

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun-Tiaret



Faculté des Sciences Appliquées  
Département de Génie mécanique

**THESE DE DOCTORAT LMD**

Spécialité : Génie Civil

Option : Modélisation des matériaux et structures en génie civil

Présentée par :

**ADIM Belkacem**

*Sujet de la thèse*

***Etude de la stabilité des plaques en matériaux  
composites : analyse et modélisation***

*Soutenu publiquement le 21/09/2016 devant le jury composé de :*

<b>BOUZIDANE Ahmed</b>	<b>Pr</b>	<b>U. Tiaret</b>	<b>Président</b>
<b>HASSAINE DAOUADJI Tahar</b>	<b>MCA</b>	<b>U. Tiaret</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>ADDA BEDIA El Abbas</b>	<b>Pr</b>	<b>U. SBA</b>	<b>Examineur</b>
<b>AIT AMAR Meziane Mohamed</b>	<b>MCA</b>	<b>U. Tiaret</b>	<b>Examineur</b>
<b>BOURADA Mohamed</b>	<b>MCA</b>	<b>U. SBA</b>	<b>Examineur</b>
<b>ZIDOUR Mohamed</b>	<b>MCA</b>	<b>U. Tiaret</b>	<b>Examineur</b>
<b>HADJI Lazreg</b>	<b>MCA</b>	<b>U. Tiaret</b>	<b>Invité</b>

*Année universitaire 2015/2016*

## Remerciement

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Technologie Industrielle de l'Université Ibn Khaldoun-Tiaret, sous la direction de Monsieur *HASSAINE DAOUADJI Tahar* ; Maître de Conférence Classe A.

En premier lieu, je remercie chaleureusement mon encadreur qui a été attentif à l'évolution de mes recherches et qui a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail. Ses qualités humaines et scientifiques, Ses conseils ainsi que son enthousiasme m'ont été très bénéfiques durant ces années de thèse.

J'adresse également mes remerciements les plus vifs à Monsieur *BOUZIDANE Ahmed* ; Professeur à l'Université Ibn Khaldoun-Tiaret, Je le remercie pour avoir accepté d'être le président de jury.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, *ADDA BEDIA El Abbes* ; Professeur à l'université Djilali Liabes-Sidi BelAbbes, *AIT AMAR Meziane Mohamed*, Maître de Conférence Classe A à l'Université Ibn Khaldoun-Tiaret, *BOURADA Mohamed*, Maître de Conférence Classe A, à l'Université Djilali Liabes-Sidi BelAbbes, et *ZIDOUR Mohamed*, Maître de Conférence Classe A à l'Université Ibn Khaldoun –Tiaret, de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette modeste thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur *HADJI Lazreg*, Maître de Conférence Classe A, à l'Université Ibn Khaldoun – Tiaret. Qui me fait l'honneur de participer au jury de ma thèse.

Mes remerciements vont à l'ensemble du personnel du département de Génie Civil de l'Université Ibn Khaldoun – Tiaret, et également à tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de ce modeste travail de près ou de loin.

*À ma mère*

*À mon père*

*À mes frères*

*À tous ceux qui me sont chers*

## **Abstract**

This present research consists to analyze the mechanical buckling and the free vibration stabilities of antisymmetric laminated composite plates under different boundary conditions using a new refined high order shear deformation theory of four variables against five in other high order theories.

Among the advantages of this new theory: It takes into consideration the shearing effect in the calculation of deformation without the need for shear correction factors and giving rise to a parabolic variation of the shear stresses along the thickness and satisfying the zero shear stresses condition in faces (top and bottom) of the plate.

The numerical results obtained by this higher order shear theory predict with accuracy the critical buckling load and the natural frequencies while comparing with other solutions of higher-order theories in the literature.

In light of the obtained results we can say that this refined high order shear deformation theory is accurate, simple and efficient to study the buckling and free vibration stabilities of antisymmetric laminated composite plates.

**Keywords:** composite materials, buckling, free vibration, laminated plates, refined high order plate's theory and transverse shear.

## Résumé

La présente recherche consiste à analyser la stabilité au flambement mécanique et à la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites sous différentes conditions aux limites en utilisant une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables contre cinq variables dans les autres théories d'ordre élevé.

Parmi les avantages de cette nouvelle théorie : Elle prend en considération l'effet de cisaillement dans le calcul des déformations sans recours à des facteurs de correction de cisaillement et qui donne lieu à une variation parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur en satisfaisant les conditions de nullité de ces contraintes de cisaillement aux surfaces (supérieure et inférieure) de la plaque.

Les résultats numériques obtenus par la présente théorie de cisaillement d'ordre élevé prédit avec une précision la charge critique de flambement et les fréquences naturelles tout en les comparant avec les autres solutions des théories d'ordre élevé disponibles dans la littérature.

À la lumière des résultats obtenus nous pouvons dire que la présente théorie raffinée de cisaillement d'ordre élevé est précise, simple et efficace pour étudier la stabilité au flambement et à la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites.

**Mots clés :** Matériaux composites, plaque stratifiée, flambement, vibration libre, théorie raffinée des plaques d'ordre élevé, Cisaillement transverse.

**ملخص**

العمل المقدم في هذا البحث يتمثل في دراسة استقرار صفائح المواد المركبة من حيث الانبعاج الميكانيكي و الاهتزاز الحر باستخدام نظرية جديدة للقص العرضي عند مختلف الشروط الحدودية للصفائح باستخدام أربع متغيرات مقابل خمسة في باقي النظريات الأخرى ، من بين مزايا هذه النظرية الجديدة : أنها تأخذ بعين الاعتبار تأثير القص العرضي في حساب التشوه دون الحاجة إلى معامل تصحيح القص ، حيث تسمح هذه النظرية بتغيير إجهادات القص بشكل قطع مكافئ في اتجاه السمك واستيفاء شروط انعدام إجهادات القص عند السطوح (العلوي و السفلي) للصفحة.

النتائج العددية المتحصل عليها باستعمال هذه النظرية تتوقع بدرجة كبيرة من الدقة حمل الانبعاج الأقصى والترددات الطبيعية عند مقارنتها مع الحلول الأخرى من النظريات ذات الدرجة العليا في المراجع.

في ضوء هذه النتائج يمكننا القول إن هذه النظرية المكررة من أجل القص العرضي هي دقيقة وبسيطة وفعالة لدراسة دراسة استقرار صفائح المواد المركبة من حيث الانبعاج الميكانيكي و الإهتزاز الحر.

**كلمات مفتاحية :** المواد المركبة , الصفائح المكدسة , نظرية ذات الدرجة العليا ، القص العرضي ، الاهتزاز الحر، الانبعاج.

## **Table des matières**

Abstract.....	I
Résumé .....	II
ملخص .....	III
Table des matières .....	IV
Liste des figures .....	VIII
Liste des tableaux .....	XI
Liste des notations .....	XIII
Introduction générale.....	1

### **Chapitre I: Généralités sur les matériaux composites**

I.1. Introduction .....	3
I.2. Le concept général des matériaux composites .....	3
I.3. Définition d'un matériau composite .....	5
I.4. Composition des matériaux composites .....	6
I.4.1. Les matrices.....	6
I.4.1.1. Les composites à matrices organiques (CMO).....	6
I.4.1.2. Les composites à matrices céramiques (CMC) .....	10
I.4.1.3. Les composites à matrices métalliques (CMM) .....	10
I.4.2. Les renforts.....	11
I.4.2.1. Fibres de verre .....	12
I.4.2.2. Fibres de carbone.....	15
I.4.2.3. Fibres d'aramide.....	16
I.4.2.4. Fibres de bore .....	17
I.4.2.5. Fibres métalliques.....	17
I.4.2.6. Fibres naturelles.....	18
I.4.3. Charges .....	19
I.4.3.1. Charges renforçantes .....	20
I.4.3.2. Charges non renforçantes .....	20
I.4.3.3. Charges ignifugeantes.....	20
I.4.4. Les Additifs .....	20
I.5. Structures du composite .....	21
I.5.1. Les monocouches .....	21
I.5.2. Les stratifiées.....	22
I.5.2.1. Différents types des stratifiés .....	23
I.5.3. Les sandwichs.....	24
I.6. Autres types de composites .....	24

