant la consolidation [38].

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu aqueux. Chaque particule élémentaire de poudre sédimente avec une vitesse proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de la particule "relation de Stokes". En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de la sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après.

II.5.1. Coulage en bande "Tape Casting" :

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.5), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [39]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées. Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes, soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [40], soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [41].

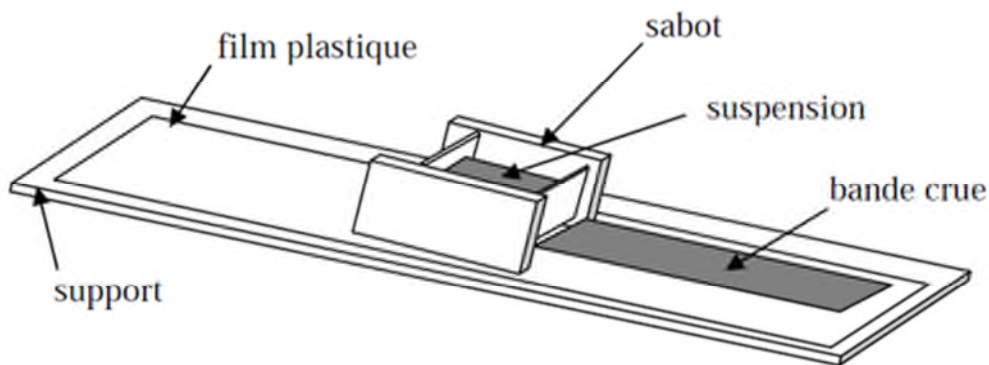


Figure II.5 : Principe de la méthode coulage en bande [39].

II.5.2. Coulage séquentiel en barbotine "Slip Casting" :

Le coulage en barbotine "slip casting" consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tessou "couche de poudre compacte" sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- ✓ Formation du tessou ou "prise",
- ✓ Consolidation du tessou ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- ✓ Du pouvoir de succion du plâtre "coulage classique [42] ",
- ✓ Ou d'une pression appliquée sur la barbotine "coulage sous pression".

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

II.5.3. Dépôt par Electrophorèse :

Le dépôt par électrophorèse "EPD", est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes "électrophorèse" et le dépôt de particules sur l'un des électrodes. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus [43]. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 et le céramique-métal, WC/Co puisque la composition des couches déposantes est déterminée par la suite composition de la suspension au moment du dépôt. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la (figure I.6).

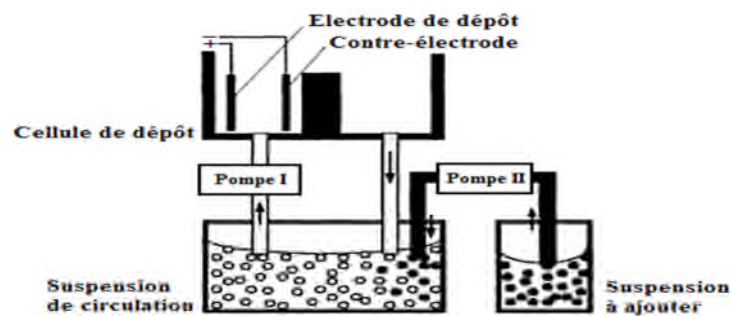


Figure II.6 : Principe de l'installation d'EPD pour la production des FGM [43].

II.5.4. Compaction sèche des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale.

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle [44].

I.5.5. Projection plasma :

La projection plasma consiste à introduire des particules solides "de taille inférieure à 100µm, environ" dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 1100°C et la vitesse 1000-1500m/s (figure I.7). Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé [45]. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par la projection plasma sont la résistance à l'usure et à la corrosion et ainsi à l'isolation thermique et électrique.

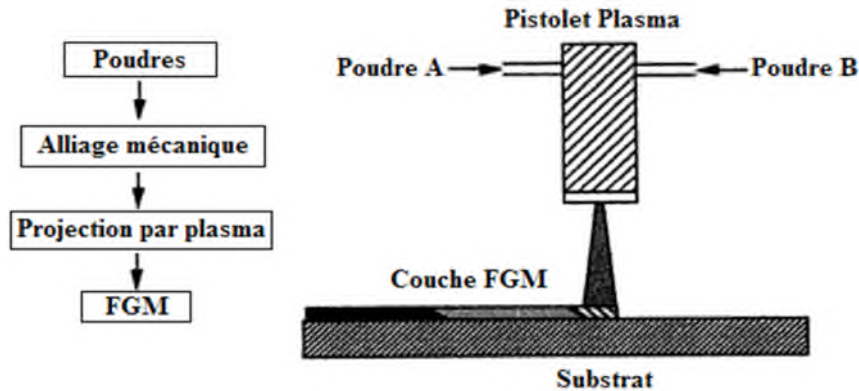


Figure II.7 : Méthode de projection plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. "La composition est graduée dans la direction plane "[45].

La projection plasma est devenue une méthode très utile pour fabriquer des FGM. Le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les

performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique.

I.5.6. Frittage et Infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [46].

Cette méthode peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.5.7. Dépôt physique en phase vapeur "PVD" :

La technique de dépôt physique en phase vapeur "*physical vapor deposition*" est une technologie prometteuse pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les caractéristiques avantageuses de PVD que les revêtements fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, enfin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie est considérablement plus longue. L'équipement utilisé pour déposer les revêtements d'isolation thermiques par l'intermédiaire de PVD, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc.

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source. Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et de zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.

I.5.8. Dépôt chimique en phase vapeur "CVD" :

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur "*chemical vapor deposition*", représenté schématiquement à la (figure I.8), un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz "par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures" qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma. Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces [47].

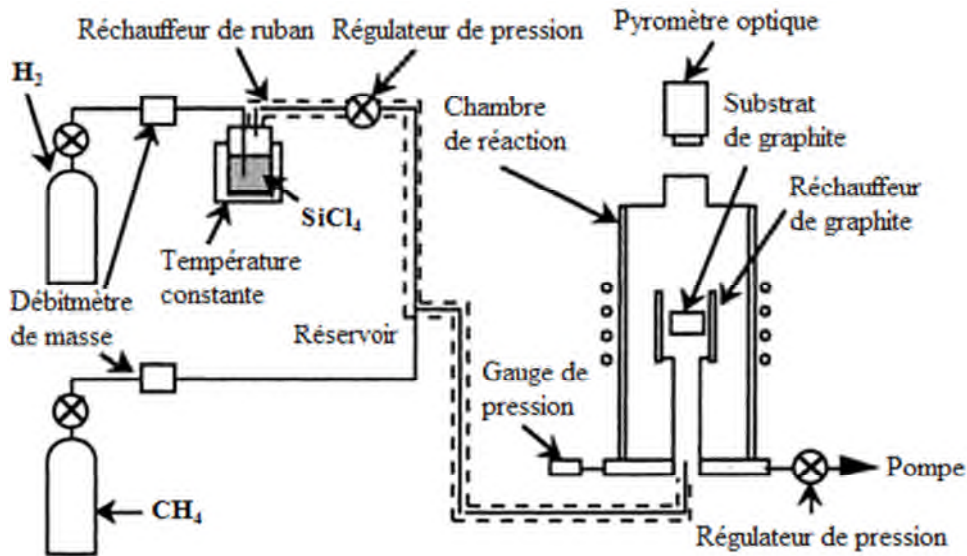


Figure II.8 : Technique de préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur "CVD" [47].

II.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés "FGM" peut être produit en changeant sans interruption les constituants des matériaux multiphasés dans un profil prédéterminé. Les dispositifs les plus distincts d'un FGM sont les microstructures avec des macros -propriétés graduées sans interruption. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle,

ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

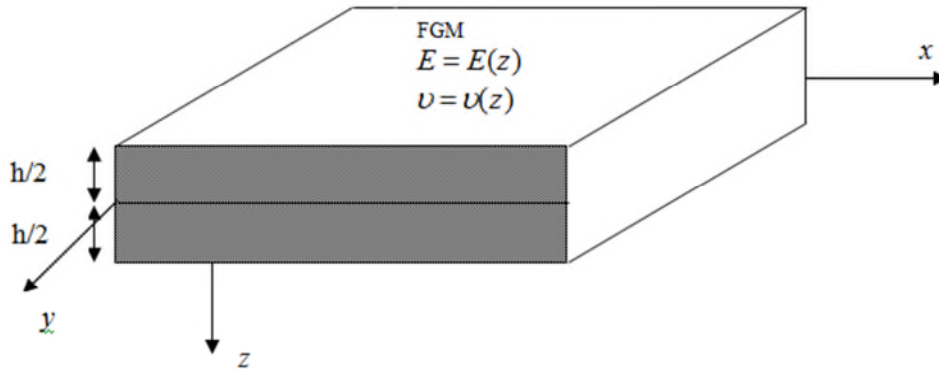


Figure II.9 : Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque (figure I.9), tandis que la direction de l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module d'élasticité "Young" et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur "l'axe z " soit : $E = E(z), \nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque en matériaux à gradient de propriétés varie en fonction de la loi de puissance "P-FGM" ou avec la fonction sigmoïde "S-FGM" ou bien la fonction exponentielle "E-FGM".

II.6.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.1)$$

Où p est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [48] :

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (I.2)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = h/2$) et de la surface supérieure ($z = -h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (figure I.10), il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

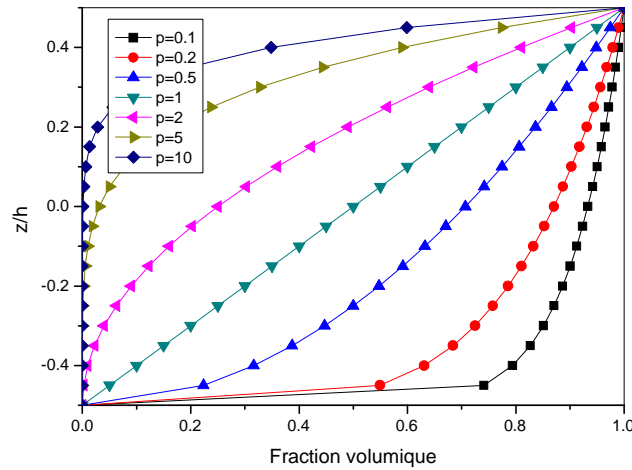


Figure II.10: Variation de la fraction volumique dans une plaque "P-FGM".

II.6.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [48]. Par conséquent, Chung et Chi [49] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.3a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé en utilisant les relations suivantes :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4b})$$

La (figure I.11) montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée dans ce cas "Plaque S-FGM".

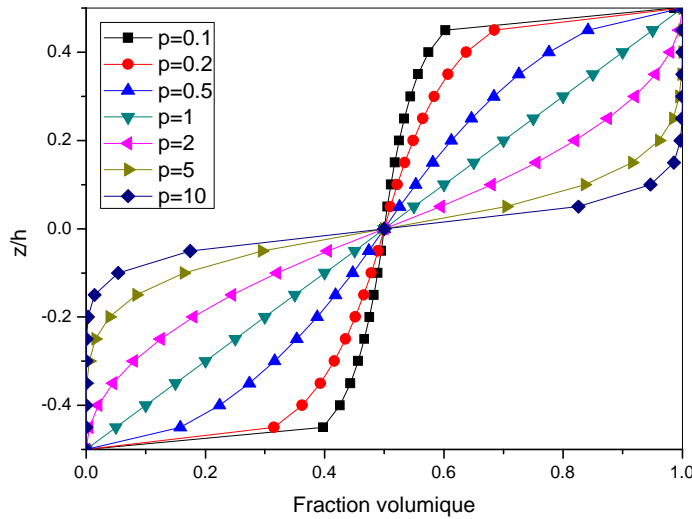


Figure II.11: Variation de la fraction volumique dans une plaque "S-FGM".

II.6.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle "E-FGM". En effet, cette fonction est impliquée dans ce présent travail, car les propriétés du matériau varient à travers l'épaisseur avec une distribution exponentielle. La fraction de volume des constituants s'écrit sous la forme (figure I.12) :

$$V(z) = e^{p \left(\frac{z+1}{h} \right)} \quad (\text{I.5a})$$

Et le module de Young de la plaque E-FGM peut être calculé en utilisant l'expression suivante :

$$E(z) = E_1 V(z) \quad (I.5b)$$

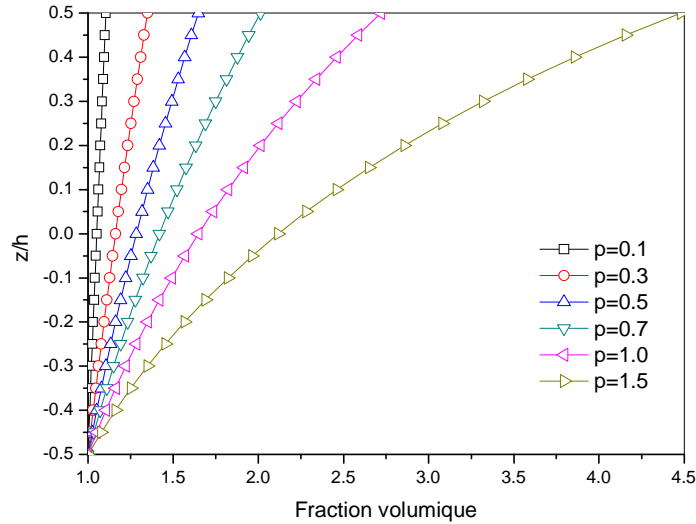


Figure II.12: Variation de la fraction volumique dans une plaque "E-FGM".

II.7. Domaines d'application des FGM :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans un large intervalle et dans différents domaines.

II.7.1. Aéronautique :

Les FGM permettent de produire un poids-léger des matériaux solides, durables et applicables dans différents domaines de structure. Ces derniers sont considérés d'une part, comme une technologie indispensable pour la roquette et à la construction de station spatiale, et d'autre part utilisables comme des barrières thermiques des avions spatiaux et des parties de moteur de fusée.

II.7.2. Matières industrielles :

De nombreuses applications de FGM ont été récemment apparues pour les matériaux industriels. Comme les produits récents sont intensifiés en raison d'une résistance mécanique et thermique accrue, la demande d'un nouveau matériau pour l'outil industriel est en pleine croissance. Dans ce domaine, il est nécessaire d'avoir les deux résistances donc la demande de la FGM est une solution.

II.7.3. Biomatériaux :

Notre corps est soutenu par 206 os, et certains d'entre eux couvrent un cerveau et des organes. Si nous avons une douleur à un os ou une articulation, nous aurons des troubles dans notre vie. Pour résoudre ce problème, un nouveau matériau nommé FGM est apparu et peut remplacer les os et les articulations. Non seulement la dureté et une excellente résistance à la corrosion et la compatibilité, mais aussi au niveau biologique.

II.7.4. Energie solaire :

Les cellules photovoltaïques des piles solaires ont une bande de fréquence propre de réponse à la lumière dépendant des matériaux. Ces piles solaires utilisent des FGM et présentent une réponse optimale sur une très large bande de fréquence. De plus la combinaison de la génération thermoélectrique avec la génération photovoltaïque sur une pile solaire permet la pleine utilisation de l'énergie lumineuse et thermique du rayonnement solaire et donc conduit à un meilleur rendement de conversion global.

Ces conversions thermoélectroniques utilisant les FGM laissent entrevoir la mise au point de générateurs à recharge de gaz ou kérosène compacts qui peuvent être utilisés dans des zones reculées en montagne ou dans les déserts froids ou chauds pour des instruments de mesure et de communication comme par exemple des stations météorologiques.

II.7.5. Génie civil :

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique des fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée, tels que les dallages industriels, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

II.8. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons défini au premier lieu les matériaux composites avancés nommés "FGM", l'historique de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, et par la suite nous avons cité les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation spatiale et progressive des propriétés matérielles du matériau FGM "module de Young, masse volumique et coefficient de poisson" suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être de puissance, sigmoïde et exponentielle. Ces matériaux permettent la construction des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales et en génie civil.

Chapitre III :

Différentes théories des

plaques

III.1. Introduction

Les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement ou de contrôle des vibrations et des contraintes. Pour mieux connaître, la réponse du comportement dynamique et statique de la structure, il est impératif d'approcher de la manière la plus correcte possible les phénomènes mis en jeu par les plaques qui sont plus ou moins complexes. Ainsi, un tablier d'un pont, un bâtiment, une caisse de voiture, une aile d'avion, un bateau... Parmi tous ces domaines d'application, on peut distinguer plusieurs types de plaques : des plaques membranaires, des plaques minces, modérées et épaisses dont les propriétés matérielles sont différentes. Dans cette étude nous nous intéresserons par les plaques hétérogènes en matériaux composites avancés, nommés les matériaux à gradient de propriétés qui sont généralement constitués par deux constituants différents.

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres et des plaques FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces "également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love". La théorie des plaques semi-épaisses "théorie des déformations du premier ordre" a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Timoshenko [50] et Reissner [51]. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle "théorie 3-D" qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

III.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur, est petite en comparaison des deux autres, et qui généralement comporte un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur que nous appellerons surface moyenne (Voir figure II.1). Par convention, cette

surface sera le plan (x-y), l'axe (o-z) correspond à l'axe transversal selon l'épaisseur. Une plaque peut être constituée d'un matériau homogène, ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

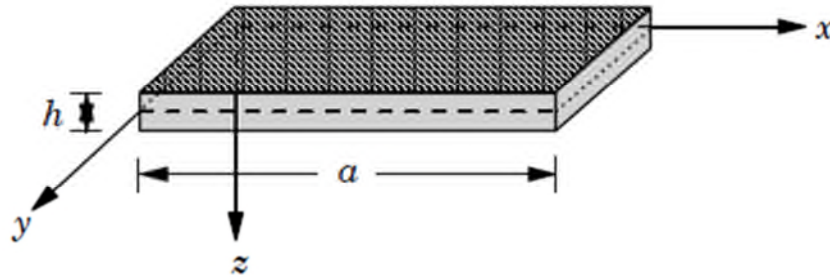


Figure III.1 : Géométrie d'une plaque de forme rectangulaire.

Afin de traiter des problèmes de plaques élastiques, des hypothèses doivent être imposées pour simplifier les équations générales de l'élasticité linéaire. Dans le cas d'un problème de plaques en flexion on applique des charges normales à la surface moyenne, dans la direction de z. Ces forces appliquées provoquent une flexion dans la plaque avec un déplacement du feuillet moyen dans la direction de z, ce déplacement vertical est habituellement appelé flèche et noté par w .

III.3. Modèles analytiques des plaques FGM

L'ensemble de ces modèles sont basées sur les lois de comportement élastique de la théorie d'élasticité linéaire et les hypothèses fondamentales nécessaires pour caractériser le modèle analytique choisi. Il faut savoir que l'aspect géométrique de la plaque est défini par une surface de référence plane et par une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions. Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée. Dans l'analyse des plaques en flexion, on peut utiliser trois théories fondamentales :

- ✓ Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT),
- ✓ Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT),
- ✓ Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

III.3.1. Théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Le champ de déplacement associé à cette théorie est présenté dans l'équation (II.1). La cinématique ci-après (figure II.2) illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff : la section de la plaque déformée reste orthogonale à la surface neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et surestimer les charge critique de flambement et les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de modèle de "plaques minces". Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger [52] ainsi que Reddy [53].

En se basant sur les hypothèses citées ci-dessus, le champ de déplacement de la théorie classique est exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - z \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial \mathbf{x}}, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - z \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial \mathbf{y}}, \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \tag{II.1}$$

Avec u_0 et v_0 sont les composantes du champ de développement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$). Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

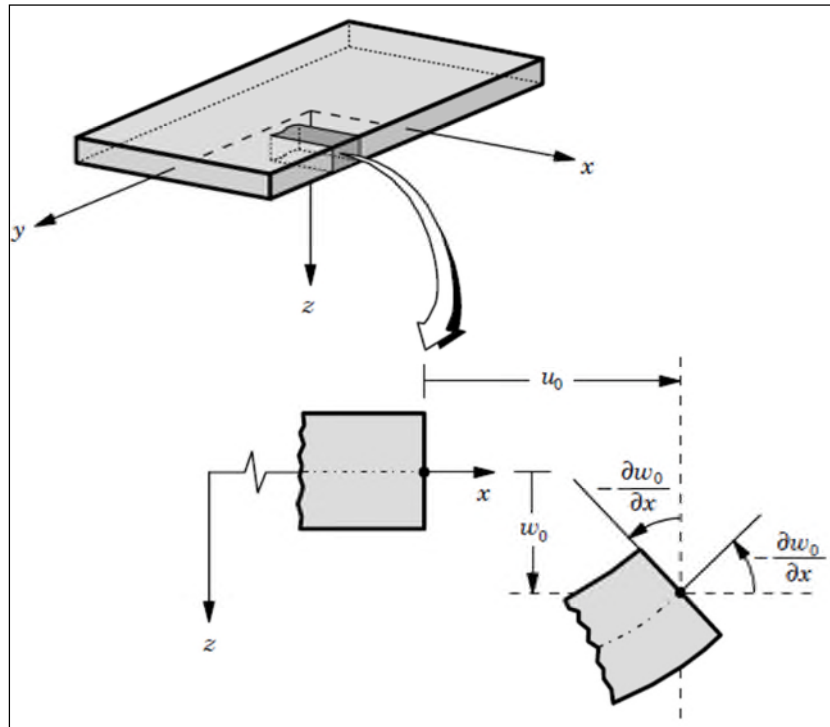


Figure III.2 : Cinématique de la plaque de Love Kirchhoff (CPT)

III.3.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) est une extension de la cinématique de la théorie classique des plaques (CPT) par une déformation de cisaillement transversale de la plaque dans leur hypothèse cinématique (figure II.3), dans ce cas la distribution des contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction du cisaillement pour corriger cette forme de contraintes. Généralement ce coefficient est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouvées dans les références de Reissner [51] et Mindlin [54] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ce modèle a été utilisé par suite par Reddy pour l'analyse statique en flexion, la vibration libre et le flambement des plaques isotropes et multicouches [53, 55].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$

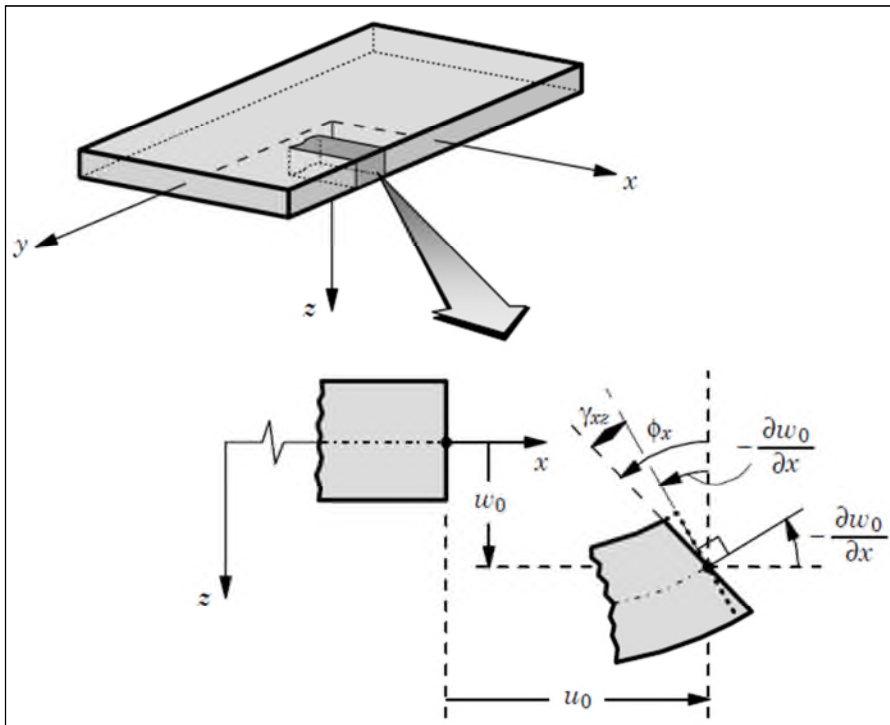


Figure III.3 : Cinématique de la plaque de Reissner- Mindlin (FSDT)

Avec ce choix de la forme des champs de déplacement, les déformations transversales sont constantes en (z) . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche discontinue entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal [56]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix

empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude du composite épais reste aléatoire par ce type d'approche cinématique. Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

III.3.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur (voir figure II.4). Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans plusieurs références scientifiques [57, 58, 59, 60, 61].

Nous avons introduit ici quelques modèles de plaques utilisés pour analyser le comportement des matériaux composites avancés (FGM).

Le champ de déplacement est généralement comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - z \frac{\partial \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{f}(z) \varphi_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\
 \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - z \frac{\partial \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} + \mathbf{f}(z) \varphi_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\
 \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) &= \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

Où u, v et w représentent les déplacements dans les directions x, y et z . Les composantes de déplacements u_0, v_0 et w_0 sont ceux d'un point du plan moyen ($\mathbf{x}, \mathbf{y}, z = 0$). φ_x et φ_y sont les rotations due à la flexion des plans yz et xz . Cependant $\mathbf{f}(z)$ est la fonction de gauchissement qui représente la forme de distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transverse dans l'épaisseur de la plaque. Ainsi le choix de cette fonction $\mathbf{f}(z)$ est basé sur les résultats de l'élasticité tridimensionnelle ou toute autre information sur la distribution des contraintes de cisaillement transverse.

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque CPT est obtenue par en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre FSDT peut être obtenue par $f(z) = z$.

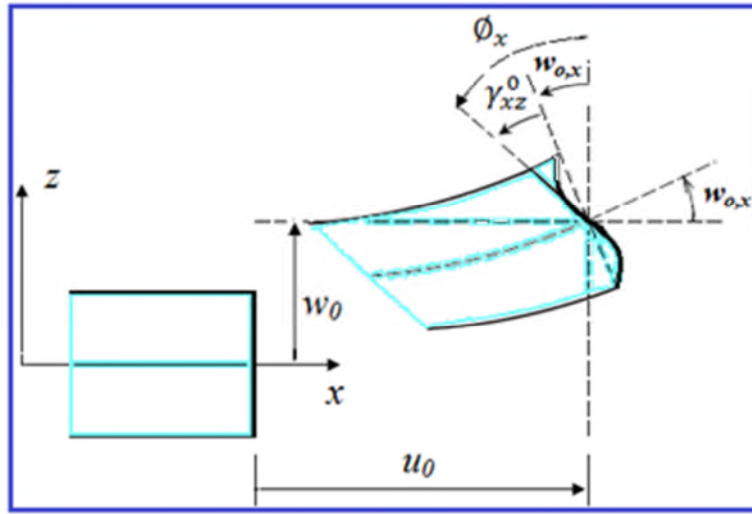


Figure III.4 : Cinématique de la plaque d'ordre élevé (HSDT)

III.4. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé (HSDT)

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.4) [56, 62, 63, 64]. Nous citons en particulier :

L'approche d'Ambartsumyan [65] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

L'approche de Reissner [51], Panc et Kaczkowski, avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

L'approche de Levinson, Murthy [66] et Reddy [60] Avec ;

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w , est constant [60]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par Kant et Swaminathan [61].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [64]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme trigonométrique à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par Polit *et al.* [67] et Dau *et al.* [68].

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement interlaminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de

l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes. Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

Tableau III.1 : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories des plaques en matériaux composites avancés.

Théories	intitulé	Fonction de cisaillement $f(z)$	Coefficient de correction k	Domaine de validité
CPT Kirchhoff [69]	Théorie classique des plaques	0	---	Plaques minces
FSDT Mindlin [54]	Théorie de déformation en cisaillement du 1er ordre	z	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumyan [65]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner [51]	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
PSDT Levinson [66], Reddy [60]	Théorie de déformation parabolique	$z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
TSDT Touratier [64]	Théorie de déformation trigonométrique	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Soldatos [70]	Théorie de déformation hyperbolique	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi [71]	Théorie raffinée	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
ESDT Karama et al. [72]	Théorie de déformation exponentielle	$z e^{-2(z/h)^2}$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu [73]	Théorie de déformation exponentielle	$z \alpha \frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}, \alpha > 0$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
El Meiche et al. [74]	Théorie raffinée	$\frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi)}{\cosh(\pi/2 - 1)}$	Non Requis	Plaques minces et épaisses
Zenkour [75]	Théorie de déformation hyperbolique	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	Non Requis	Plaques minces et épaisses

D'après les différents modèles proposés de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé, on voit que l'approche d'Ambartsumyan [65] et l'approche de Reissner [51] (voir figures II.5 et II.6 ci-dessous), sont un peu loin des autres fonctions de forme présentées par Touratier [64], Reddy [60], Karama et al [72] et Aydogdu [73]. Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions de cisaillement qui sont en principe plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, contraintes inter-faciales, délaminage, ...etc.), mais pour le cas des matériaux à gradient de propriétés (FGM) cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

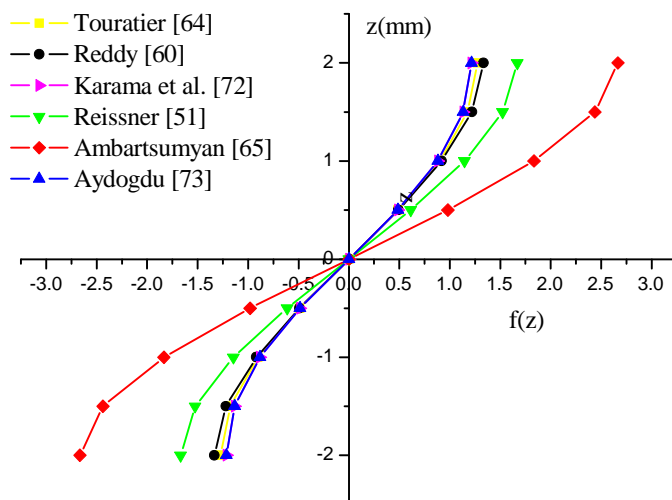


Figure III.5 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur z .

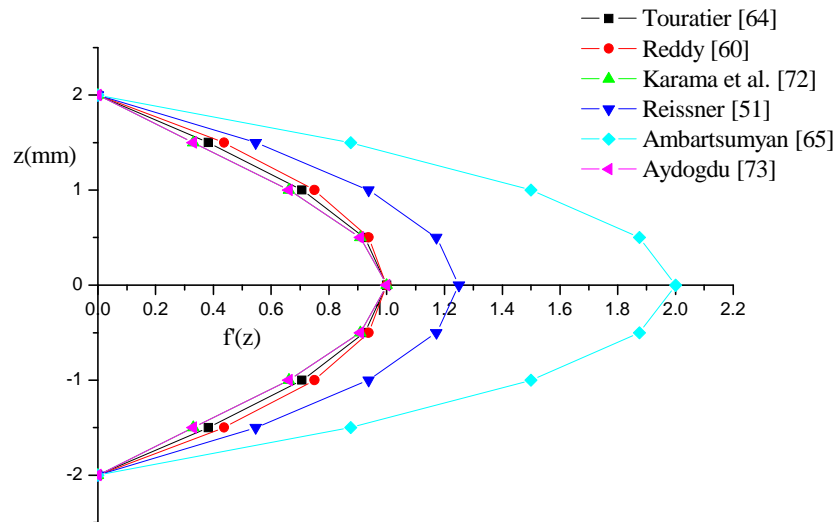


Figure III.6 : Variation de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur z .

III.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

Shimpi [71] a développé un modèle raffiné pour l'analyse des plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que quatre équations d'équilibre avec seulement quatre inconnus à trouver au lieu des cinq dans le cas des théories classiques. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de déformation en cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Plusieurs chercheurs ont adaptés cette théorie pour étudier le comportement statique et dynamique des plaques stratifiées, sandwichs et en matériaux à gradient de propriétés.

Récemment Thai et Kim [76, 77] ont adapté le modèle raffiné, avec succès, au flambement des plaques orthotropes et à la vibration libre des plaques composites stratifiées et sandwichs.

III.6. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Il est observé que cette approche est applicable pour les structures en matériaux FGM. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés par Carrera [78], Afaq et al. [79], Reddy [60] et Di Sciuva [80]. Le multicouche

est subdivisé en sous structures correspondant en fait a chaque couche ou chaque ensemble de couches. On applique a chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement couteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan. D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classes en deux groupes : les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches.