I.6.1. Composites élastomères .....	24
I.6.2. Composites intelligents .....	25
I.6.2.1. Définition du concept « technologie intelligente » .....	26
I.6.2.2. Utilisation des composites intelligentes .....	26
I.6.2.3. Le concept de sécurité active dans les composites intelligents .....	26
I.6.3. Les nanocomposites.....	27
I.7. Procédés de fabrication des structures composites.....	28
I.7.1. Moulage au contact.....	28
I.7.2. Moulage par compression.....	28
I.7.3. Moulage sous vide .....	28
I.7.4. Moulage par injection de mousse .....	29
I.7.5. Moulage par injection de pré-imprégné BMC (Injection Molding) .....	29
I.7.6. Pultrusion.....	30
I.7.7. Enroulement filamentaire (ou bobinage).....	31
I.8. Domaines d'application des composites .....	31
I.8.1. Les composites dans la construction civile.....	31
I.8.2. Les composites dans l'automobile .....	32
I.8.3. Les composites et la construction électrique .....	32
I.8.4. Les composites et la construction industrielle .....	32
I.8.5. Les composites dans les équipements de sports et loisirs.....	33
I.8.6. Les composites dans la construction nautique.....	33
I.8.7. Les composites dans l'aéronautique.....	33
I.8.8. Les composites dans le ferroviaire .....	33
I.8.9. Les composites dans le secteur médical .....	33
I.9. Influence de l'environnement sur le comportement des composites.....	33
I.9.1. La température.....	34
I.9.2. L'humidité .....	34
I.9.3. Fluage et corrosion sous contrainte .....	34
I.10. Avantages et inconvénients des composites.....	34
I.11. Conclusion.....	35

## **Chapitre II: Investigation sur les différentes théories des plaques**

II.1. Introduction.....	36
II.2. Description des plaques .....	36
II.3. Les hypothèses fondamentales de la théorie des poutres et des plaques.....	36
II.3.1. Principe de Saint venant.....	36



II.3.2. Principe de Navier Bernoulli généralisé.....	36
II.4. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (Classical Laminated Plate Theory CLPT) .....	37
II.5. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Deformation Theory FSDT).....	39
II.6. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher Order Shear Deformation Theory HSDT) .....	40
II.7. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé .....	41
II.8. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre zéro (Zeroth Order Shear Deformation Theory ZSDT) .....	43
II.9. Théorie de zig-zag.....	43
II.10. Application de la théorie d'ordre élevé pour des structures composites .....	44
II.11. Conclusion .....	45

**Chapitre III: Etude de la stabilité au flambement et à la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites**

III.1. Introduction.....	46
III.2. La théorie d'ordre élevé à quatre variables.....	46
III.3. Les hypothèses de la présente théorie .....	46
III.4. Cinématiques .....	48
III.5. Equations constitutives .....	48
III.6. Equations gouvernantes .....	49
III.7. Solution de Navier des plaques stratifiées simplement appuyées.....	53
III.7.1. Cas des stratifiées à plis croisés (0/90) (cross-ply) .....	53
III.7.2. Cas des stratifiées à plis alternées et équilibrés ( $\theta^\circ/-\theta^\circ$ ) (angle-ply) .....	55
III.8. Solution exacte des plaques stratifiées croisés (cross-ply) sous divers conditions aux limites .....	56
III.9. Conclusion .....	60

**Chapitre IV: Validation et discussion des résultats**

IV.1. Introduction .....	61
IV.2. Stabilité au flambement mécanique.....	61
IV.3. Stabilité à la vibration libre .....	71
IV.4. Conclusion.....	79

Conclusion générale et perspectives .....	80
Références bibliographiques.....	82

## Liste des figures

<b>Figure I.1.</b> Les constituants de base des composites.....	3
<b>Figure I.2.</b> Description d'un matériau composite .....	5
<b>Figure I.3.</b> Types des renforts .....	12
<b>Figure I.4.</b> Fibres de verre.....	12
<b>Figure I.5.</b> Exemple des fibres de carbone.....	15
<b>Figure I.6.</b> Fibres d'aramide .....	16
<b>Figure.I.7.</b> Fibres de bore.....	17
<b>Figure.I.8.</b> Fibres métalliques .....	17
<b>Figure I.9.</b> Fibres naturelles .....	18
<b>Figure I.10.</b> Différents fibres naturelles.....	19
<b>Figure I.11.</b> Exemples des charges : (a) microbilles de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.....	20
<b>Figure.I.12.</b> composite monocouche.....	21
<b>Figure I.13.</b> Une plaque stratifiée .....	22
<b>Figure I.14.</b> Structure d'un composite stratifié à base de plis unidirectionnels.....	22
<b>Figure I.15.</b> Matériau composite stratifié.....	23
<b>Figure.I.16.</b> Composite sandwich .....	24
<b>Figure I.17.</b> Exemples des composites élastomères.....	24
<b>Figure I.18.</b> Combinaison de l'information et du contrôle avec les matériaux. ....	25
<b>Figure I.19.</b> Représentation graphique d'un nanotube de carbone .....	27
<b>Figure I.20.</b> Exemple d'application : élaboration d'une coque de bateau.....	28
<b>Figure I.21.</b> Moulage par compression .....	28
<b>Figure I.22.</b> Moulage sous vide .....	29
<b>Figure I.23.</b> Moulage par injection de mousse.....	29
<b>Figure I.24.</b> Moulage par injection de pré-imprégné BMC (Injection Molding).....	30
<b>Figure I.25.</b> Schéma présentant le procédé de pultrusion .....	30
<b>Figure I.26.</b> Enroulement filamentaire.....	31
<b>Figure II.1.</b> Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff .....	38

<b>Figure II.2.</b> Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	39
<b>Figure II.3.</b> Description de la déformation d'une plaque selon les théories : classique (CLPT), premier ordre (FSDT) et d'ordre élevé (HSDT).....	41
<b>Figure II.4.</b> Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé.....	44
<b>Figure III.1.</b> Une plaque stratifiée en matériaux composites avec un système de coordonnées (x, y, z) ..	47
<b>Figure IV.1.</b> Effet de séquence d'empilement sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée (0/90) <sub>n</sub> en matériaux composites (SSSS).....	63
<b>Figure IV.2.</b> Effet de degré d'orthotropie $E_1/E_2$ sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée (0/90) <sub>n</sub> en matériaux composites (SSSS).....	64
<b>Figure IV.3.</b> Effet de séquence d'empilement sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée alternée (45/-45) <sub>n</sub> en matériaux composites (SSSS).....	65
<b>Figure IV.4.</b> Effet de degré d'orthotropie $E_1/E_2$ sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée (0/90) <sub>4</sub> en matériaux composites sous différentes conditions aux limites.....	66
<b>Figure IV.5.</b> Effet du rapport coté sur épaisseur $a/h$ sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée (0/90) <sub>4</sub> en matériaux composites sous différentes conditions aux limites.....	66
<b>Figure IV.6.</b> Effet de rapport d'aspect $a/b$ sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque rectangulaire stratifiée croisée (0/90) <sub>2</sub> en matériaux composites (SSSS).....	68
<b>Figure IV.7.</b> Effet de rapport d'aspect $a/b$ sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque rectangulaire stratifiée alternée (45/-45) <sub>2</sub> en matériaux composites (SSSS).....	68
<b>Figure IV.8.</b> Effet d'angle d'orientation des fibres sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque rectangulaire stratifiée alternée en matériaux composites ( $a/b=2$ , SSSS).....	69
<b>Figure IV.9.</b> Effet de la charge de compression (axiale et biaxiale) sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée (0/90) en matériaux composites (SSSS).....	70
<b>Figure IV.10.</b> Effet de la charge de compression (axiale et biaxiale) sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée (45/-45) en matériaux composites (SSSS).....	71
<b>Figure IV.11.</b> Effet de degré d'orthotropie $E_1/E_2$ sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée (0°/90°) <sub>n</sub> en matériaux composites (SSSS).....	72
<b>Figure IV.12.</b> Effet de séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée (0°/90°) <sub>n</sub> en matériaux composites (SSSS).....	73
<b>Figure IV.13.</b> Effet de séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée alternée (45/-45) <sub>n</sub> en matériaux composites (SSSS).....	74

**Figure IV.14.** Effet degré d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_4$  en matériaux composites sous différentes conditions aux limites. . 77