III.6.1. Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d ordre supérieur ou Zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. En fait avec les modèles couches discrètes le multicouche est représenté par un ensemble de plaques structures 2D) couples par des efforts d'interface Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite. Dans les travaux de Srinivas [81] et Reddy [53] on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative les travaux de Ren [82] et Yin [83] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique ainsi Ren [82] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans la référence [84], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions a variables séparées par couche a partir de l'équilibre des forces et moments les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur dans Yin [83],

les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

III.6.2. Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva [78] est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches.

Toutefois, la fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir figure II.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

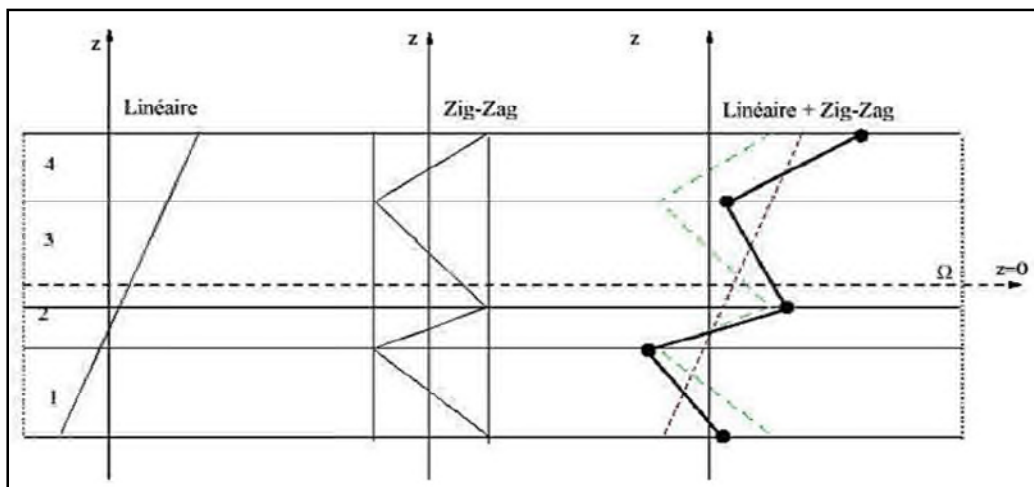


Figure II.7 : Champ de déplacement des modèles zig-zag du premier ordre [85].

III.7. Approche quasi-3D

Pour éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle et de l'introduction de l'effet de déformation normale transverse cette particularité devient importante pour définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire de façon générale toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche basées sur la jonction d'une fonction non linéaire de la coordonnée de l'épaisseur z de telle sorte que le

déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers L'épaisseur de la plaque.

En générale les théories d'ordre élevé de déformation en cisaillement transversal et la déformation normale suivant l'épaisseur considèrent l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent être numériquement appliquées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera [86] et récemment évoluée par Demasi [87].

De nombreux travaux basant sur la théorie d'ordre élevé avec effet d'étirement ont été proposés dans les littératures pour analyser le comportement statiques et dynamiques des structures en matériaux composites multicouches et en FGM (plaques, poutres, coques, ...etc.), Talha [88], Carrera [89], Reddy [90], Mantari et Guedes Soares [91], Draiche et al. [92], Benbakhti et al. [93] et Benahmed et al. [94]. Ces théories sont assez complexes en termes de formulations, néanmoins elles sont très intéressantes du point de vue précision.

III.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu sur les différents modèles analytiques de calcul des plaques épaisses en FGM, ainsi que les travaux effectués par plusieurs chercheurs dans ce domaine, à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie des plaques raffinée (RPT) et la théorie quasi-3D de déformation en cisaillement d'ordre élevé avec effet d'étirement de l'épaisseur.

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, néanmoins devient assez complexes en termes de formulations. Le chapitre qui se suivra portera sur la présentation d'étude du comportement statique des plaques en matériaux composites avancés dans les propriétés matérielles varient selon une fonction exponentielles à travers l'épaisseur de la plaque (E-FGM).

Chapitre IV :
Analyse dynamique
d'une plaque FGM
avec porosité

IV.1. Introduction :

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont une classe de composites qui présentent une variation continue des propriétés d'une surface à une autre et éliminent ainsi la concentration de contrainte trouvée dans les composites stratifiés. Un FGM typique est constituée d'un mélange de deux phases de matériau, par exemple une céramique et un métal. La raison pour laquelle les FGM sont de plus en plus utilisées dans de nombreuses structures d'ingénierie aérospatiale, automobile, civile et mécanique est que leurs propriétés matérielles peuvent être adaptées à différentes applications et environnements de travail [1].

Etant donné que l'effet de déformation de cisaillement est plus remarqué dans les FGM, les théories de déformation de cisaillement devraient être utilisées pour analyser les plaques à gradient de propriétés. La théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) développée par Mindlin [4] et Reissner [5] pris en considération l'effet de déformation de cisaillement transversal, mais néglige les conditions aux limites sans traction sur les surfaces supérieure et inférieure. Un facteur de correction du cisaillement est donc nécessaire pour compenser la différence entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constant supposé [6,7]. Pour éviter l'utilisation du facteur de correction de cisaillement et obtenir une meilleure prédiction de la déformation de cisaillement transversal et des déformations normales dans les plaques FGM, des théories de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été proposées. En général, les HSDT peuvent être développés sur la base de variations d'ordre supérieur des déplacements dans le plan ou des déplacements dans le plan et transversaux (c'est-à-dire des théories quasi 3D). Cependant, les HSDT représentent un coût de calcul élevé car ils impliquent de nombreuses inconnues.

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie raffinée est étendue et évaluée pour les plaques FGM simplement appuyée. On suppose que les propriétés matérielles des plaques FGM varient en fonction de la distribution de la fraction volumique des constituants selon la loi de puissance. Cette loi a été modifiée afin de prendre en considération l'effet de porosité qui peut se produire à l'intérieur de la plaque FGM. Les équations de mouvement sont issues du principe de Hamilton. Des solutions en forme fermée de plaques simplement supportées sont présentées. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions existantes pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle dans la prévision des réponses en vibration libre des plaques FGM.

IV.2. Formulation théorique :

La plaque FGM est considérée comme une plaque à couche unique d'épaisseur uniforme elle à une longueur a , une largeur b , et une épaisseur totale h en matériau anisotrope de métal et de céramique et la gradation est supposée être seulement à travers l'épaisseur, dans laquelle la composition varie de surface supérieure en surface inférieure.

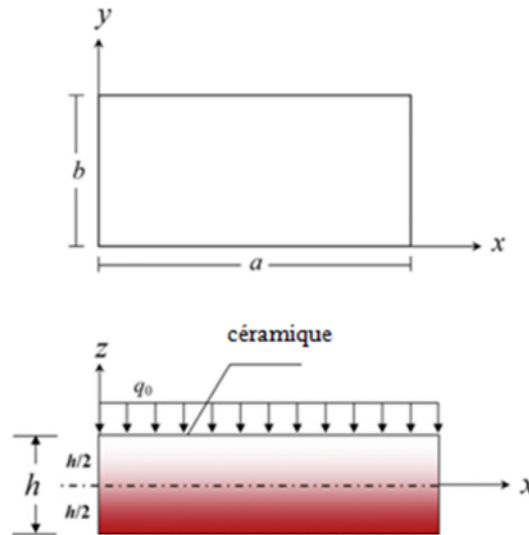


Figure IV.1. Géométrie et dimension d'une plaque FGM

IV.2.2. La nouvelle théorie raffinée hyperbolique de déformation de cisaillement de la plaque :

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, contre cinq en cas d'autres théories de déformation de cisaillement (Reddy. 1984, Karama. 2003). La présente théorie est variationnellement cohérente, ne nécessite pas de facteur de correction, et les contraintes de cisaillement transversales varient de manière parabolique à travers l'épaisseur satisfaisant la nullité des contraintes aux bords de la plaque.

IV.2.2.1. Hypothèses de base :

Les hypothèses de la présente théorie raffinée de la plaque sont les suivantes (Sid Ahmed Houari. 2013):

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les déformations impliquées sont infinitésimales.

- Le déplacement transversal W comprend deux composantes de flexion w_b , et de cisaillement w_s . Ces composants sont en fonction des coordonnées x , y et le temps t seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (IV.1a)$$

- La contrainte transversale normale σ_z est négligeable en comparaison avec les contraintes dans le plan σ_x et σ_y .
- Les déplacements U dans la direction x et V dans la direction y sont constitués des composants d'extension, de flexion, et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s \quad v = v_0 + v_b + v_s \quad (IV.1b)$$

Les composants de cisaillement u_s et v_s donne lieu, en collaboration avec w_s , aux variations paraboliques de déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et donc à des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque d'une manière telle que les contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} sont nuls au niveau des faces supérieures et inférieures de la plaque. Par conséquent, l'expression pour u_s et v_s ne peut être donnée par :

$$u_s = -(z - \sin(\frac{\pi z}{h})) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad v_s = -(z - \sin(\frac{\pi z}{h})) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (IV.1c)$$

IV.2.2.2. Champs de déplacement et les déformations :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (IV.2)$$

Et :

$$f(z) = \frac{3\pi}{2} h \cdot \tanh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{3\pi}{2} z \cdot \sec h^2\left(\frac{1}{2}\right) + z \quad (IV.3)$$

Les déformations linéaires peuvent être obtenues sous forme de :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\
 \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\
 \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\
 \varepsilon_z &= 0
 \end{aligned} \tag{IV.4}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}
 \end{aligned} \tag{IV.5}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z) = 1 - f'(z) \quad \text{et} \quad f'(z) = \frac{df(z)}{dz}
 \end{aligned}$$

Il convient de noter que les déformations ci-dessus sont dérivées pour des problèmes géométriquement linéaires. Pour les plaques FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{IV.6}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont les composants de la contrainte et la déformation respectivement.

Les coefficients de rigidité, Q_{ij} peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \tag{IV.7}$$

IV.2.2.3. propriétés des matériaux efficaces d'une plaque en céramique-métal à gradient de propriétés :

Une plaque FGM fabriquée à partir d'un mélange de deux matériaux, par exemple, un métal et une céramique. Les propriétés du matériau de la plaque FGM est supposée variee de manière continue à travers l'épaisseur de la plaque. Dans cette étude, la plaque imparfaite est supposée avoir des porosités réparties dans l'épaisseur en raison de défaut pendant la production. Considérons un FGM imparfait avec une fraction volumique de porosité, α ($\alpha \ll 1$), répartie uniformément entre le métal et la céramique, la loi du mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (Wattanasakulpong,2014) est utilisée comme (Hadji. 2015a) :

$$P = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (IV.8)$$

Maintenant, la fraction du volume total du métal et de la céramique est: $V_m + V_c = 1$, et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrit comme :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (IV.9)$$

Par conséquent, toutes les propriétés d'un FGM imparfait peuvent être écrites comme (Hadji. 2015a) :

$$P = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c + P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (IV.10)$$

Il est à noter que le nombre réel positif k ($0 \leq k < \infty$) est l'indice de loi de puissance ou d'une fraction de volume, et z est la distance entre le plan médian de la plaque à gradient de propriétés. La plaque FGM est une plaque entièrement en céramique lorsque k est mis à zéro et entièrement métallique pour une valeur de k égal à l'infini.

Ainsi, les équations du module de Young (E) et la densité du matériau (ρ) de la plaque FGM avec porosité peut être exprimée comme:

Cependant, le coefficient de Poisson (ν) est supposé être constant. Les propriétés matérielles d'une plaque FGM parfaite peuvent être obtenues lorsque α est réglé à zéro.

Type	Taux de porosité dans le		Propriétés de matériaux FGM
	Céramique	Métal	
Type-I	0%	0%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m$ $\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + \rho_m$
Type-II	50%	50%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2}$ $\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2}$
Type-III	60%	40%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (3E_c + 2E_m) \frac{\alpha}{5}$ $\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + \rho_m - (3\rho_c + 2\rho_m) \frac{\alpha}{5}$
Type-IV	40%	60%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (2E_c + 3E_m) \frac{\alpha}{5}$ $\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + \rho_m - (2\rho_c + 3\rho_m) \frac{\alpha}{5}$
Type-V	75%	25%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (3E_c + E_m) \frac{\alpha}{4}$ $\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + \rho_m - (3\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{4}$
Type-VI	25%	75%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + E_m - (E_c + 3E_m) \frac{\alpha}{4}$ $\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k + \rho_m - (\rho_c + 3\rho_m) \frac{\alpha}{4}$

IV.2.3. Equations constitutives et conditions aux limites :

Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels, qui peuvent être écrites pour la plaque comme :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} - \rho(\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w)] dv \right] dt = 0 \quad (IV.11)$$

Substituant Eqs. (IV.5) et (IV.6) dans l'équation. (IV.11) et par l'intégration à travers l'épaisseur de la plaque, l'Eq. (IV.11) peut être réécrite comme (Hassaine Daouadji. 2012) :

$$\int_{\Omega} (N_x \cdot \delta \varepsilon_x^0 + N_y \cdot \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \cdot \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \cdot \delta k_x^b + M_y^b \cdot \delta k_y^b + M_{xy}^b \cdot \delta k_{xy}^b + M_x^s \cdot \delta k_x^s + M_y^s \cdot \delta k_y^s + M_{xy}^s \cdot \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \cdot \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \cdot \delta \gamma_{xz}^s) d\Omega - \int_{\Omega} q(\delta w + \delta w_b) d\Omega = 0 \quad (IV.12)$$

Ou :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.13})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{IV.14})$$

Les équations d'équilibre peuvent être dérivées de l'équation. (IV.15) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en prenant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_s et δw_b égal à zéro séparément. On peut obtenir les équations d'équilibres associées à la déformation de cisaillement de la présente théorie.

$$\begin{cases} \delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

En utilisant l'équation. (IV.6) dans l'équation. (IV.13), les résultantes des contraintes de la plaque peuvent être liés aux déformations total par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}; S = A^s \gamma \quad (\text{IV.16})$$

Ou :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{IV.17})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{IV.18})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.20})$$

$$S = \left\{ S_{xz}^z, S_{yz}^s \right\}, \gamma = \left\{ \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \right\}, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

Les coefficients de rigidités A_{ij} et B_{ij} etc., sont définis comme :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.22})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), \quad Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\mu^2} \quad (\text{IV.23})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \quad (\text{IV.24})$$

Substituant l'équation. (IV.13) dans l'équation. (IV.15), on obtient l'équation suivante (Hassaine Daouadji. 2012)

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} D_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{11} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s = 0 \quad (\text{IV.25})$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - B_{22} d_{222} w_b - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} w_s - B_{22}^s d_{222} w_s = 0 \quad (\text{IV.26})$$

$$B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_b - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_b - D_{22} d_{2222} w_b - D_{11}^s d_{1111} w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_s - D_{22}^s d_{2222} w_s + q = 0 \quad (\text{IV.27})$$

$$B_{11}^s d_{111} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} v_0 + B_{22}^s d_{222} v_0 - D_{11}^s d_{1111} w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_b - D_{22}^s d_{2222} w_b - H_{11}^s d_{1111} w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{1122} w_s - H_{22}^s d_{2222} w_s + A_{55}^s d_{11} w_s + A_{44}^s d_{22} w_s + q = 0 \quad (\text{IV.28})$$

Ou d_{ij} , d_{ijl} , et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, (i, j, l, m=1,2) \quad (IV.29)$$

Pour une plaque FGM simplement appuyée, la limite suivante des conditions sont imposées aux bords latéraux (Hassaine Daouadji.2012):

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{à} \quad x = -a/2, a/2, \quad (IV.30)$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{à} \quad y = -b/2, b/2, \quad (IV.31)$$

Basant la solution de Navier, les charges transversales mécaniques q sont supposées sous la forme d'une double série trigonométrique comme :

$$q = q_0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (IV.32)$$

Ou :

$$\lambda = m\pi / a, \quad \mu = n\pi / b \quad (IV.33)$$

q_0 est l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Nous supposons que la forme de solution suivante pour u_0 , v_0 , w_b et w_s qui satisfait aux conditions aux limites (Hassaine Daouadji.2012) :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y).e^{i\omega t} \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y).e^{i\omega t} \\ W_b \sin(\lambda x) \sin(\mu y).e^{i\omega t} \\ W_s \sin(\lambda x) \sin(\mu y).e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (IV.34)$$

Où ω est la fréquence naturelle. U , V , W_b et W_s sont des paramètres arbitraires. On peut réduire les équations à la forme suivante:

$$([C] - \omega[G])\{\Delta\} = \{0\} \quad (IV.35)$$

Avec :

$$\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t \quad (IV.36)$$

Où $[C]$ et $[G]$ se réfère aux rigidités à la flexion et les matrices de masse et ω à la fréquence correspondante (Hassaine Daouadji.2012).

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, [G] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (IV.37)$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ a_{12} &= \lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= -\lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ a_{23} &= -\mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= -\mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2D_{12}\lambda^2\mu^2 + 4D_{66}\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \\ a_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \\ a_{44} &= H_{11}\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \\ a_{45} &= \lambda\mu(G_{12} + G_{66}) \\ a_{55} &= F_{44} + G_{66}\lambda^2 + G_{22}\mu^2 \end{aligned} \quad (IV.38)$$

Et :

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{22} = I_1 \\ m_{33} &= I_1 + I_3(\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{34} &= I_1 + I_5(\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{44} &= I_1 + I_6(\lambda^2 + \mu^2) \end{aligned} \quad (IV.39)$$

Ou :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f(z), zf(z), [f(z)]^2) \rho(z) dz \quad (IV.40)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m \quad (IV.41)$$

IV.3. Résultats :

Dans cette section, divers exemples numériques et graphiques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle et également pour présenter l'effet de la variation du taux de distribution de porosité sur la prévision des réponses en vibration de plaques FGM simplement supportées. Pour les résultats numériques, une plaque Al/Al₂O₃

composée d'aluminium (comme métal) et d'alumine (comme céramique) est considérée. Le module et la densité des matériaux utilisés sont comme suit:

Matériaux	Propriétés	
	E (N/m ²)	ρ (kg/m ³)
Aluminium (Al)	70×10^9	2707
Alumina (Al ₂ O ₃)	380×10^9	3800
Zirconia (ZrO ₂)	200×10^9	5700
Ti-6Al-4V	105.7×10^9	4429
Aluminium oxide	320.2×10^9	3750

Le coefficient de Poisson est supposé constant sur l'épaisseur de la plaque et égal à 0,3.

Le tableau IV.01 présente une comparaison de la fréquence fondamentale d'une plaque carrée. La plaque est simplement appuyée et soumise à un chargement dynamique. Différentes valeurs de rapport d'épaisseur ont été prises en considération ($a/h=20, 10$ et 5). Les résultats de la présente théorie sont proches de ceux obtenus par Vel *et al* et Dozio *et al*. Il est clair que la fréquence fondamentale augmente lorsque le rapport d'épaisseur augmente.

Une seconde étude comparative de la fréquence fondamentale au centre d'une plaque rectangulaire est présentée dans le tableau IV.02. La plaque est simplement appuyée et soumise à un chargement dynamique. Les résultats sont comparés avec ceux de Hosseini *et al*. Bon accord est observé. On peut constater que la fréquence fondamentale devient plus faible quand le rapport de géométrie b/a augmente.

Le tableau IV.03 présente une comparaison de la fréquence fondamentale d'une plaque FGM carrée en Al/ZrO₂ en fonction de l'indice de puissance. Le rapport d'épaisseur dans ce tableau est pris égal à $a/h=5$. La fraction volumique de porosité est considérée égale à $\alpha=0.2$. A partir de ces résultats on peut constater que la fréquence fondamentale augmente quand la plaque FGM est poreuse.

Les tableaux IV.04 et IV.05 montrent l'effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. Le taux de porosité dans la plaque FGM est pris égal ($\alpha=0.1, 0.15$ et 0.2). Le rapport d'épaisseur est pris égal $a/h=0.05$ et 0.1 . On peut conclure que la fréquence fondamentale est maximale quand la porosité est de type-VI. On peut également remarquer que la fréquence fondamentale devient plus faible quand la plaque FGM est en Al/ZrO₂.

Tableau IV. 01. Comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée simplement appuyée $k=1; aa=0; a/b=1;$

a/h	Modèle				
	Vel et al. Exact 3D	Dozio HOSNT-15	Dozio HOSNT-12	Dozio HOSNT-9	Présente Type I
20	0.0153	0.0154	0.0154	0.0154	0.01512
10	0.0596	0.0596	0.0596	0.0597	0.05915
5	0.2192	0.2191	0.2193	0.2213	0.2188

Tableau IV.02. Comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque rectangulaire $E_{11}=E_{22}=\rho_{11}=\rho_{22}=1; k=1; aa=0$

b/a	h/a	Méthode		Fréquence fondamentale (m,n)						
				(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)	(4,1)	(3,2)
0.5	0.01	Hosseini (2011a)		49.3032	78.8421	128.002	167.267	196.678	196.678	245.626
		présente	Type-I	49.30318	78.8421	128.002	167.267	196.678	196.678	245.6267
	0.1	Hosseini (2011a)		45.4869	69.8093	106.735	133.720	152.753	152.753	182.565
		présente	Type-I	45.4869	69.8093	106.735	133.720	152.753	152.753	182.626
2	0.01	Hosseini (2011a)		12.3342	19.7320	32.0572	41.9134	49.3032	49.3032	61.6149
		présente	Type-I	12.3342	19.7320	30.93	41.9134	49.3032	49.3032	61.6149
	0.1	Hosseini (2011a)		12.0675	19.0653	30.3623	39.0977	45.4869	45.4869	55.8497
		présente	Type-I	12.0676	19.0653	30.3623	39.0977	45.4869	45.4869	85.07490

Tableau IV. 03. Comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/ZrO₂. $a/h=5; a/b=1; aa=0.2$

k	Modèle											
	Vel (2004) Exact 3D	Dozio (2014) HOSNT-15	Neves (2013)	Qian (2004)	Hosseini (2011)	Benferhat (2016)	Présente					
							Type-I	Type-II	Type-III	Type-IV	Type-V	Type-VI
2	0.2197	0.2196	0.2200	0.2153	0.2264	0.2187	0.2188	0.2406	0.2421	0.2391	0.2444	0.2369
3	0.2211	0.2211	0.2215	0.2172	0.2276	0.2183	0.2185	0.2401	0.2414	0.2387	0.2434	0.2367
5	0.2225	0.2225	0.2230	0.2194	0.2291	0.2174	0.2176	0.2389	0.2399	0.2377	0.2414	0.2359

Tableau IV.04: Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃.
a/b=1

	Type de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.05	h/a=0.1	h/a=0.05	h/a=0.1	h/a=0.05	h/a=0.1
Plaque FGM P=5	Type-II	0.017543	0.067897	0.017797	0.068585	0.018018	0.069020
	Type-III	0.017498	0.067651	0.017702	0.068065	0.017840	0.068032
	Type-IV	0.017584	0.068121	0.017880	0.069040	0.018168	0.069845
	Type-V	0.017422	0.067239	0.017533	0.067142	0.017510	0.066162
	Type-VI	0.017638	0.068422	0.017985	0.069616	0.018347	0.070832
Plaque FGM P=10	Type-II	0.016400	0.063261	0.016634	0.063725	0.016872	0.063906
	Type-III	0.016351	0.062972	0.016546	0.063137	0.016732	0.062744
	Type-IV	0.016445	0.063530	0.016716	0.064247	0.016999	0.064841
	Type-V	0.016273	0.062495	0.016402	0.062094	0.016471	0.060111
	Type-VI	0.016509	0.063898	0.0168279	0.0649247	0.017168	0.065967

Tableau IV.05: Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/ZrO₂.
a/b=1

	Type de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.05	h/a=0.1	h/a=0.05	h/a=0.1	h/a=0.05	h/a=0.1
Plaque FGM P=5	Type-II	0.016339	0.063318	0.016890	0.065292	0.017499	0.067437
	Type-III	0.016409	0.063564	0.017007	0.065687	0.017670	0.068000
	Type-IV	0.016269	0.063074	0.016776	0.064900	0.017332	0.066879
	Type-V	0.016517	0.063935	0.017184	0.066284	0.017932	0.068846
	Type-VI	0.016165	0.062711	0.016608	0.064318	0.017088	0.066050
Plaque FGM P=10	Type-II	0.016300	0.063108	0.016902	0.065243	0.017576	0.067586
	Type-III	0.016377	0.063371	0.017030	0.065671	0.017767	0.068200
	Type-IV	0.016224	0.062846	0.016776	0.064819	0.017390	0.066976
	Type-V	0.016493	0.063770	0.017226	0.066319	0.018063	0.069126
	Type-VI	0.016112	0.062456	0.016592	0.064191	0.017120	0.066074

Tableau IV.06: Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \alpha h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/Al₂O₃.

	Type de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2
Plaque FGM P=5	Type-II	0.067897	0.160207	0.068585	0.160781	0.069020	0.160397
	Type-III	0.067651	0.159368	0.068065	0.159038	0.068032	0.157119
	Type-IV	0.068121	0.160981	0.069040	0.162320	0.069845	0.163153
	Type-V	0.067239	0.157974	0.067142	0.155974	0.066162	0.150940
	Type-VI	0.068422	0.162030	0.069616	0.164298	0.070832	0.166497
Plaque FGM P=10	Type-II	0.063261	0.148467	0.063725	0.148022	0.063906	0.146082
	Type-III	0.062972	0.147425	0.063137	0.145823	0.062744	0.141516
	Type-IV	0.063530	0.149431	0.064247	0.149945	0.064841	0.149678
	Type-V	0.062495	0.145695	0.062094	0.141841	0.060111	0.131145
	Type-VI	0.063898	0.150745	0.064924	0.152413	0.065967	0.153903

Tableau IV.07: Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \alpha h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée en Al/ZrO₂.

	Type de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2
Plaque FGM P=5	Type-II	0.063318	0.149615	0.065292	0.153657	0.067437	0.157935
	Type-III	0.063564	0.150087	0.065687	0.154384	0.068000	0.158909
	Type-IV	0.063074	0.149143	0.064900	0.152925	0.066879	0.156940
	Type-V	0.063935	0.150792	0.066284	0.155459	0.068846	0.160308
	Type-VI	0.062711	0.148434	0.064318	0.151819	0.066050	0.155418
Plaque FGM P=10	Type-II	0.063108	0.148885	0.065243	0.153184	0.067586	0.157739
	Type-III	0.063371	0.149380	0.065671	0.153944	0.068200	0.158743
	Type-IV	0.062846	0.148388	0.064819	0.152415	0.066976	0.156702
	Type-V	0.063770	0.150120	0.066319	0.155062	0.069126	0.160156
	Type-VI	0.062456	0.147642	0.064191	0.151252	0.066074	0.155103

L'effet du taux de distribution de porosité en fonction du rapport de géométrie sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂ est présenté dans les tableaux IV.06 et IV.07, respectivement. La plaque FGM est considérée de forme carrée et rectangulaire. L'indice de puissance est pris égal à k=5 et k=10. A partir de ces résultats, on peut constater que la fréquence fondamentale est plus importante quand la plaque est de forme rectangulaire.

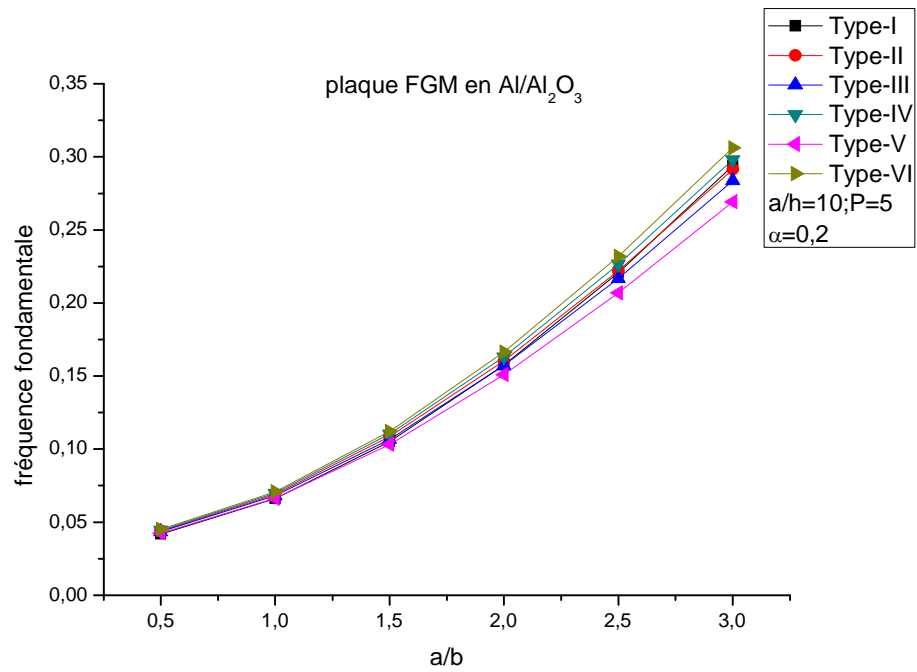


Figure IV.02. Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport de géométrie (a/b) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃

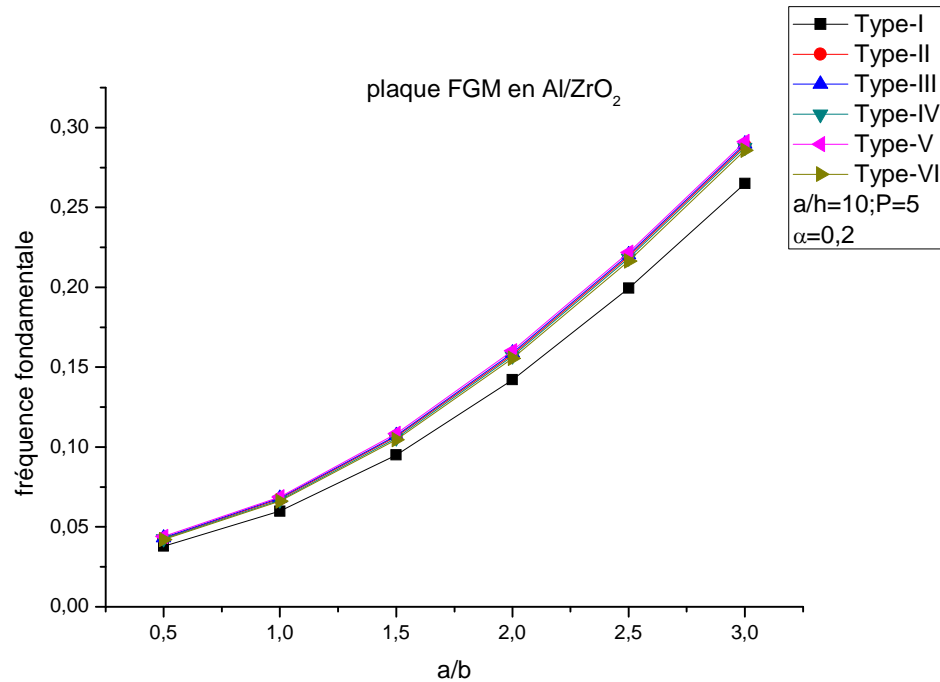


Figure IV.03. Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport de géométrie (a/h) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂

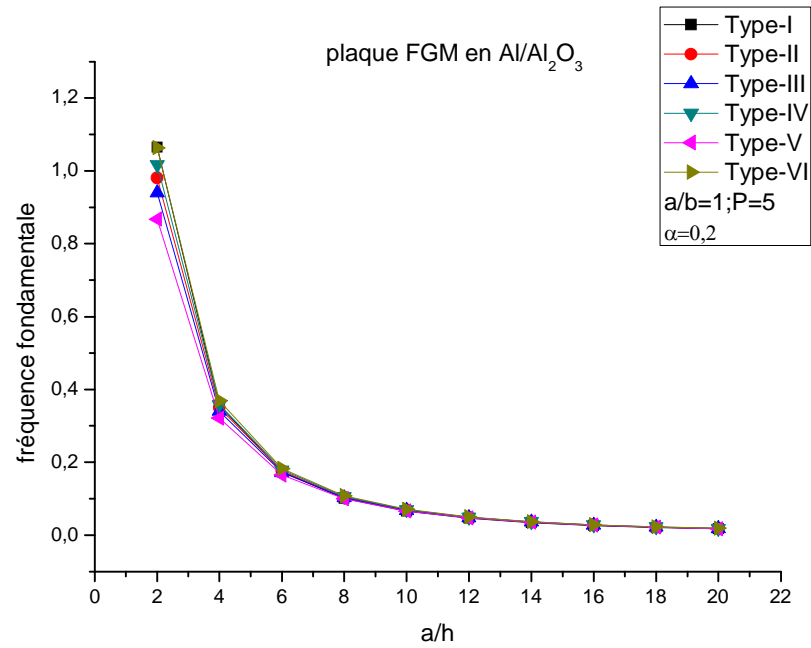


Figure IV.04. Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃

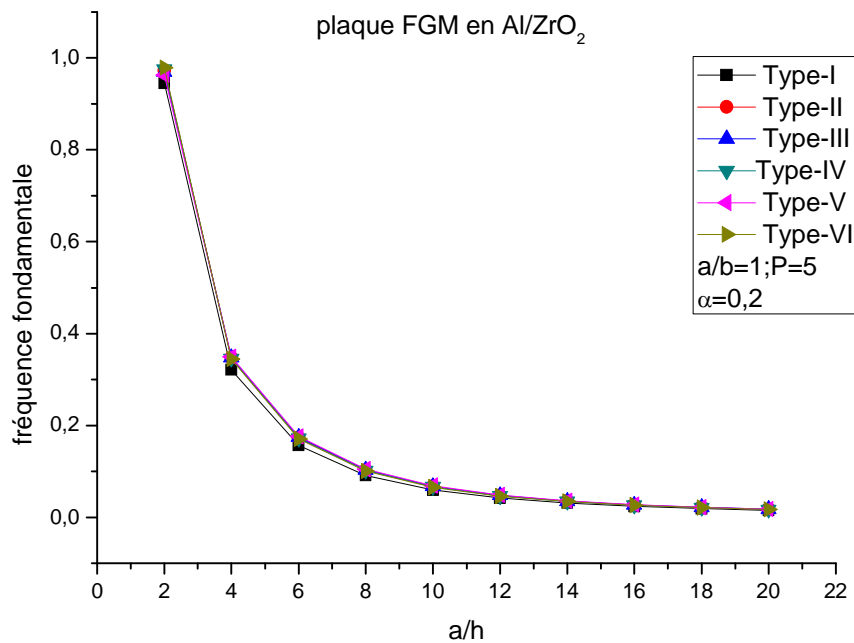


Figure IV.05. Variation la fréquence fondamentale au centre en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂

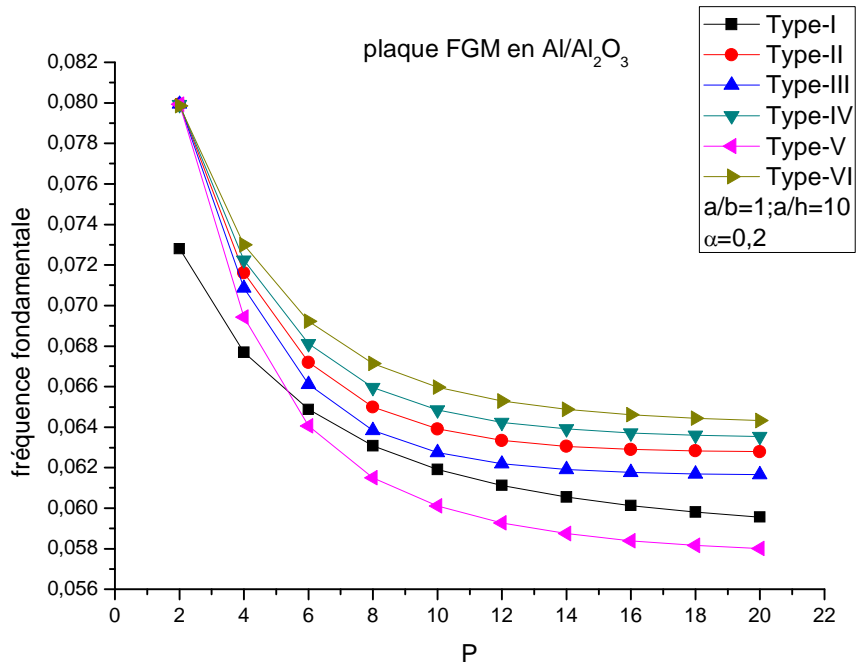


Figure IV.06. Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'indice de puissance (P) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃

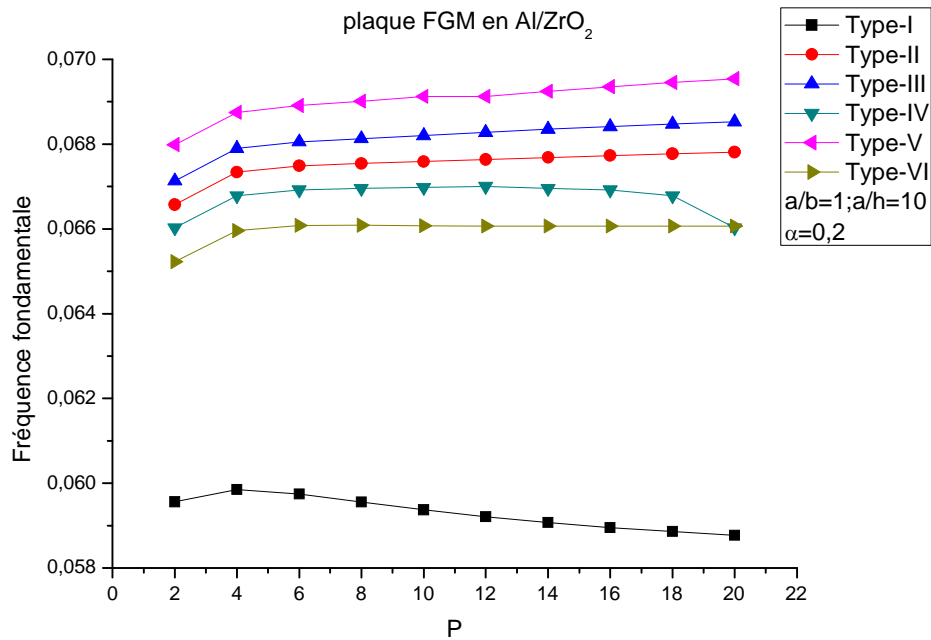


Figure IV.07. Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'indice de puissance (P) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂

Les figures IV.02 et IV.03 montrent l'influence du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale en fonction du rapport de géométrie d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. La fraction volumique de porosité est considérée égale à $a=0.2$. A partir de ces figures, on peut remarquer que l'effet du taux de distribution de porosité devient plus remarquable à mesure que le rapport a/b augmente.

Les figures IV.04 et IV.05 présentent l'influence du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. Le rapport de géométrie est pris égal à $a/b=1$. L'indice de puissance est considéré égal à $P=5$. On peut constater que la fréquence fondamentale d'une plaque FGM diminue quand le rapport d'épaisseur augmente.

L'influence du taux de distribution de porosité en fonction du rapport d'épaisseur sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂ en fonction de l'indice de puissance est présenté dans les figures IV.06 et IV.07, respectivement. On peut conclure que l'effet du taux de distribution de porosité devient plus important à mesure que la plaque FGM devient plus riche en métal.

IV.04. Conclusions:

Dans cette partie, l'effet du taux de distribution de porosité entre les particules de la plaque FGM sur le comportement dynamique d'une plaque FGM sans fondation élastique est étudié. La plaque FGM est considérée simplement appuyées. Les propriétés du matériau sont supposées varier en fonction de la direction de l'épaisseur de la plaque et de la règle de mélange qui a été reformulée pour évaluer les caractéristiques du matériau avec la porosité. La méthode Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec des conditions aux limites simplement appuyées. Des études de convergence et de validation ont été menées pour prouver l'exactitude de la théorie actuelle. Les résultats obtenus montrent un bon accord avec ceux disponibles dans la littérature pour les plaques d'épaisseur moyenne. Les conclusions suivantes ont été tirées pour différents indices de fraction volumique, le rapport d'épaisseur, le rapport de géométrie et la fraction volumique de porosité:

- La variation du taux de distribution de porosité influe sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM et devient plus important quand le rapport de géométrie augmente.

- L'effet du taux de distribution de porosité devient plus remarquable à mesure que la plaque FGM devient plus riche en métal.
- La fréquence fondamentale diminue quand l'indice de puissance et le rapport d'épaisseur augmente.

Chapitre V :
Effet du taux de
distribution de porosité
sur le comportement
dynamique des plaques

V.1. Introduction :

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont attiré une attention considérable en raison de leurs performances élevées, de leur résistance à la chaleur et de leurs excellentes caractéristiques par rapport aux composites conventionnels. Ils sont inhomogènes du point de vue microscopique et leurs propriétés mécaniques varient continuellement et sans à-coups d'une surface à l'autre, éliminant ainsi la concentration de contraintes retrouvée dans les composites stratifiés. Les plaques FGM actuelles sont fabriquées à partir d'un mélange de métal et de céramique et leurs matériaux sont non homogènes mais souvent isotropes.

De nombreuses études ont été réalisées pour analyser le comportement des FGM et des plaques en sandwich. Lanhe (Lanhe. 2004) a décrit le flambage thermique d'une plaque FGM rectangulaire épaisse simplement appuyée, en utilisant la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre. Zhao et al. (Zhao. 2009) ont étudié l'analyse du flambement thermique et mécanique de plaques FGM selon la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre en utilisant la méthode de Ritz. Yaghoobi et al. (Yaghoobi. 2013) ont étudié l'analyse de flambement de plaques sandwich FGM reposant sur une base élastique à deux paramètres dans diverses conditions aux limites.

Les plaques supportées par une fondation élastique à deux paramètres rencontrent généralement des problèmes techniques dans de nombreuses applications de structures. Différents types de modèles de fondation élastiques ont été proposés pour illustrer l'interaction entre la fondation et les structures en plaques. Le premier type est le modèle linéaire de Winkler (à un paramètre) où la base consiste en une série de ressorts séparés voulant des effets de couplage entre eux. Ceci décrit qu'il existe une interaction proportionnelle entre la déviation et les forces externes du point appliqué dans la fondation. Il existe de nombreuses applications pour le paramètre Winkler qui ont recours à la vibration et au flambement des plaques. Le second type est la fondation Pasternak (cisaillement) que les ressorts séparés de la fondation Winkler ajoutent par un ressort cisailant pour simuler les interactions entre eux. Le modèle de Pasternak (fondations élastiques à deux paramètres) est largement utilisé pour montrer le comportement mécanique des interactions structure-fondation. De nombreux articles ont été discutés, les plaques reposant sur des bases élastiques et à deux paramètres.

L'objectif de cette partie est d'étudier l'effet du taux de distribution de porosité sur le comportement dynamique des plaques FGM reposées sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. La plaque est réalisée en matériau isotrope ayant des propriétés matérielles variant d'une façon continues dans seulement la direction d'épaisseur. Considérons un matériau à gradient de propriétés à deux phases, avec une variation de la loi de puissance des fractions en volume des constituants dans l'épaisseur. Des résultats numériques et graphiques pour les fréquences sont donnés. Une excellente comparaison avec les résultats disponibles dans la littérature est faite.

V.2. Formulation de la problématique :

Prenons une plaque composite d'épaisseur uniforme h , de largeur b et de longueur a , comme illustré à la Fig. 1. La plaque est constituée d'un FGM dont les propriétés du matériau varient régulièrement dans la direction z uniquement. La plaque FGM actuelle est composée d'un mélange de céramique et de métal. À la surface inférieure, la plaque est en métal pur, tandis qu'à la surface supérieure, elle est en céramique. Le coefficient de Poisson est supposé constant sur l'épaisseur de la plaque et égal à 0,3.

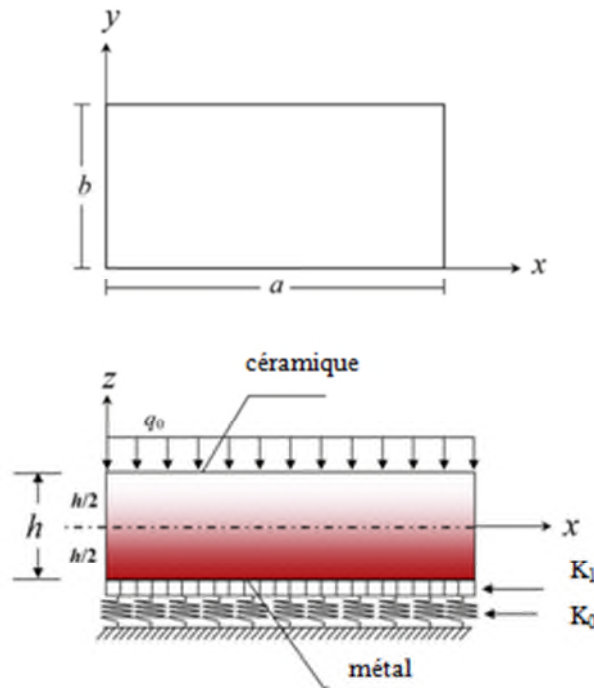


Figure V.1. Géométrie et dimension d'une plaque FGM reposé sur une fondation élastique

Nous supposons que le module d'élasticité (E) peut être déterminé comme:

$$E(z) = E_m V_m(z) + E_c V_c(z) \quad (V.1)$$

$$V_c(z) = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = \left(\frac{z_{ns} + c}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (V.1)$$

$$V_m(z) = 1 - V_c(z) \quad (V.2)$$

Lorsque la valeur de k égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique, alors que k infinie indique une plaque entièrement métallique.

où k est l'indice de gradient. D'après l'équation ci-dessus, lorsque $k = 0$, la plaque est en céramique pure, tandis que lorsque $k \rightarrow \infty$ la plaque est en métal pur. Le champ de déplacement en un point de la plaque FG est exprimé par:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (V.3)$$

L'origine des coordonnées de matériau est à la surface neutre de la plaque. La déformation linéaire peut être obtenue à partir des relations cinématiques comme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z_{ns}) \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (V.4)$$

Ou

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{df(z)}{dz}
 \end{aligned} \tag{V.5}$$

Avec:

$$f(z) = \frac{3\pi}{2} h \cdot \tanh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{3\pi}{2} z \cdot \sec^2\left(\frac{1}{2}\right) + z \tag{V.6}$$

Les relations constitutives linéaires d'une plaque FGM peuvent être écrites comme :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{V.7}$$

Ou :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \\
 Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}
 \end{aligned} \tag{V.8}$$

V.3. Les équations principales et les conditions aux limites :

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour obtenir les équations de mouvement appropriées pour le champ de déplacement et les équations constitutives. Le principe peut être énoncé sous forme analytique:

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U + U_F - K - W) dt \tag{V.9}$$

Où U est la variation de l'énergie de déformation et K est la variation de l'énergie cinétique de la plaque FGM, U_F est l'énergie de déformation de la fondation et W est le travail des forces extérieures.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} - \rho(\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w)] dv + \int_A [f_e \delta w] dA \right] dt = 0 \quad (V.10)$$

Où $(\ddot{\bullet})$ représente la dérivée seconde par rapport au temps et f_e est la densité de la force de réaction de la fondation. Pour le modèle de fondation Pasternak:

$$f_e = k_0 w - k_1 \nabla^2 w \quad (V.11)$$

Les contraintes et les moments résultants sont définis comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B^s \\ 0 & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}; \quad S = A^s \gamma \quad (V.12)$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned} N &= \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \\ M^s &= \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad \varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, \\ k^b &= \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \\ A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \\ B^s &= \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (V.13)$$

$$H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \left\{ \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \right\}^t, \quad S = \left\{ S_{xz}^z, S_{yz}^s \right\}^t$$

Et les composants de rigidité et d'inertie sont donnés comme:

$$\{A_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1, f(z), z^2, z, (z), [f(z)]^2\} Q_{ij} dz \quad (V.14)$$

Ou :

$$(i, j = 1, 2, 6)$$

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z, z^2, f(z), z f(z), [f(z)]^2) dz \quad (V.15)$$

Pour les plaques FGM, les équations d'équilibre prennent les formes:

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} D_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s = I_0 \ddot{u} \quad (V.16)$$

$$A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} w_s - B_{22}^s d_{222} w_s = I \ddot{v} \quad (V.17)$$

$$- D_{11} d_{1111} w_b - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_b - D_{22} d_{2222} w_b - D_{11}^s d_{1111} w_s \quad (V.18)$$

$$- 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_s - D_{22}^s d_{2222} w_s = I_0 (\ddot{w}_b + w_s) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b$$

$$B_{11}^s d_{111} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{112} v_0 + B_{22}^s d_{222} v_0 - D_{11}^s d_{1111} w_b$$

$$- 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) d_{1122} w_b - D_{22}^s d_{2222} w_b - H_{11}^s d_{1111} w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) d_{1122} w_s \quad (V.19)$$

$$- H_{22}^s d_{2222} w_s + A_{55}^s d_{11} w_s + A_{44}^s d_{22} w_s = I_0 (\ddot{w}_b + w_s) - \frac{I_2}{84} \nabla^2 \ddot{w}_b$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l},$$

$$d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m},$$
(V.20)

Ou:

$$(i, j, l, m = 1, 2)$$

La représentation suivante pour les déplacements des théories de déformation de cisaillement est appropriée dans le cas du problème de vibration libre :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix}$$
(V.21)

Où $\lambda = m\pi / a$, $\mu = n\pi / b$ et U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , W_{smn} étant des paramètres arbitraires et ω représente la fréquence propre associé à $(m, n)^{\text{ième}}$ mode propre.