**Figure IV.15.** Effet du rapport coté sur épaisseur  $a/h$  sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_4$  en matériaux composites sous différentes conditions aux limites. .... 77

## Liste des tableaux

<b>Tableau III.1.</b> Les fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ .....	57
<b>Tableau IV.1.</b> Variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ des plaques carrées stratifiées alternées $(\theta/-\theta)$ simplement appuyées (SSSS) en matériaux composites sous compression uniaxiale.....	61
<b>Tableau IV.2.</b> Variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ des plaques carrées stratifiées $(0/90)_n$ simplement appuyées (SSSS) en matériaux composites sous compression axiale.....	62
<b>Tableau IV.3.</b> Effet de séquence d'empilement sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0/90)_n$ en matériaux composites (SSSS). .....	63
<b>Tableau IV.4.</b> Effet de degré d'orthotropie $E_1/E_2$ sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0/90)_n$ en matériaux composites (SSSS). .....	63
<b>Tableau IV.5.</b> Effet de séquence d'empilement sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée alternée $(45/-45)_n$ en matériaux composites (SSSS).....	64
<b>Tableau IV.6.</b> Effet des conditions aux limites sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0/90)_n$ en matériaux composites.....	65
<b>Tableau IV.7.</b> Effet de degré d'orthotropie $E_1/E_2$ et le rapport coté sur épaisseur $a/h$ sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée croisée $(0/90)_4$ en matériaux composites sous différentes conditions aux limites.....	67
<b>Tableau IV.8.</b> Effet de rapport d'aspect $a/b$ sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque rectangulaire stratifiée en matériaux composites (SSSS). .....	68
<b>Tableau IV.9.</b> Effet d'angle d'orientation des fibres sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque stratifiée alternée en matériaux composites (SSSS). .....	69
<b>Tableau IV.10.</b> Effet d'angle d'orientation des fibres sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque rectangulaire stratifiée en matériaux composites ( $a/b=2$ , SSSS). .....	69
<b>Tableau IV.11.</b> Effet de type de charge (axiale ou biaxiale) sur la variation de la charge critique de flambement $\bar{N}$ d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites (SSSS). .....	70
<b>Tableau IV.12.</b> Variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ pour différentes degrés d'orthotropie (SSSS) ( $a/h=5$ ). .....	72
<b>Tableau IV.13.</b> Effet de séquence d'empilement et du rapport coté sur épaisseur $a/h$ sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée $(0^\circ/90^\circ)_n$ en matériaux composites (SSSS).....	73
<b>Tableau IV.14.</b> Effet de séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée alternée $(45/-45)_n$ en matériaux composites (SSSS).....	74
<b>Tableau IV.15.</b> Variation des fréquences naturelles $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée stratifiée alternée $(\theta/-\theta)_3$ en matériaux composites (SSSS). .....	75

**Tableau IV.16.** Variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée alternée  $(45^\circ/-45^\circ)_n$  en matériaux composites pour différentes valeurs d'orthotropie (SSSS). ..... 76

**Tableau IV.17.** Effet de conditions aux limites et le rapport coté sur épaisseur  $a/h$  sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_n$  en matériaux composites. ... 78

## Liste des notations

$a$	longueur de la plaque
$b$	largeur de la plaque
$h$	l'épaisseur de la plaque
$E$	Module de Young
$E_{11}$	Module de Young longitudinal
$E_{22}$	Module de Young transversal
$G_{12}, G_{13}, G_{23}$	module de cisaillement
$\nu$	Coefficient de Poisson
$E_c$	Module d'élasticité du composite.
$E_f$	Module d'élasticité des fibres.
$E_m$	Module d'élasticité de la matrice
$G$	module de cisaillement transverse
$u, v, w$	Les déplacements suivant les directions $x, y$ et $z$
$u_0, v_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à $z$
$\psi(z)$	Est une fonction dérivée de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes.
$\omega, \bar{\omega}$	Fréquences naturelles
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions $x, y$ et $z$
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations dans les directions $x$ et $y$
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
$w_b$	Composante de la flèche due à la flexion
$w_s$	Composante de la flèche due au cisaillement
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux de membrane
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion pure
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
$K_x^b$	Courbure de flexion suivant $x$



$K_x^s$	Courbure de cisaillement suivant x
$K_y^b$	Courbure de flexion suivant y
$K_y^s$	Courbure de cisaillement suivant y
$K_{xy}^b$	Courbure de flexion suivant xy
$K_{xy}^s$	Courbure de cisaillement suivant xy
$Q_{yz}^s, Q_{xz}^s$	Effort de cisaillement pur
$m, n$	Nombres de modes
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$D_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$\Omega$	La surface supérieure
$Q_{ij}$	Les coefficients de rigidité
$\bar{Q}_{ij}$	Les coefficients de rigidité en fonction de l'orientation des fibres
$[C]$	Matrice symétrique des valeurs propres
$s_{ij}$	Valeurs propres
$\{A\}$	Le vecteur des déplacements

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## **Introduction générale**

Au cours de ces dernières années, l'industrie de la transformation des matériaux composites a bénéficié d'une croissance rapide et régulière, soutenue en particulier par la diversité des applications. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes,...etc. Ils enrichissent les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Ainsi les matériaux composites (à matrices métalliques, élastomères, polymères ou céramiques) offrent aux industriels et aux designers des possibilités nouvelles d'associer fonction, forme et matériaux, au sein de réalisations, matériaux, systèmes de plus en plus performants. Poids, anisotropie, plurifonctionnalité sont autant d'atouts de principe. Des processus nouveaux de conception, d'industrialisation et de fabrication permettent d'étendre les possibilités techniques, et de mieux satisfaire des besoins parfois contradictoires (poids, fonctions...) auxquels les matériaux homogènes classiques répondent difficilement.

L'objectif de ce travail est de proposer une nouvelle théorie basée sur une approche analytique simple et efficace pour l'étude et l'analyse de la stabilité vis-à-vis au flambement mécanique et à la vibration libre des plaques rectangulaires stratifiées antisymétriques en matériaux composites sous différentes conditions aux limites. La première partie du travail consiste à rassembler de manière systématique le maximum des données bibliographiques disponibles dans la littérature. Puis en s'appuyant sur cette base de données, on étudiera le flambement et la vibration libre des plaques stratifiées en composites. Pour cela, le manuscrit s'articule sur quatre chapitres :

Dans le premier chapitre on définit d'une manière générale le concept des matériaux composites. Aussi, nous présenterons les progrès réalisés en matière de recherche scientifique ainsi que les différents procédés de fabrication et leurs intérêts à travers les secteurs de l'industrie moderne en définissant ses avantages et inconvénients.

Dans le deuxième chapitre une étude bibliographique concernant les différentes théories des plaques est présentée. Une synthèse bibliographique sur les différents modèles de théories des plaques qui inclut ou non le cisaillement transverse, en suite, une comparaison entre la théorie classique et les théories d'ordre élevé est présentée.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude analytique de la stabilité au flambement mécanique et à la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques en composites. Pour cela, une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevé à quatre variables sera utilisée pour décrire le champ de déplacement, ensuite, les équations de mouvement/équilibre sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton, quant à la charge critique de flambement et les fréquences naturelles sont obtenues par la solution de Navier pour les plaques simplement appuyées et la solution exacte pour les différentes conditions aux limites.

Dans le quatrième chapitre, une validation de la théorie proposée est exposée en premier lieu en comparant les résultats obtenus avec ceux des travaux issus de la littérature. Par la suite, une étude paramétrique est réalisée afin de déterminer les différents facteurs régissant la stabilité vis-à-vis au flambement et à la vibration libre des plaques stratifiées en composites.

Le présent travail se termine par une conclusion générale, où on souligne l'efficacité de cette nouvelle théorie des plaques composites dans la résolution du problème de flambement et de la vibration libre ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futures.

**CHAPITRE I :**

**GÉNÉRALITÉS SUR  
LES MATÉRIAUX COMPOSITES**

## I.1. Introduction

Ce premier chapitre a pour objectif de définir le concept de matériau composite, connaître sa composition, ses propriétés et de classer ces différentes structures.