Nous pouvons obtenir les équations ci-dessous pour toute valeur fixe de m et n , pour le problème de vibration libre:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\}$$
(V.22)

Où $[K]$ et $[M]$ sont les matrices de rigidité et de masse, respectivement, et représentées comme suit:

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$
(V.23)

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (V.24)$$

Dans lequel:

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2 \\ a_{12} &= \lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{14} &= -\lambda [B_{11}^s \lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \\ a_{22} &= A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2 \\ a_{24} &= -\mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \lambda^2 + B_{22}^s \mu^2] \\ a_{33} &= D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4 + k_0 + k_1 (\lambda^2 + \mu^2) \\ a_{34} &= D_{11}^s \lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + D_{22}^s \mu^4 + k_0 + k_1 (\lambda^2 + \mu^2) \\ a_{44} &= H_{11}^s \lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s) \lambda^2 \mu^2 + H_{22}^s \mu^4 - A_{55}^s \lambda^2 - A_{44}^s \mu^2 + k_0 + k_1 (\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{11} &= m_{22} = -I_0, m_{13} = \lambda I_1, m_{14} = \lambda J_1, m_{23} = \mu I_1 \\ m_{24} &= \mu J_1, m_{33} = -(I_0 + I_2 (\lambda^2 + \mu^2)), \\ m_{34} &= -(I_0 + J_2 (\lambda^2 + \mu^2)), m_{44} = -(I_0 + K_2 (\lambda^2 + \mu^2)), \end{aligned} \quad (V.25)$$

Ou:

$$\lambda = m \pi / a, \quad \mu = n \pi / b \quad (V.26)$$

Les fréquences naturelles de la plaque FGM peuvent être trouvées à partir de la solution de l'équation. (V.22).

V.4. Résultats :

Les résultats numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie hyperbolique actuelle dans la prévision de la réponse dynamique pour les plaques FGM

reposant sur une fondations élastiques. La surface de la plaque supérieure est en céramique pure alors que la surface de la plaque inférieure est en métal pur. À des fins de vérification, les résultats obtenus sont comparés à ceux prédits à l'aide de différentes théories de la plaque.

De nombreux exemples ont été présentés en utilisant les propriétés des matériaux suivants

Céramique:

$$(P_C: \text{Alumine, Al}_2\text{O}_3): E_c = 380\text{GPa}, \rho_c = 3800\text{kg/m}^3$$

$$(P_C: \text{Zircone (ZrO}_2\text{)}): E_c = 200\text{GPa}, \rho_c = 5700\text{kg/m}^3$$

Métal:

$$(P_M: \text{Aluminium, Al}): E_m = 70\text{GPa}, \rho_m = 2700\text{kg/m}^3$$

Le coefficient de Poisson est pris égal à 0,3 à la fois de l'alumine et de l'aluminium. Et leurs propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance.

Dans tous les exemples, aucun facteur de correction transversale de cisaillement n'est utilisé car une représentation correcte de la contrainte transversale de cisaillement est donnée. Pour plus de commodité, les résultats suivants sont présentés sous forme numérique et graphique.

Le tableau V.1 présente une comparaison de la fréquence fondamentale d'une plaque homogène reposée sur une fondation de type Winkler. La plaque est simplement appuyée et soumise à un chargement dynamique. Différentes valeurs du paramètre de Winkler ont été prises en considération ($K_0 = 0, 100$ et 1000). Les résultats de la présente théorie sont proches de ceux obtenus par Lam *et al* [Lam. 2002], Fella *et al* [Lam. 2013] et Benferhat *et al* [Benyoucef. 2016]. Il est clair que la fréquence fondamentale augmente lorsque le paramètre de Winkler augmente.

Une étude comparative de la fréquence fondamentale au centre d'une plaque carrée et homogène reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak est présente dans le tableau V.2. La plaque est simplement appuyée et soumise à un chargement dynamique. Bon accord est observé. On peut constater que le paramètre de Pasternak a plus d'effet sur la fréquence fondamentale d'une plaque carrée que le paramètre de Winkler.

Table V.1.Fréquence fondamentale d'une plaque carrée et isotropique $\bar{\omega} = \alpha a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$

K_0	Lam (2002)	Fallah (2013)	Benferhat (2016)	Présente Type-I
0	19.74	19.56	19.5626	19.5626
100	22.13	21.96	21.9600	21.9600
1000	37.28	37.13	37.1232	37.1232

Table V.2.fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{22} / E_{22}}$ d'une plaque carrée (Al/Al₂O₃).

K_0	K_l	h/a	Méthode		
			Thai (2011)	Benferhat (2016)	Présente Type-I
0	0	0.05	0.0291	0.0291	0.0291
		0.1	0.1134	0.1133	0.1134
		0.15	0.2452	0.2452	0.2452
		0.2	0.4150	0.4150	0.41546
0	100	0.05	0.0406	0.0405	0.0405
		0.1	0.1597	0.1595	0.1595
		0.15	0.3512	0.3499	0.3499
		0.2	0.6075	0.6028	0.6028
100	0	0.05	0.0298	0.0297	0.0297
		0.1	0.1161	0.1161	0.1161
		0.15	0.2516	0.2515	0.2515
		0.2	0.4269	0.4266	0.422562
100	100	0.05	0.0411	0.0410	0.0410
		0.1	0.1617	0.1615	0.1615
		0.15	0.3557	0.3544	0.3544
		0.2	0.6156	0.6108	0.6108

L'effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique est présenté dans le tableaux V.3. La fraction volumique de porosité est considérée égale (0.1, 0.15 et 0.2). Le rapport d'épaisseur est pris égal (0.05 et 0.1). Plusieurs type de distribution de porosité sont présentés dans ce tableau. A partir de ces résultats, on peut constater que la distribution de porosité de type-IV à plus d'effet sur les fréquences fondamentales non-dimensionnelle. Il est à noter que la fréquence

fondamentale devient plus importante quand la plaque FGM est reposée sur une fondation élastique.

Table 3. fréquence fondamentale non-dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée (Al/Al₂O₃).

a/b=1; p=10

K0	K1	Type de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
			h/a=0.05	h/a=0.1	h/a=0.05	h/a=0.1	h/a=0.05	h/a=0.1
0	0	Type-II	0.01640	0.06326	0.01663	0.06372	0.01687	0.06390
		Type-III	0.01635	0.06293	0.01654	0.06313	0.01673	0.06274
		Type-IV	0.01644	0.06353	0.01671	0.06424	0.01693	0.06484
		Type-V	0.016273	0.06249	0.01640	0.06209	0.01647	0.06011
		Type-VI	0.016509	0.063898	0.01682	0.064924	0.017168	0.06596
0	100	Type-II	0.03583	0.11950	0.03627	0.11730	0.03637	0.11254
		Type-III	0.035731	0.11825	0.03597	0.11445	0.03553	0.10628
		Type-IV	0.03593	0.12063	0.03651	0.11970	0.03694	0.11736
		Type-V	0.036043	0.11613	0.035341	0.10913	0.033256	0.092438
		Type-VI	0.036043	0.1221	0.03677	0.12272	0.037497	0.12280
100	0	Type-II	0.018096	0.0691608	0.01839	0.069680	0.018694	0.069777
		Type-III	0.018054	0.068853	0.01831	0.06901	0.018547	0.068344
		Type-IV	0.01813	0.069442	0.018471	0.070253	0.01881	0.070876
		Type-V	0.017985	0.06833	0.01811	0.067792	0.018226	0.064907
		Type-VI	0.018189	0.069822	0.01856	0.070977	0.018971	0.072135
100	100	Type-II	0.036456	0.12087	0.036881	0.11851	0.036947	0.11353
		Type-III	0.0363420	0.119582	0.036561	0.11557	0.036063	0.107099
		Type-IV	0.036553	0.122059	0.037130	0.12102	0.037547	0.118512
		Type-V	0.0361332	0.117383	0.0358931	0.11009	0.033677	0.09293
		Type-VI	0.036673	0.123638	0.0374075	0.124142	0.038130	0.124141

Les tableaux V.4 et V.5 présentent l'effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation de type Winkler-Pasternak. Il est clair que la fréquence fondamentale augmente quand la plaque FGM devient plus riche en métal et quand le rapport h/a augmente. On peut également constater que la fréquence fondamentale devient plus faible lorsque la plaque FGM est en Al/ZrO₂.

Tableau IV.04: Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} \text{ d'une plaque carrée en Al/Al}_2\text{O}_3.$$

a/b=1; K0=100; K1=10

	Type de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.05	h/a=0.1	h/a=0.05	h/a=0.1	h/a=0.05	h/a=0.1
Plaque FGM P=5	Type-II	0.021812	0.0827059	0.0222339	0.0836724	0.0226374	0.0843096
	Type-III	0.0217834	0.0824419	0.0221638	0.0830863	0.0224912	0.08312654
	Type-IV	0.0218379	0.0829443	0.0222918	0.0841747	0.0227523	0.0852634
	Type-V	0.0217314	0.0819923	0.022031	0.0820178	0.0221962	0.0807636
	Type-VI	0.0218690	0.0832585	0.0223587	0.0847958	0.0228774	0.0863637
Plaque FGM P=10	Type-II	0.0209888	0.0787992	0.0213793	0.0792466	0.0217456	0.0789729
	Type-III	0.0209519	0.0784238	0.0212968	0.0783755	0.0215610	0.0769377
	Type-IV	0.0210217	0.0791382	0.0214489	0.0799776	0.0218821	0.0804746
	Type-V	0.0208886	0.0777815	0.0211407	0.0767071	0.0210820	0.0718976
	Type-VI	0.0210646	0.0795869	0.0215333	0.0808716	0.0220320	0.082113

Tableau IV.05: Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} \text{ d'une plaque carrée en Al/ZrO}_2.$$

a/b=1; K0=100; K1=10

	Type de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		h/a=0.05	h/a=0.1	h/a=0.05	h/a=0.1	h/a=0.05	h/a=0.1
Plaque FGM P=5	Type-II	0.0205300	0.0777961	0.0212444	0.0801256	0.0220351	0.0826319
	Type-III	0.0206226	0.0780815	0.0213972	0.0805779	0.0222602	0.0832617
	Type-IV	0.0204384	0.0775118	0.0210941	0.0796744	0.0218150	0.0819997
	Type-V	0.0207634	0.0785114	0.0216313	0.0812568	0.0226070	0.0841942
	Type-VI	0.0203029	0.0770875	0.0208734	0.0790012	0.0214942	0.0810523
Plaque FGM P=10	Type-II	0.0208144	0.0785802	0.0216045	0.0810915	0.0224884	0.0837955
	Type-III	0.0209162	0.0788842	0.0217743	0.0815714	0.0227413	0.0844556
	Type-IV	0.0207138	0.0782772	0.0214378	0.0806113	0.0222416	0.0831270
	Type-V	0.0210714	0.0793412	0.0220350	0.0822880	0.0231323	0.0854169
	Type-VI	0.0205651	0.0778246	0.0211936	0.0798928	0.0218833	0.0821180

L'effet du taux de distribution de porosité pour différentes valeurs du rapport de géométrie a/b sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM reposée sur une fondation élastique est montré dans le tableau V.6 et V.7. Les fréquences sont calculées pour une plaque de forme

carrée $a/b=1$ et rectangulaire $a/b=2$. A partir de ces tableaux, on peut constater que la fréquence fondamentale devient plus importante quand la plaque est de forme rectangulaire.

Tableau IV.06: Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} \text{ d'une plaque FGM en Al/Al}_2\text{O}_3.$$

$a/h=10; K_0=100; K_1=10$

	Type de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2
Plaque FGM P=5	Type-II	0.0827059	0.170796	0.0836724	0.171363	0.0843096	0.170850
	Type-III	0.0824419	0.169892	0.0830863	0.169472	0.0831265	0.167253
	Type-IV	0.0829443	0.171628	0.0841747	0.173026	0.0852634	0.173853
	Type-V	0.0819923	0.168389	0.0820178	0.166134	0.0807636	0.160390
	Type-VI	0.0832585	0.172755	0.0847958	0.175158	0.0863637	0.177476
Plaque FGM P=10	Type-II	0.0787992	0.159454	0.0792466	0.158621	0.0789729	0.155796
	Type-III	0.0784238	0.158262	0.0783755	0.156024	0.0769377	0.150202
	Type-IV	0.0791382	0.160549	0.0799776	0.160863	0.0804746	0.160123
	Type-V	0.0777815	0.156266	0.0767071	0.151238	0.0718976	0.137347
	Type-VI	0.0795869	0.162031	0.0808716	0.163700	0.0821137	0.165095

Tableau IV.07: Effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} \text{ d'une plaque FGM en Al/ZrO}_2.$$

$a/h=10; K_0=100; K_1=10$

	Type de distribution de porosité	(a=0.1)		(a=0.15)		(a=0.2)	
		a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2	a/b=1	a/b=2
Plaque FGM P=5	Type-II	0.0777961	0.159946	0.0801256	0.164074	0.0826319	0.168401
	Type-III	0.0780815	0.160417	0.0805779	0.164787	0.0832617	0.169330
	Type-IV	0.0775118	0.159474	0.0796744	0.163351	0.0819997	0.167437
	Type-V	0.0785114	0.161118	0.0812568	0.165832	0.0841942	0.170638
	Type-VI	0.0770875	0.158762	0.0790012	0.162253	0.0810523	0.165945
Plaque FGM P=10	Type-II	0.0785802	0.159933	0.0810915	0.164287	0.0837955	0.168827
	Type-III	0.0788842	0.160420	0.0815714	0.165014	0.0844556	0.169740
	Type-IV	0.0782772	0.159442	0.0806113	0.163545	0.0831270	0.167859
	Type-V	0.0793412	0.161142	0.0822880	0.166065	0.0854169	0.170972
	Type-VI	0.0778246	0.158702	0.0798928	0.162409	0.0821180	0.166334

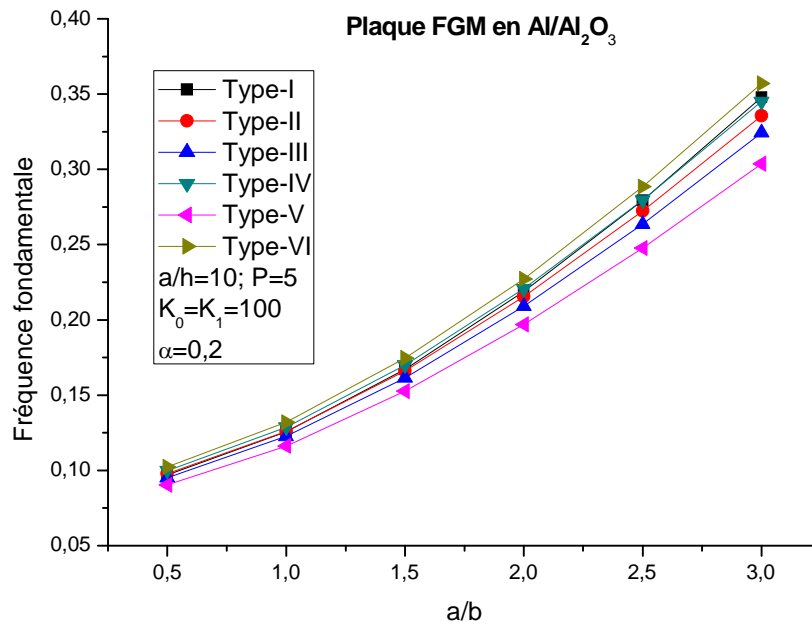


Figure V.2. Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport de géométrie (a/b) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique