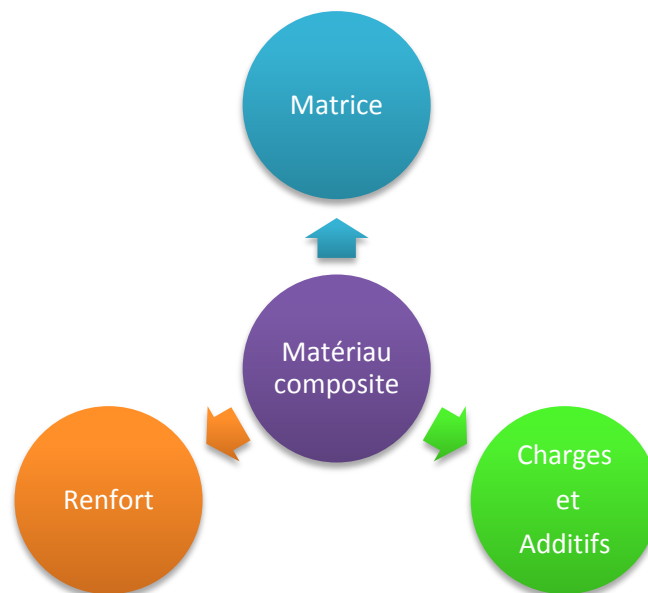
D'une façon générale, un matériau composite est un matériau composé de plusieurs matériaux de nature ou d'origine différentes et dont ces caractéristiques mécaniques sont supérieures à celles des matériaux entrant dans sa composition.

La condition fondamentale pour que cette définition soit valide, est que la cohésion de l'ensemble soit assurée par des liaisons mécaniques, physiques ou chimiques.

Les matériaux composites disposent d'avantages importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils possèdent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique.

Ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes. Les matériaux composites (à matrice métallique, élastomère, polymère ou céramique) offrent aux industriels et aux designers des possibilités nouvelles d'associer des fonctions (forme et matériaux), alors des systèmes de plus en plus performants.

## I.2. Le concept général des matériaux composites



**Figure I.1.** Les constituants de base des composites

Un composite est un matériau qui diffère des matériaux macroscopiquement homogènes habituels comme les métaux et les polymères. Il comprend des fibres continues ou coupées d'un matériau résistant « renfort » qui sont noyées dans une matrice dont la résistance mécanique est

beaucoup plus faible. Il existe plusieurs types d'arrangement des fibres. La matrice a un double rôle: elle conserve la disposition des fibres et leur transmet les sollicitations auxquelles la pièce est soumise.

Les composites Fibres-Résine sont communément appelés "Matériaux Composites" par habitude et sont capables de répondre de façon optimale à la conception des pièces mécaniques. En effet, les renforts fibreux sont disposés de façon judicieuse dans la matrice qui conserve leur disposition géométrique et leur transmet les sollicitations.

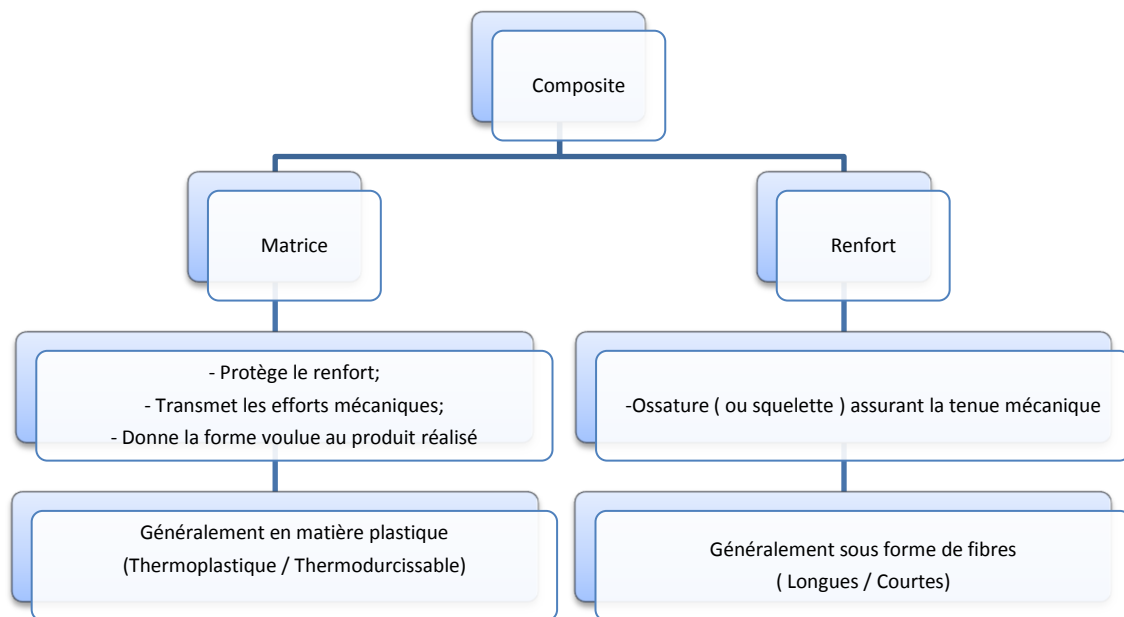
A l'opposé des matériaux traditionnels, le composite sait s'adapter aux exigences de conception alors qu'une conception traditionnelle découle habituellement des propriétés des matériaux constitutifs (figure I.1).

Ainsi, de nos jours, un très grand nombre de composites sont utilisés de manière courante et il est pratiquement impossible de les traiter tous de la même manière, tant leurs propriétés sont variables. Cependant, nous pouvons distinguer quelques familles de composites en fonction du type de matrice et de renforts utilisés.

Un matériau composite est la plupart du temps hétérogène et anisotrope. On distinguera selon les renforts utilisés:

1. Les matériaux composites dits de « grande diffusion (GD) » dont les propriétés mécaniques sont plus faibles mais d'un coût compatible avec une production en grande série ; représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés) ;
2. Les matériaux composites dits de « haute performance (HP) », présentant des propriétés mécaniques spécifiques élevées et un coût unitaire important. Ce sont les plus employés en aéronautique et dans le spatial, Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux [1].

### I.3. Définition d'un matériau composite



**Figure I.2.** Description d'un matériau composite

Un matériau composite est un assemblage d'au moins de deux matériaux non miscibles (mais ayant une forte capacité d'adhésion). Le nouveau matériau ainsi élaboré possède des performances supérieures à celles des éléments pris séparément (figure I.2).

Il est généralement constitué de deux composants, une ossature appelée renfort qui assure la tenue mécanique et d'une protection appelée matrice qui assure la cohésion de la structure et le transfert des charges entre les renforts. A ces deux composants principaux peuvent s'ajouter des additifs qui permettent de modifier l'aspect, ou les caractéristiques du matériau. Peuvent être incorporés pour améliorer la résistance au feu, diminuer le retrait, modifier la couleur...etc.

Les additifs possibles sont encore plus nombreux. Une classe d'additifs que l'on rencontre systématiquement est celle des agents d'interface, que l'on dépose sur les fibres pour les faire adhérer à la matrice. On rencontre également :

- ✓ Lubrifiants et agents de démoulage
- ✓ Pigments et colorants
- ✓ Agents anti-retraits
- ✓ Agents ultraviolets



## I.4. Composition des matériaux composites

### I.4.1. Les matrices

Il existe aujourd'hui un grand nombre de matériaux composites que l'on classe généralement en trois familles en fonction de la nature de la matrice :

- ✓ Les composites à matrices organiques (CMO) qui constituent, de loin, les volumes les plus importants aujourd'hui à l'échelle industrielle ;
- ✓ Les composites à matrices céramiques (CMC) réservés aux applications de très haute technicité et travaillant à haute température comme le spatial, le nucléaire et le militaire, ainsi que le freinage (freins carbone) ;
- ✓ les composites à matrices métalliques (CMM).

#### I.4.1.1. Les composites à matrices organiques (CMO)

Actuellement, les composites à matrice organique représentent 99% des matériaux composites. Ils sont constitués d'une matrice thermodurcissable (TD) ou thermoplastique (TP) et d'une structure de renforts qui peut être en fibre de carbone, de verre, d'aramide ou encore naturelle. (Lin, chanvre, sisal, ...etc),

Il existe pour les CMO deux grandes familles de matrices : les résines thermodurcissables (TD) et les résines thermoplastiques (TP). Ces résines, sous forme liquide à l'état initial, subissent une transformation irréversible en passant à l'état solide après polymérisation. On distingue deux familles de résines :

##### *I.4.1.1.1. Les thermodurcissables (TD)*

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. Les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, amioplastes, furaniques) et les résines époxydes sont des résines thermodurcissables [2].

##### *Polyesters*

Les plus utilisées, sont généralement renforcées par des fibres de verre (pare-chocs, carrosserie, coques de bateaux, piscines, éléments de tramway ou de TGV, ...etc) époxydes, aux caractéristiques mécaniques supérieures, sont généralement renforcées par des fibres de carbone ou de verre (longerons, dérives, nacelles, voilure, bateaux, automobiles de compétition, ...etc)

##### *Polyester insaturé*

Résine thermodurcissable d'usage très courant dans l'industrie composite.

On compte plus de 12 types de résines polyester, dont :

- ✓ les résines orthophtaliques (les plus courantes) ;
- ✓ les résines tétrahydrophthaliques pour les usages alimentaires ;
- ✓ les résines isophtaliques pour la réalisation de gel-coats et l'industrie chimique.

Ces résines ont une très bonne aptitude à imprégner les fibres de verre, un prix peu élevé, un durcissement assez rapide sans élimination de produits secondaires.

C'est la résine la plus utilisée dans l'application composite de grande distribution [3].

### *Vinylesters*

On peut la considérer comme une variante des polyesters produite à partir d'acides acryliques. Elles possèdent une bonne résistance à la fatigue et un excellent comportement à la corrosion, mais demeure combustible.

### *Les époxydes*

Elles résultent de la polyaddition de l'épichlorhydrine sur un polyalcool et constitue la résine type des composites hautes performances HP.

Le terme époxyde désigne une grande variété de pré-polymères comportant un ou plusieurs motifs époxydiques qui, après polycondensation avec un durcisseur, conduisant à des produits thermodurcis dont les principales applications concernent le collage et les matériaux composites (matrice époxyde avec des renforts en fibre de verre ou de carbone).

Il s'agit de produits performants qui rentrent dans un très grand nombre d'applications, dont certaines sont d'un niveau technique incontestablement élevé :

- ✓ industrie aéronautique et automobile (collages de structures et de panneaux) ;
- ✓ industrie électrique moyenne et haute tension (surtout appareillage électrique) ;
- ✓ électronique (enrobages de condensateurs, confection de circuits imprimés,... etc.) ;
- ✓ sport (skis, raquettes, arcs et flèches de compétition, cadres de vélos en carbone, roues lenticulaires...) ;
- ✓ outillages (modèles à reproduire, maîtres modèles, boîtes à noyaux,... etc.) ;
- ✓ stratifiés et composites (nids d'abeilles, structures triangulaires, arbres de transmission, carrosseries de voitures de sport...) ;
- ✓ revêtements résistant aux agents chimiques, réparation de fissures de barrages,... etc.

### ***Les phénoliques***

Elles sont issues de la polycondensation du phénol et du formol et se caractérisent par une bonne tenue au feu. Elles restent fragiles, sensibles à l'humidité, difficiles à colorer et à mettre en œuvre.

Les résines phénoliques (les plus anciennes résines synthétiques) sont utilisées dans la réalisation des pièces d'aménagement et présentent les avantages suivants :

- ✓ un prix souvent très bas ;
- ✓ une très bonne tenue à la chaleur et au feu ; elles sont auto-extinguibles et ne dégagent pas de fumées toxiques ;
- ✓ une dureté élevée ;
- ✓ une structure très condensée ; leur taux de résidu (coke) très important lors de leur pyrolyse leur permet d'être utilisées dans des matériaux ablatifs.

Elles ont les inconvénients suivants :

- ✓ Une résistance à la traction et une tenue aux chocs généralement faibles à cause, en particulier, de porosités résiduelles résultant du dégagement d'eau ou d'ammoniac lors de la polycondensation ;
- ✓ Une toxicité, en cours de fabrication, due au fort taux de monomères résiduels de phénol et de formol (les fabricants s'efforcent de réduire cet aspect) ;
- ✓ En général, elles dégradent rapidement les outillages par dégagement d'acide et d'eau (corrosion des outillages).

### ***Polyuréthanes et polyuréés***

Un polyuréthane (parfois écrit polyuréthane) est un polymère d'uréthane, une molécule organique.

On appelle uréthane, ou plus couramment « carbamate », tout composé produit par la réaction d'un iso-cyanate et d'un alcool.

Les polyuréthanes peuvent être fabriqués avec une grande variété de textures et de duretés en variant les monomères utilisés et en ajoutant d'autres substances. Ils sont utilisés pour les colles, peintures, élastomères « caoutchoucs », mousses, fibres. Ainsi, ces plastiques aux vastes applications sont utilisés dans un grand nombre d'industries.

Dans la fabrication de pièces composites, on utilise surtout des formules élastomériques dont la faible viscosité permet un bon remplissage du moule [3].

### ***Polyimides***

Ces résines sont surtout utilisées dans les composites HP, lorsque l'on cherche une bonne stabilité sous hautes températures ( $> 250\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Elles restent toutefois très onéreuses (couteuses) et difficiles à mettre en œuvre.

### ***Bismaléimides***

Matrices très peu utilisées en Europe. Elles offrent une bonne tenue à la fois au choc et en température, mais restent difficiles à mettre en œuvre.

#### ***1.4.1.1.2. Les thermoplastiques (TP)***

Ces résines, sous forme, à l'état initial, de granulés, de fibres courtes, longues ou de plaques sont réutilisables avec cependant des difficultés de séparation de la matrice et des fibres. A l'inverse des thermodurcissables, c'est la matière première déjà polymérisée qui subit un échauffement, la pièce conservant sa forme après refroidissement. Il existe deux types de renforts :

Les fibres courtes Elles sont utilisées, avec les thermoplastiques (TP), pour les pièces de petite taille moulées par injection et aux caractéristiques mécaniques réduites (cache-culbuteurs, tubulures d'admission, pales de ventilateur...). Avec les thermodurcissables (TD), elles sont utilisées pour des températures supérieures à  $150^{\circ}\text{C}$ . les fibres longues Associées à une matrice polyester (TD), elles sont réservées aux pièces de grande diffusion (skis, planche de surf...) Associées à une matrice époxy, les fibres longues sont réservées aux pièces nécessitant des performances élevées (rampe accès de l'avion de transport militaire A400 M...)

Les polymères utilisés sont essentiellement des thermoplastiques techniques qui présentent à l'état vierge de bonnes caractéristiques mécaniques. Un renforcement à l'aide de fibres courtes leur confère une tenue thermique et mécanique améliorée et une bonne stabilité dimensionnelle.

Les principales matrices TP utilisées (possédant tous une tenue en température supérieure à  $100^{\circ}\text{C}$ , hors POM) sont les suivantes :

- ✓ Polyamide (PA) : tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures ;
- ✓ Polytéréphtalate éthylénique et butylénique (PET, PBT) : bonne rigidité, bonne ténacité ;
- ✓ Polycarbonate (PC) : tenue au choc ;
- ✓ Polysulfure de phénylène (PPS) : résistance à l'hydrolyse ;
- ✓ Polyoxyméthylène (POM) : bonne tenue à la fatigue ;
- ✓ Polysulfurés (PSU et PPS) : bonne stabilité chimique et à l'hydrolyse, peu de fluage, tenue au chaud ;
- ✓ Polypropylène (PP) : peu onéreux et assez stable en température, mais combustible.

De plus en plus, on utilise des thermoplastiques thermostables (tenue en température  $> 200\text{ °C}$  et bonnes propriétés mécaniques), en particulier les suivants :

- ✓ Polyamide-imide (PAI) ;
- ✓ Polyéther-imide (PEI) ;
- ✓ Polyéther-sulfone (PES) ;
- ✓ Polyéther-éther-cétone (PEEK).

#### **I.4.1.2. Les composites à matrices céramiques (CMC)**

Beaucoup moins répandus que leurs homologues à matrice organique en raison d'un coût élevé, les CMC s'adressent aux applications à très haute température. Ils sont principalement utilisés dans l'industrie spatiale et l'aéronautique militaire, ainsi que pour la conception d'organes haut de gamme comme des disques ou plaquettes de freins.