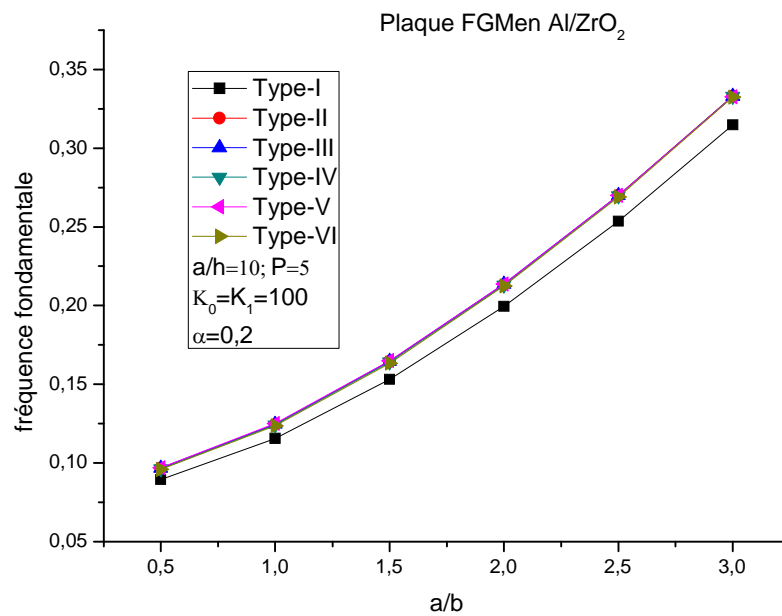


Figure V.3. Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport de géométrie (a/h) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique

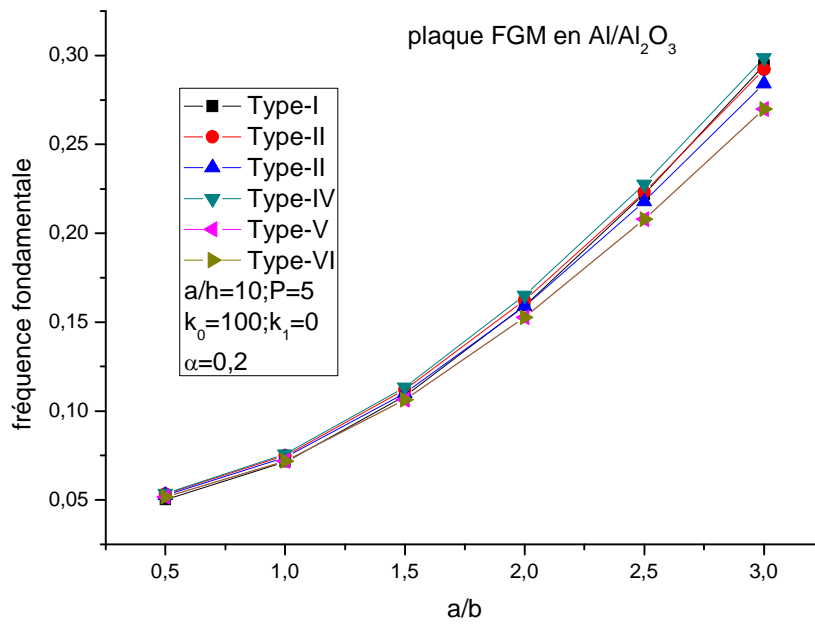


Figure V.4. Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al_2O_3 reposée sur une fondation de type Winkler

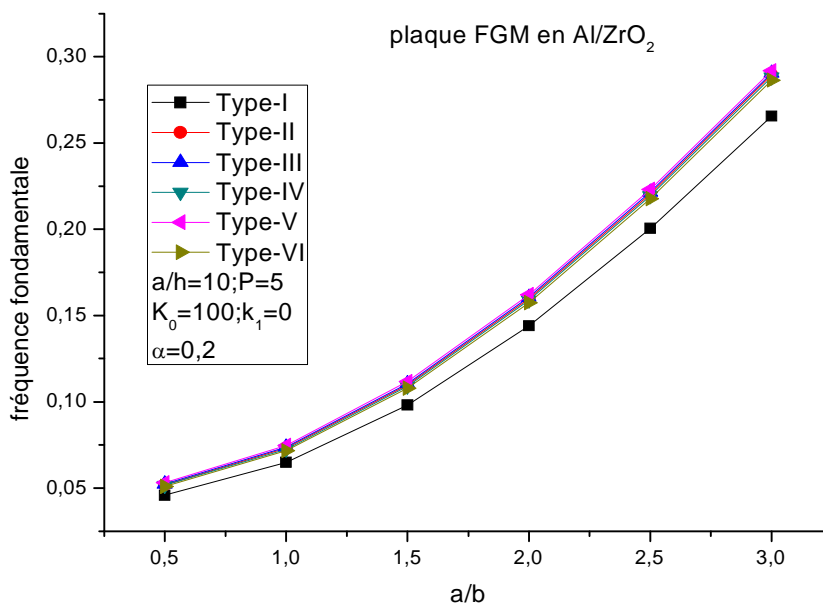


Figure V.5. Variation la fréquence fondamentale au centre en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/ZrO_2 reposée sur une fondation de type Winkler

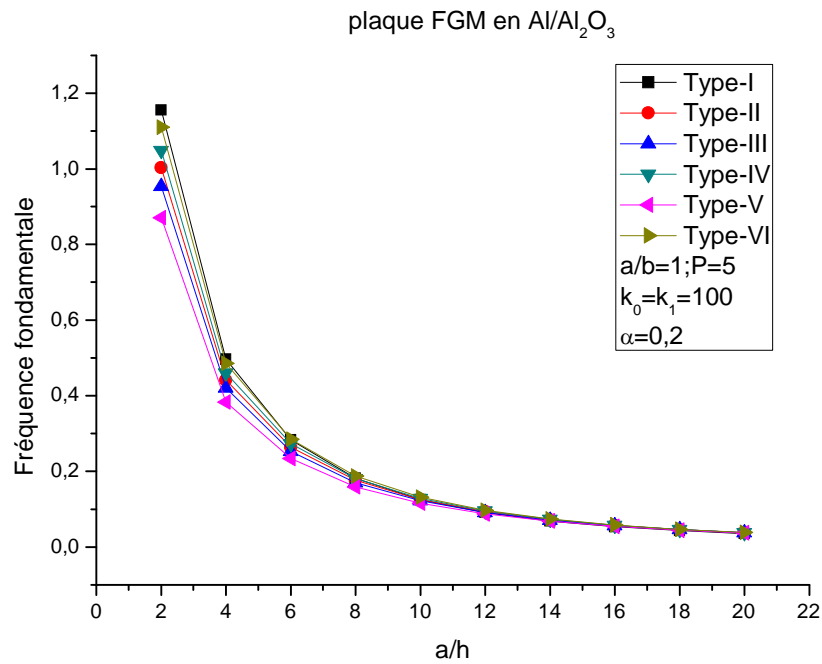


Figure V.6. Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique

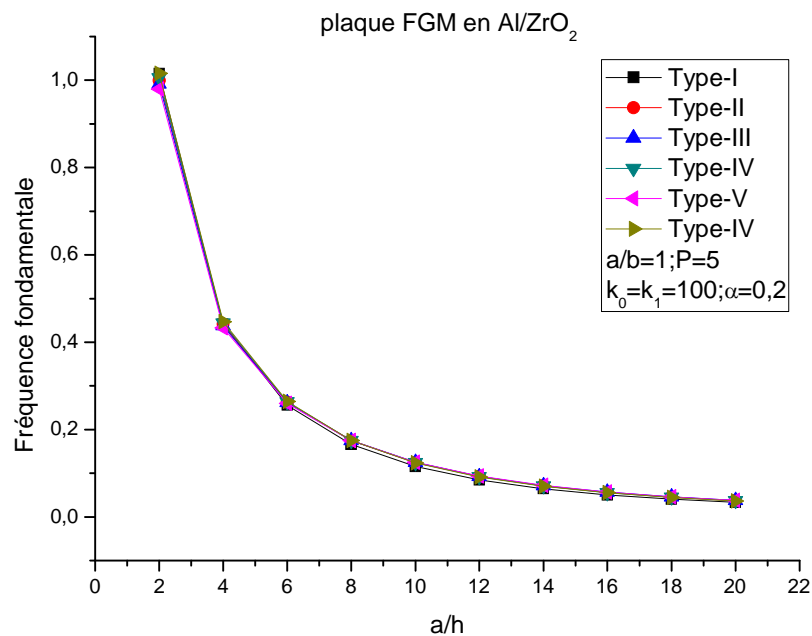


Figure V.7. Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique

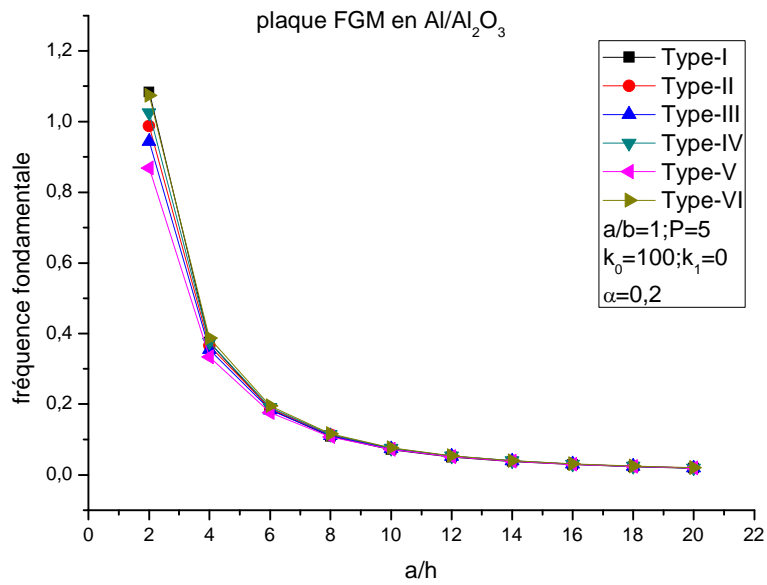


Figure V.8. Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler

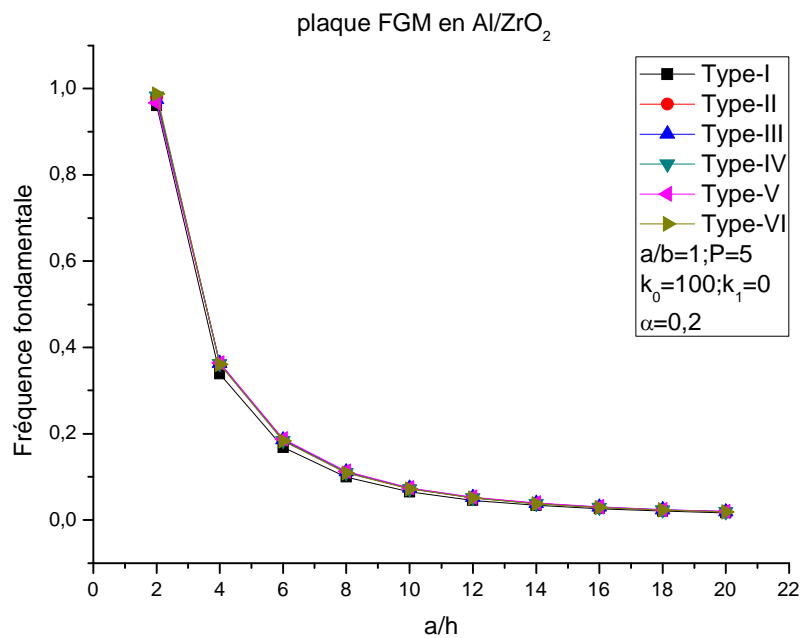


Figure V.9. Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'épaisseur (a/h) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation de type Winkler

Les figures V.2 et V.3 présentent l'effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. Les paramètres de Winkler et de Pasternak sont pris égal ($K_0=K_1=100$). La fraction volumique de porosité est considérée égal $a=0.2$. Différentes types de distribution de porosité sont présentés dans ces figures. On peut constater que la distribution de porosité de type-VI à plus d'effet sur la fréquence fondamentale par rapport à d'autre type de distribution. Il est clair que la fréquence fondamentale augmente à mesure que le rapport de géométrie augmente.

Les figures V.4 et V.5 montrent l'effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. La plaque FGM repose sur une fondation de type de Winkler ($K_0=100, K_1=0$). Le rapport d'épaisseur est pris égal à $a/h=10$. L'indice de puissance est considéré égal à $P=5$. A partir de ces figures, on peut constater que le taux de distribution de porosité influe sur la variation de la fréquence fondamentale d'une plaque FGM.

L'effet du taux de distribution de porosité en fonction du rapport d'épaisseur sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak est présenté dans les figures V.6 et V.7, respectivement. On peut conclure que l'effet du taux de distribution de porosité devient plus faible à mesure que le rapport d'épaisseur augmente.

Les figures V.8 et V.9 montrent l'effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement, reposée sur une fondation élastique de type Winkler. Il est à noter que l'effet du taux de distribution de porosité a un effet plus important sur une plaque FGM en Al/Al₂O₃ qu'une plaque en Al/ZrO₂.

Les figures V.10 et V.11 montrent l'effet du taux de distribution de porosité en fonction de l'indice de puissance sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. La plaque FGM repose sur une fondation de type Winkler-Pasternak. On peut conclure que la fréquence fondamentale devient plus faible à mesure que la plaque FGM devient plus riche en métal. On peut également constater que l'effet du taux de distribution de porosité devient plus important quand l'indice de puissance P augmente.