Les céramiques possèdent de nombreux atouts pour de telles applications : elles peuvent résister à des températures très élevées, sont plus légères que de nombreux métaux, et présentent une bonne stabilité chimique. Malheureusement, leur grande fragilité limite fortement leur domaine d'utilisation. Le principe des CMC est donc de rendre les céramiques moins cassantes en leur donnant une structure composite, c'est-à-dire en les façonnant sous forme de renforts et d'une matrice. Cela conduit à une meilleure résistance à la rupture, pour deux raisons :

- ✓ Les fibres ayant un diamètre microscopique, il est possible de les fabriquer avec très peu de défauts, ce qui conduit à des contraintes de rupture plus élevées ;
- ✓ Lorsque le composite se dégrade, les fissures ont tendance à suivre les interfaces situées entre les fibres et la matrice au lieu de se propager dans les fibres ; au lieu de rompre brutalement, le matériau se "désassemble" donc progressivement.

Afin de ralentir le plus possible la rupture, les matrices céramiques possèdent généralement une structure multicouches: la matrice est faite de plusieurs couches superposées, ce qui permet de multiplier les interfaces et donc les déviations des fissures. Tout ceci fait que les CMC sont beaucoup moins fragiles et beaucoup plus tenaces que les céramiques massives, et peuvent donc être utilisés dans des pièces mécaniques.

#### **I.4.1.3. Les composites à matrices métalliques (CMM)**

Enfin, les composites à matrices métalliques ont été élaborés pour tenter de concilier les qualités des métaux (ductilité, bonne tenue face au vieillissement et au feu...etc) avec la légèreté et les bonnes caractéristiques mécaniques propres aux structures composites. Ce sont des matériaux performants, mais pénalisés par un coût de revient encore élevé et réservés à des applications relativement exigeantes, dans divers domaines.

Les CMM comportent une matrice en métal léger (aluminium et ses alliages, magnésium, titane...) et un renfort pouvant être, comme pour les CMO ou CMC, de deux types :

- ✓ Soit des particules ou des fibres courtes céramiques ; les propriétés mécaniques sont alors légèrement supérieures à celle du métal formant la matrice, et les procédés traditionnels de mise en forme des métaux peuvent généralement être employés ;
- ✓ Soit des fibres longues céramiques ou métalliques ; les propriétés sont alors bien supérieures à celles de la matrice, et les procédés de mise en forme sont plus coûteux (il s'agit typiquement d'infiltrer du métal fondu autour d'un tissu de fibres).

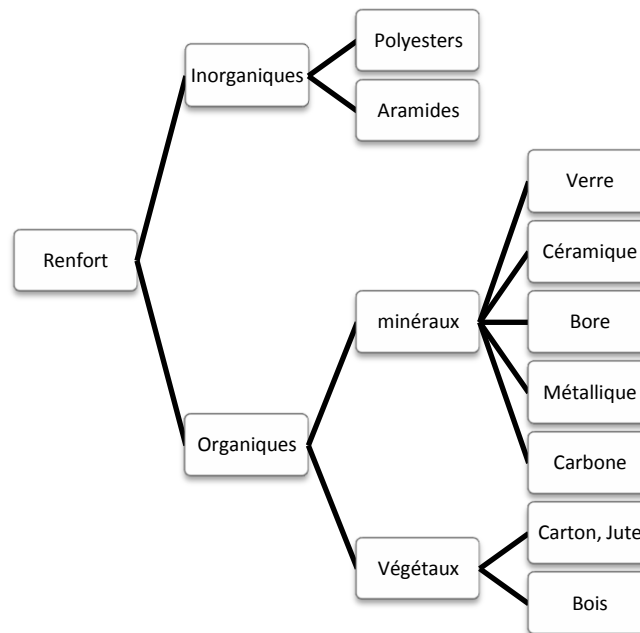
Un avantage de ces composites est que la matrice étant métallique, ses caractéristiques mécaniques intrinsèques sont généralement bonnes. Il est donc possible de s'appuyer sur le comportement matriciel et de ne renforcer que certaines zones, ou encore de se contenter de renforts unidirectionnels ; cela est généralement impossible avec les matrices polymères (en raison de leur faible résistance) ou céramiques (en raison de leur fragilité). Un inconvénient est la grande réactivité chimique des métaux : lors de la mise au point du composite, il faut s'assurer que la matrice et le renfort ne peuvent pas réagir entre eux, faute de quoi les conséquences sur les propriétés mécaniques peuvent être catastrophiques.

#### **I.4.2. Les renforts**

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes :

Linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus) [2].

La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I.3.



**Figure I.3.** Types des renforts

#### I.4.2.1. Fibres de verre



**Figure I.4.** Fibres de verre

Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion (GD). Elles sont les plus anciennes (1940) et les moins chères des fibres du marché, et celles dont on réalise le plus fort tonnage (figure I.4). Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 95% des matériaux composites.

Elles sont obtenues à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en Fusion à 1250°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. Suivant les applications auxquelles elles sont Destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

- ✓ Fibres E pour les composites grandes diffusions (GD) ;
- ✓ Fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés) ;
- ✓ Fibres R pour les composites hautes performances (HP).

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevées.

#### ***1.4.2.1.1. Procédé de fabrication des fibres de verre***

Ce procédé se déroule en cinq étapes principales :

3. Affinage à 1500°C: la composition est chauffée ; elle devient visqueuse (vers 800°C), puis liquide, et finalement se vitrifie. À 1500°C, elle est homogène, et les dernières bulles et impuretés disparaissent.
4. Filage par étirement : le verre en fusion se transforme en filament en étant étiré à grande vitesse ; la filature des filaments s'apparente en fait à la filature textile classique pour produire un fil. Ce fil de verre se bobine ensuite autour d'une broche.
5. Ensimage : l'étirage et le bobinage n'ont pas suffisamment d'effet pour rassembler durablement les centaines de filaments en un fil (le verre est trop lisse pour s'agglomérer). L'ensimage consiste à ajouter un revêtement protecteur pour permettre l'agglomération des filaments et faciliter l'intégration dans les polymères.
6. Finition : les fils sont ensuite bobinés ou coupés selon les finalités.
7. Séchage (oven drying) : les fils sont finalement séchés à des températures de 700 à 800°C.

#### ***1.4.2.1.2. Procédé de fabrication de la laine de verre***

- ✓ Matières premières : Le verre de la laine de verre se compose de verre recyclé (dans une proportion pouvant aller jusqu'à 80%, à minima 40%), de sable et d'autres matières naturelles tels que le calcaire ou la dolomie qui sont des fondants et permettent l'abaissement de la température de fusion du verre ;
- ✓ Composition : Les matières premières sont stockées dans des silos, puis pesées et mélangées pour former la composition. ;
- ✓ Fusion : La composition verrière entre en fusion dans le four ;
- ✓ Fibrage : La matière en fusion passe dans une filière puis dans des assiettes de fibrage d'où elle ressort sous forme de fils de verre qui sont pulvérisés de polymère (le liant) pour former un matelas. ;
- ✓ Etuvage : Le matelas de laine cuit pour être polymérisé. Il devient ainsi un matelas élastique, qu'il devient possible de comprimer. ;
- ✓ Découpe par massicot : Les matelas sont surfacés puis découpés. Les chutes sont recyclées dans le processus. ;



- ✓ Conditionnement : Le conditionnement se fait en rouleaux et panneaux. Les matelas sont très fortement compressés par une enrouleuse, jusqu'à 10 fois leur épaisseur, ce qui permet d'optimiser leur transport. ;
- ✓ Palettisation : L'opération de la palettisation automatique permet encore d'améliorer la compression des panneaux et rouleaux tout en rendant les produits stockables à l'extérieur.

#### ***1.4.2.1.3. Utilisations des fibres de verre***

Le renforcement est de loin l'application la plus importante. Dans 9 cas sur 10, les fibres de verre servent à renforcer les bétons ou les polymères (matériaux plastiques thermodurcissables comme le polyester ou l'époxy) en vue de fabriquer des matériaux composites capables de se substituer à l'acier.

Les principales utilisations de ces matériaux composites sont, par ordre d'importance :

- ✓ les bâtiments et les infrastructures (29%) ;
- ✓ les transports (25%) : avions, TGV ;
- ✓ l'électricité et l'électronique (16%) ;
- ✓ les sports et loisirs (14%) : perches d'athlétisme, skis et planches de surf ;
- ✓ les équipements industriels (11%).

Pour l'isolation, le verre est utilisé sous la forme d'un enchevêtrement de fibres assez courtes constituant une sorte de matelas, souvent désigné sous le nom de laine de verre. Ce matériau est utilisé pour l'isolation thermique des combles et des toitures.

Par ailleurs, les fibres de verres, grâce à leur souplesse, leur transparence et leur excellente capacité de transmission de la lumière, sont employées comme fibres optiques dans le domaine médical (endoscopie) et dans le domaine des télécommunications où la fibre optique est une technologie d'avenir.

#### ***1.4.2.1.4. Avantages et Inconvénients des fibres de verre***

##### ***Avantages***

- ✓ Bonne résistance spécifique (pour le verre R) ;
- ✓ Une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- ✓ De bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone ;
- ✓ Des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.
- ✓ Tenue à la température élevée ;
- ✓ Incombustibilité ;
- ✓ Dilatation et conductivité thermique faible ;
- ✓ Bon rapport de performances mécanique/prix.

### ***Inconvénients***

- ✓ Faible module (par rapport au carbone ou aramide)
- ✓ vieillissement au contact de l'eau [4].

### **I.4.2.2. Fibres de carbone**



**Figure I.5.** Exemple des fibres de carbone

C'est la fibre la plus utilisée dans les applications hautes performances en aéronautique, en construction industrielle et dans les sports et loisirs. Très fortement orientées, les microstructures des fibres de carbone donnent une importante rigidité et résistance des fibres dans la direction longitudinale que dans la direction transversale.

La fibre de carbone se compose des fibres extrêmement fines, d'environ 5 à 10  $\mu\text{m}$  de diamètre, et elle est composée principalement d'atomes de carbone. Ceux-ci sont agglomérés dans des cristaux microscopiques qui sont alignés plus ou moins parallèlement à l'axe long de la fibre. L'alignement des cristaux rend la fibre extrêmement résistante pour sa taille. Plusieurs milliers de fibres de carbone sont enroulées ensemble pour former un fil, qui peut être employé tel quel est ou tissé (figure I.5).

Ces fibres sont fabriquées pour atteindre de plus hautes résistances en traction, mais ceci est fait au dépend de leurs capacités de déformations faibles. Les fibres de carbone peuvent aussi être très conductrices de chaleur et d'électricité, ce qui peut être un avantage ou un désavantage, selon le point de vue du concepteur.

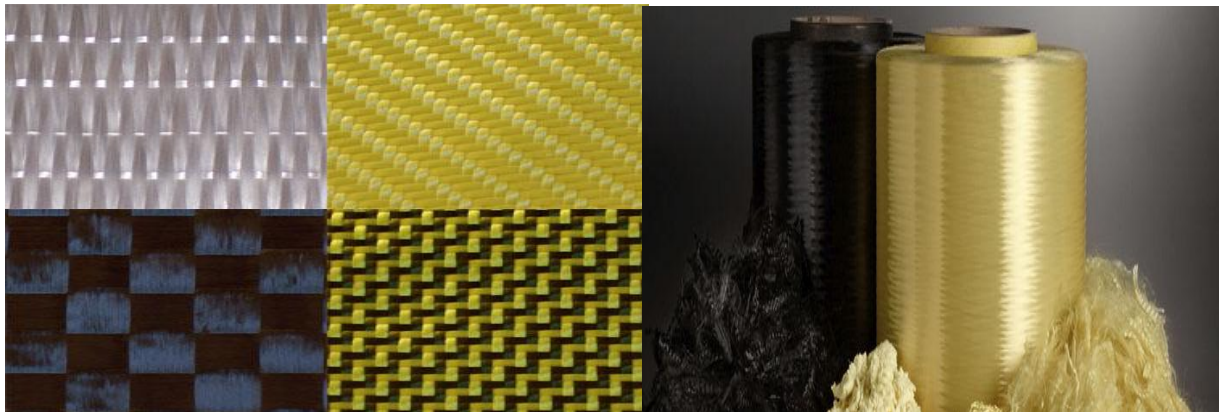
#### ***I.4.2.2.1. Avantages des fibres de carbone***

- ✓ Excellentes propriétés mécaniques ;
- ✓ Très bonne tenue en température (non oxydante) ;
- ✓ Dilatation thermique nulle ;
- ✓ Bonne conductibilité thermique et électrique ;
- ✓ Bonne tenue à l'humidité ;
- ✓ Usinage aisé ;
- ✓ Faible densité.

#### ***1.4.2.2. Inconvénients des fibres de carbone***

- ✓ Une mauvaise résistance à l'abrasion et aux chocs ;
- ✓ Leur recyclage (broyage problématique) ;
- ✓ Leur conductivité, de nombreuses électrocutions ont frappé des pêcheurs après avoir heurté une ligne électrique avec leur canne ; ou des marins en manœuvrant le mât de leur voilier ;
- ✓ Cette fibre provoquerait sous certaines formes des risques de cancer du poumon ;
- ✓ Prix très élevé.

#### **1.4.2.3. Fibres d'aramide**



**Figure I.6.** Fibres d'aramide

Elles sont issues de la chimie organique des polyamides Aromatiques (ou poly-aramide) par synthèse chimique à basse température; ses propriétés diffèrent des polyamides aliphatiques classiques. Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (Jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

- ✓ D'une adhérence moyenne entre matrice et fibre ;
- ✓ D'un prix encore trop élevé.

Les chaînes de polymères alignées donnent une résistance et une rigidité plus importantes dans la direction longitudinale que dans la direction transversale. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- ✓ Les fibres à bas module: utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles;
- ✓ Les fibres à haute module: employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.

#### ***1.4.2.3.1. Avantages des fibres d'aramide***

- ✓ Bonne résistance spécifique à la traction ;

- ✓ Faible densité ;
- ✓ Dilatation thermique nulle ;
- ✓ Absorption des vibrations, amortissement ;
- ✓ Excellente résistance aux chocs et à la fatigue ;
- ✓ Bon comportement chimique vis-à-vis des carburants.

#### ***I.4.2.3.2. Inconvénients des fibres d'aramide***

- ✓ Prix très élevé ;
- ✓ Faible tenue en pression ;
- ✓ Reprise d'humidité importante (4%) ;
- ✓ étuvage avant imprégnation ;
- ✓ Faible adhérence avec les résines d'imprégnation ;
- ✓ Sensibilité aux UV ;
- ✓ Usinage difficile.

#### **I.4.2.4. Fibres de bore**



**Figure.I.7.** Fibres de bore

Ces fibres sont de gros filaments (figure I.7) (diamètre de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ ), formées d'une âme (le fil support) en carbone d'un diamètre d'environ 10  $\mu\text{m}$ , recouverts:

- ✓ D'une couche de bore ;
- ✓ D'une couche de carbure de silicium.

#### **I.4.2.5. Fibres métalliques**



**Figure.I.8.** Fibres métalliques

Elles sont les plus chères de toutes, en raison de leur difficulté de fabrication (figure I.8). Elles approchent les propriétés d'un cristal parfait.

Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques pour :

- ✓ Leurs bonnes conductibilités thermique et électrique ;
- ✓ Leurs caractéristiques thermomécaniques.

#### I.4.2.6. Fibres naturelles

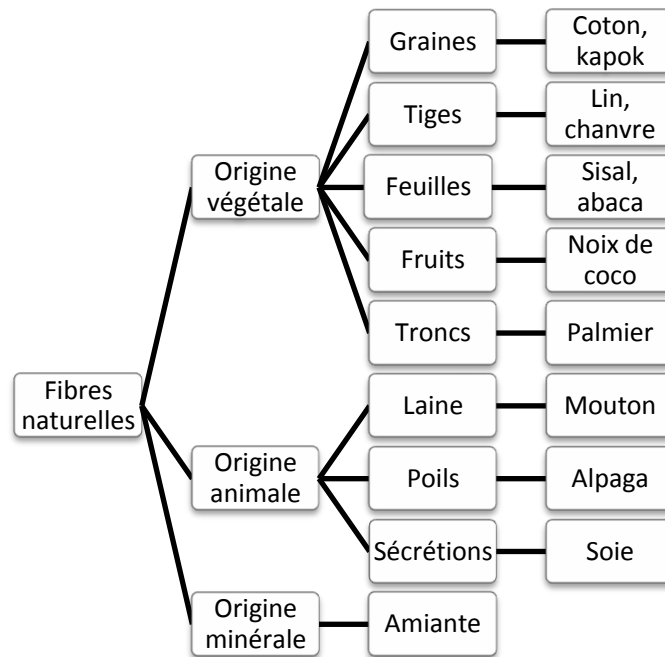


**Figure I.9.** Fibres naturelles

Elles pourront constituer une alternative intéressante aux fibres de Verre en raison de leur plus grande facilité de recyclage lorsque leurs propriétés physiques seront mieux appréhendées. Actuellement, elles présentent plusieurs solutions techniques majeures pour une utilisation massive dans les matériaux composites (figure I.9).