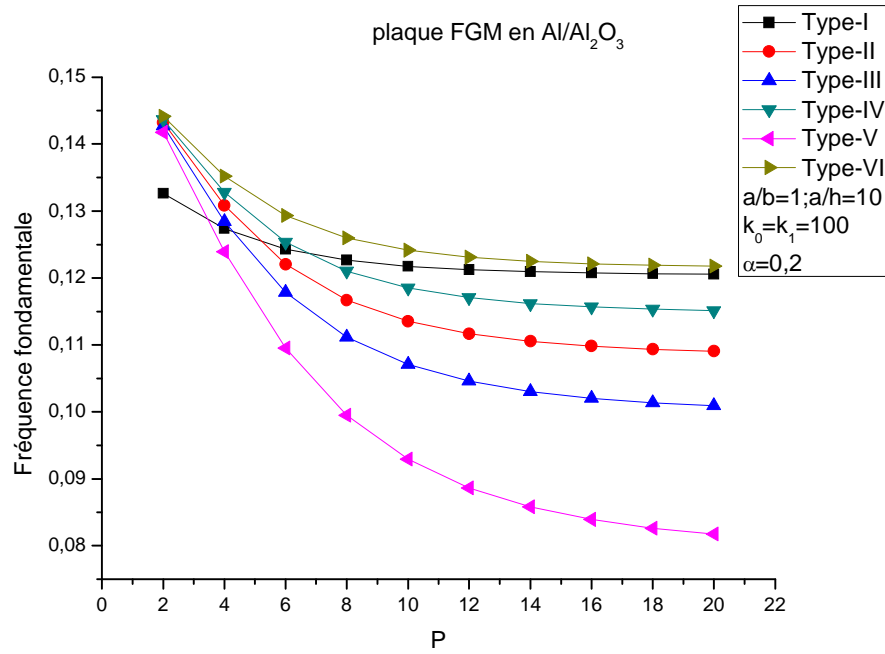


Figure V.10. Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'indice de puissance (P) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation élastique

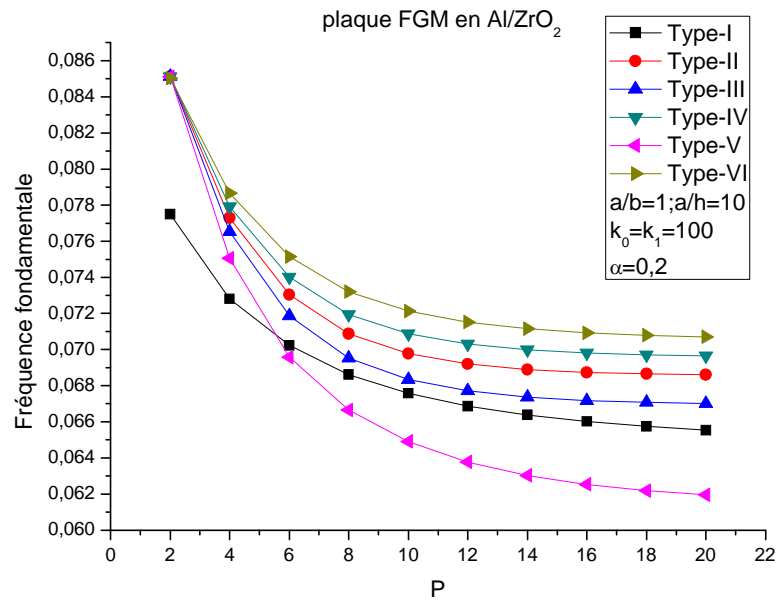


Figure V.11. Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'indice de puissance (P) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation élastique

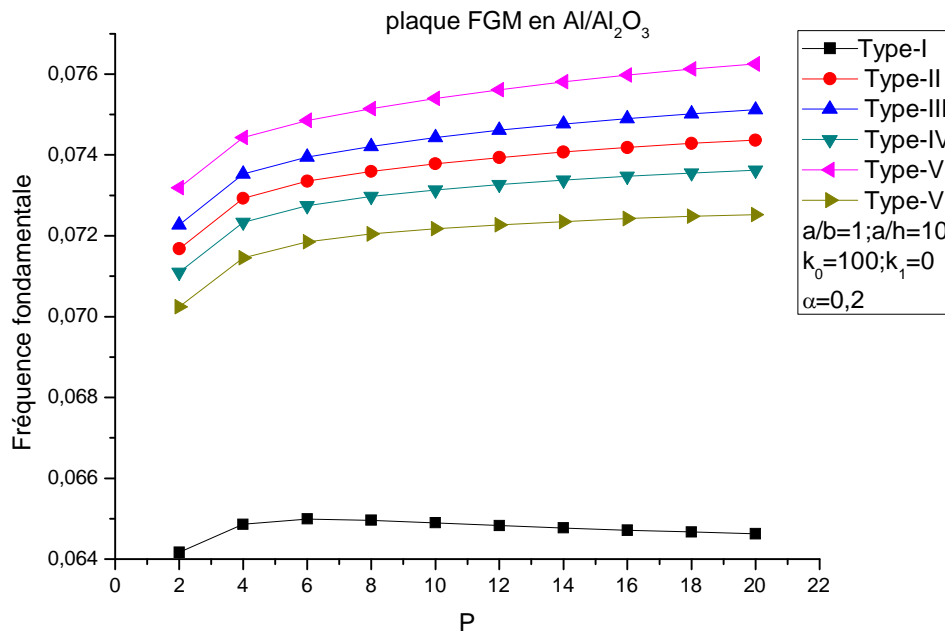


Figure V.12. Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'indice de puissance (P) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Winkler

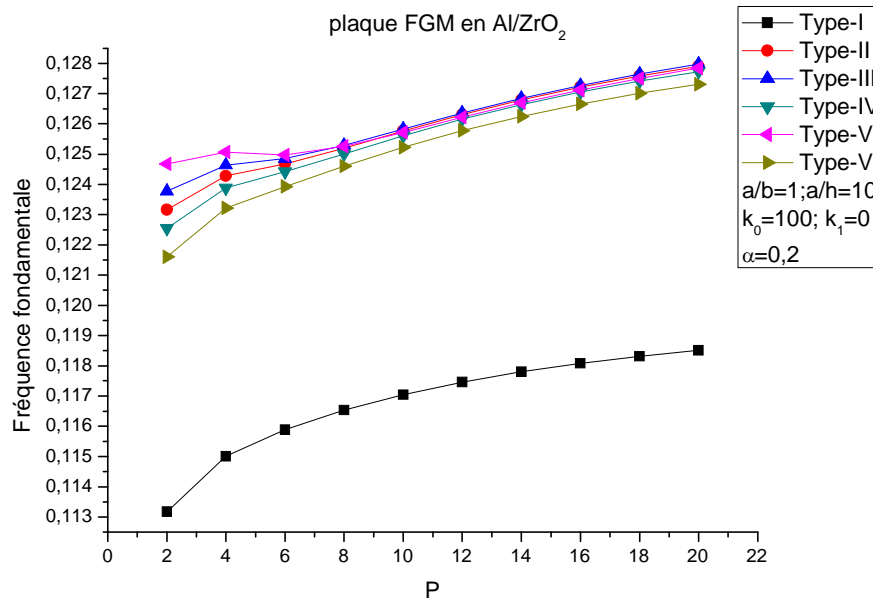


Figure V.13. Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'indice de puissance (P) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation de type Winkler

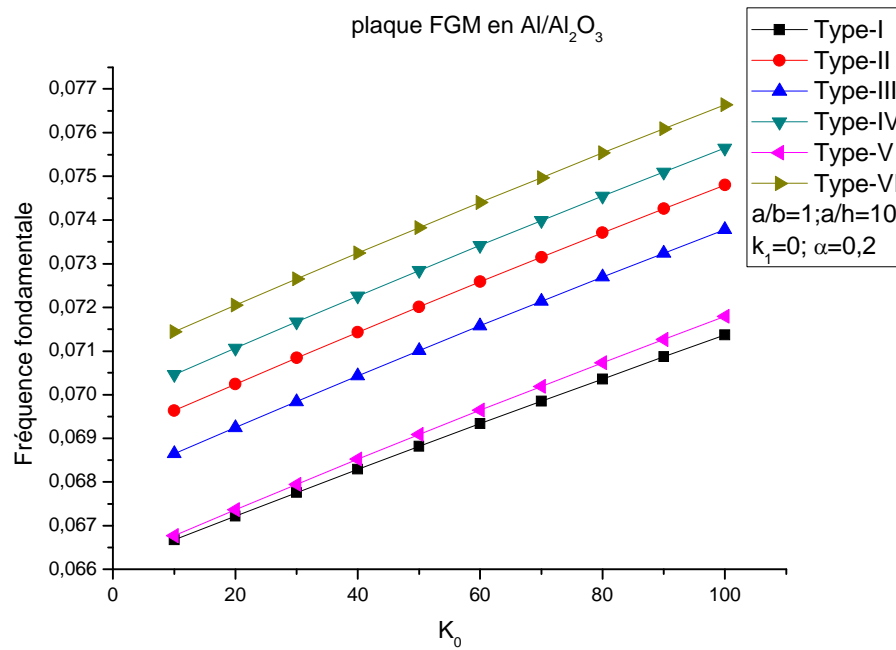


Figure V.14. Variation de la fréquence fondamentale en fonction de paramètre de Winkler (K_0) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃

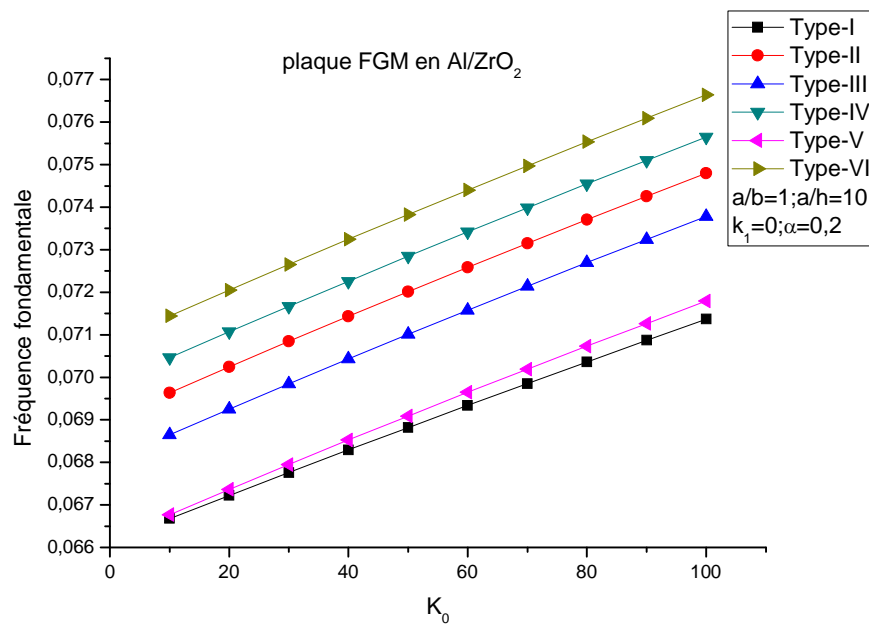


Figure V.15. Variation de la fréquence fondamentale en fonction de paramètre de Winkler (K_0) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂

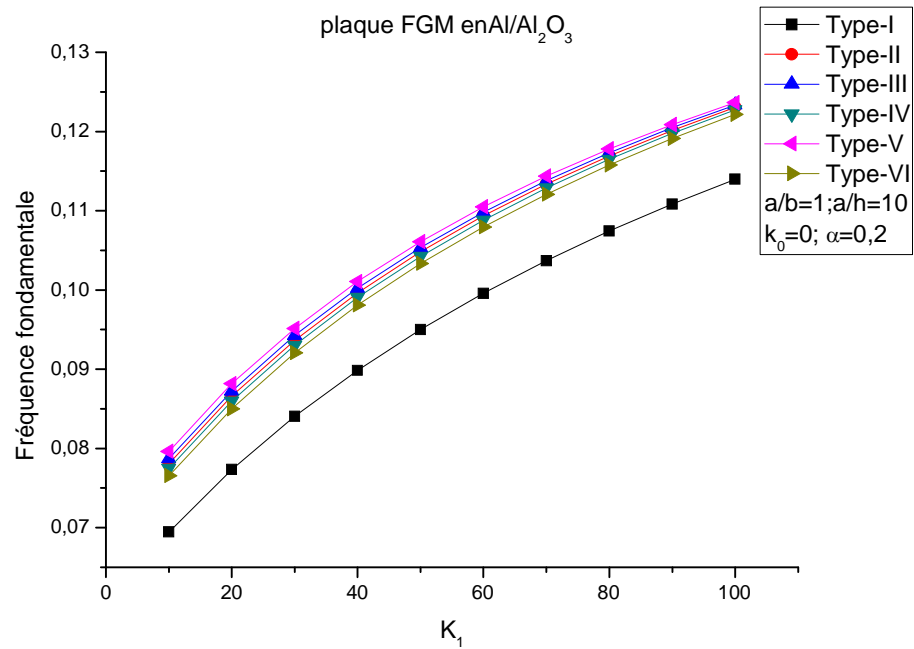


Figure V.16. Variation de la fréquence fondamentale en fonction de paramètre de Pasternak (K_1) d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ reposée sur une fondation de type Pasternak

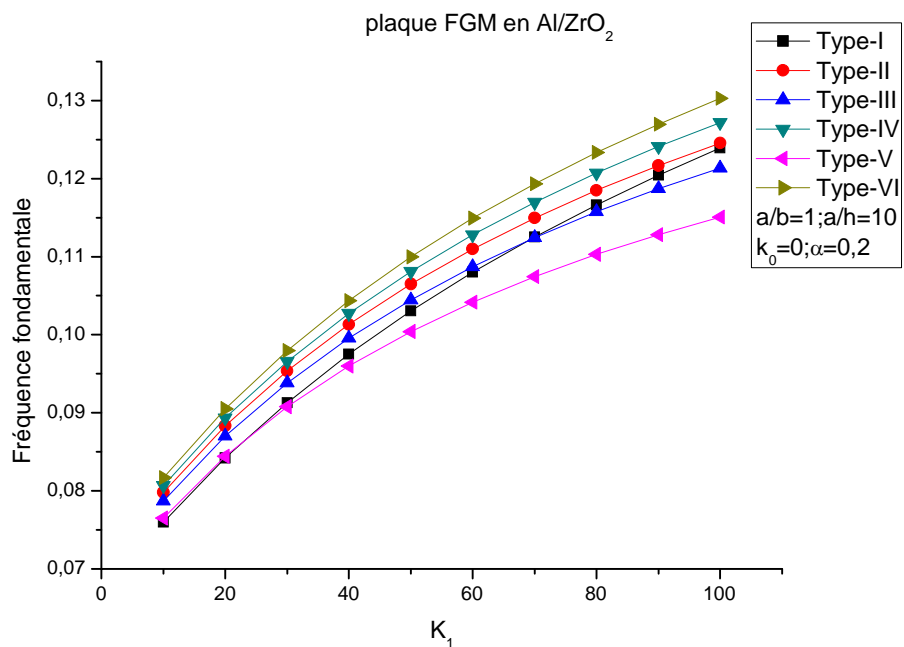


Figure V.17. Variation de la fréquence fondamentale en fonction de paramètre de Pasternak (K_1) d'une plaque FGM en Al/ZrO₂ reposée sur une fondation de type Pasternak

Les figures V.12 et V.13 présentent l'effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂, respectivement. La plaque FGM repose sur une fondation de type Winkler. La fraction volumique de porosité est prise égale à 0.2. À partir de ces figures, on peut remarquer que la fréquence fondamentale devient plus faible quand la distribution de porosité est de type-I.

L'influence du taux de distribution de porosité en fonction du paramètre de Winkler et le paramètre de Pasternak sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM en Al/Al₂O₃ et en Al/ZrO₂ est montré dans les figures V.14, V.15, V.16 et V.17, respectivement. On peut constater que la fréquence fondamentale augmente avec l'augmentation des paramètres de Winkler et Pasternak

V.5. Conclusions:

Dans ce travail, une théorie raffinée de déformation de cisaillement à quatre variables a été utilisée pour étudier l'analyse dynamique d'une plaque FGM simplement appuyée reposant sur une fondation élastique en utilisant une procédure analytique. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec des conditions aux limites simplement appuyées. Il a été démontré que la présente solution est très efficace pour l'analyse dynamique des plaques FGM reposant sur les fondations élastiques. L'effet du taux de distribution de porosité sur la fréquence fondamentale est discuté et démontré par des exemples numériques et graphiques. Les conclusions suivantes ont été tirées :

- Le variation du taux de distribution de porosité influe sur la fréquence fondamentale d'une plaque FGM.
- La fréquence fondamentale augmente à mesure que le rapport de géométrie augmente.
- L'effet du taux de distribution de porosité devient plus faible à mesure que le rapport d'épaisseur augmente.
- L'effet du taux de distribution de porosité a un effet plus important sur une plaque FGM en Al/Al₂O₃ qu'une plaque en Al/ZrO₂.

Bibliographie

Travaux cités :

., [. (s.d.). Reissner, E., J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77. (1945): The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates.

[1] M. Koizumi, R. P., & 13 (7-8): 333347, 1. (s.d.). . Ceram. Eng. Sci. Proc; 13 (7-8): 333347, 1992. .

[17]. ((1975). —). On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures; 25 (5):495-502. Reissner, E.,

[2]. ((1867). Winkler, E.). Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit, Prag Dominicus.

[35]. ((1959). [35] Timoshenko. S.P, S.Woinowsky-Krieger,). —. Theory of Plates and Shells.

[36]. ((1997)). Reddy. J.N, . —Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis,.

[37]. ((1999)). Theory and Analysis of Elastic plates, . —Taylor & Francis, Reddy. J.N,.

[39]. ((1951)). Mindlin. R.D. —Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38.

[40]. ((1949)). —Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833. Hildebrand. F.B, E. Reissner, G.G. Thomas, .

[41]. (, (1957).). —On the theory of thin elastic shells. Quarterly Appl. Math, 14: 369-380. Naghdi. P. M.

[53] H. Okamura, S. o., & 143 (1-2): 3-9, 1. (s.d.).

l., [. ((1973)). Whitney. J.M, . —Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads.

2] Kirchhoff, G. ". (s.d.).

—Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite Structure; 56 (4): 329-344. (s.d.). (2002). : Kant.T, K. Swaminathan,.

Hill, R. ".-c.-2. (s.d.).

Kieback B., N. A.-2.-1. (s.d.).

Mori, T. e.-5. (s.d.).

T. K. Nguyen., K. S., & 14 (8): 567-575, 2. (s.d.).