On peut subdiviser les fibres naturelles en trois grands groupes selon leur origine (figure I.10) :

- 1) Les fibres végétales qui comprennent :
  - Des fibres provenant des poils séminaux de graines (coton, kapok),
  - Les fibres libériennes extraites de tiges de plantes (lin, chanvre, jute, ortie),
  - Les fibres extraites de feuilles (sisal), de troncs (palmier), d'enveloppes de fruits (noix de coco).
- 2) Les fibres animales qui proviennent des poils, telles que la toison animale, et des sécrétions telles que la soie ;
- 3) Les fibres minérales telles que l'amiante.



**Figure I.10.** Différents fibres naturelles

### I.4.3. Charges

De manière générale, les charges et additifs jouent un rôle essentiel dans l'obtention des propriétés des polymères, qu'ils soient utilisés seuls ou comme matrices de composites ; il en existe de très nombreux types.

Les charges sont des particules solides que l'on disperse au sein de la matrice. Elles peuvent être minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques, et s'utilisent grosso modo de la même façon que dans les plastiques "traditionnels". On peut par exemple rencontrer (Figure I.11) :

- ✓ Des microbilles de verre creuses, ajoutées en plus des renforts principaux, qui améliorent la tenue en compression tout en allégeant la matrice ;
- ✓ Du noir de carbone utilisé à la fois comme pigment noir, comme barrière anti-UV et comme antioxydant ;
- ✓ Des particules de silice pour rendre la matrice plus isolante (thermiquement, électriquement et acoustiquement), diminuer son retrait au moulage... ;
- ✓ Des poudres ou paillettes métalliques pour rendre la matrice conductrice de l'électricité et de la chaleur, pour améliorer son usinabilité, sa résistance aux chocs ou à l'abrasion... ;
- ✓ Des billes thermoplastiques ajoutées dans les matrices thermodurcissables, pour améliorer leur ductilité et donc leur résistance à la fissuration... ;



**Figure I.11.** Exemples des charges : (a) microbilles de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.

#### **I.4.3.1. Charges renforçantes**

Sphériques ( $10 < \Phi < 150 \mu\text{m}$ ) : microbilles de verre creusées ou pleines, microbilles de carbone.

Non sphériques : mica sous forme d'écailles.

#### **I.4.3.2. Charges non renforçantes**

Ces matériaux sont ajoutés à la résine afin de réduire le coût de la résine. Ils sont extraits de roches ou de minerais (carbonate de calcium, talc, kaolin, silices,...etc.). L'incorporation de ces charges à la matrice a pour effet d'augmenter certaines propriétés, entre autres, la masse volumique, le module d'élasticité, la dureté, la viscosité et la stabilité dimensionnelle. Par contre, on obtient une réduction du prix, de la résistance à la traction et de la résistance à la flexion du composite.

#### **I.4.3.3. Charges ignifugeantes**

Hydrate d'alumine, oxyde d'antimoine.

### **I.4.4. Les Additifs**

Il s'agit de la substance ajoutée avec une faible quantité quelque pourcentage en masse à la résine pour modifier ou améliorer le comportement rhéologique ou les propriétés du produit fini :

- ✓ Accélérateurs et catalyseurs de polymérisation ;
- ✓ Diluants ;
- ✓ plastifiants ou flexibilisateurs ;
- ✓ Tensioactifs ;
- ✓ Pigments et colorants ;
- ✓ antioxydants, anti UV, anti-ozones ;

Les charges et additifs; sont incorporés dans un matériau composite pour :

- ✓ Modifier la couleur ;

- ✓ Modifier sensiblement les propriétés mécaniques ou thermiques ;
- ✓ Réduire le coût ;
- ✓ Résister au feu ;
- ✓ Diminuer le retrait ;
- ✓ Faciliter le démoulage ;
- ✓ Améliorer la résistance au vieillissement ;
- ✓ Modifier la densité du matériau.

## I.5. Structures du composite

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types principaux :

- ✓ Les monocouches ;
- ✓ Les stratifiées ;
- ✓ Les sandwiches.

### I.5.1. Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles 1D, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

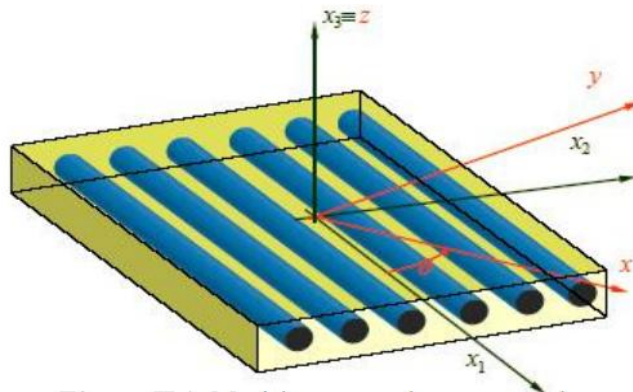
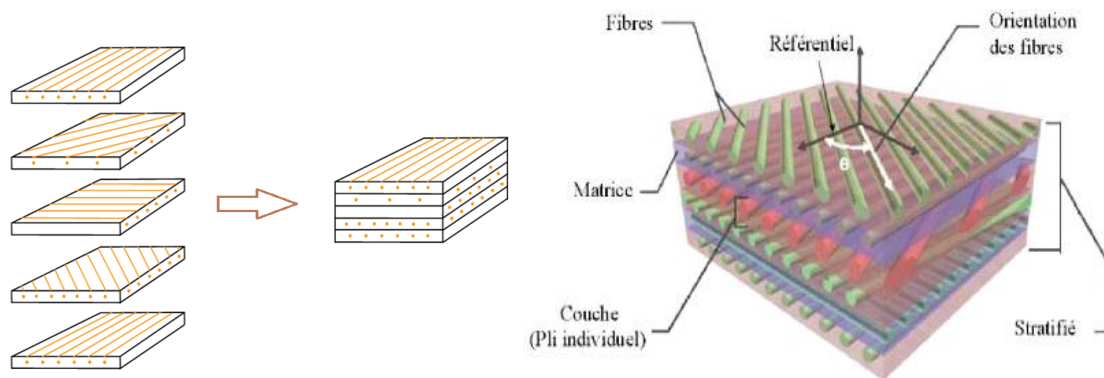


Figure.I.12. composite monocouche



### I.5.2. Les stratifiées



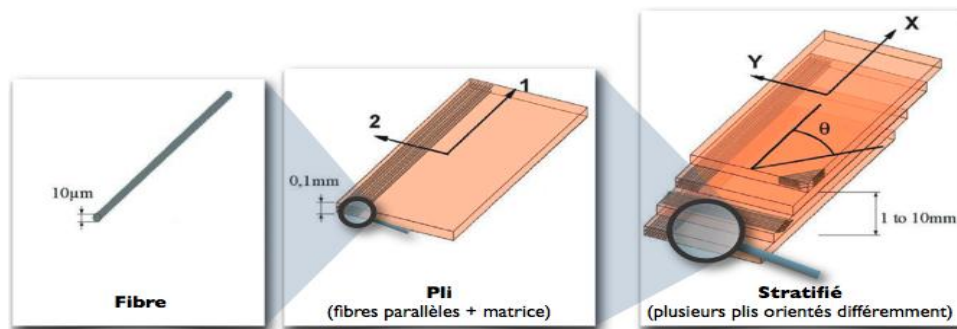
**Figure I.13.** Une plaque stratifiée

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches (figure I.12) ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

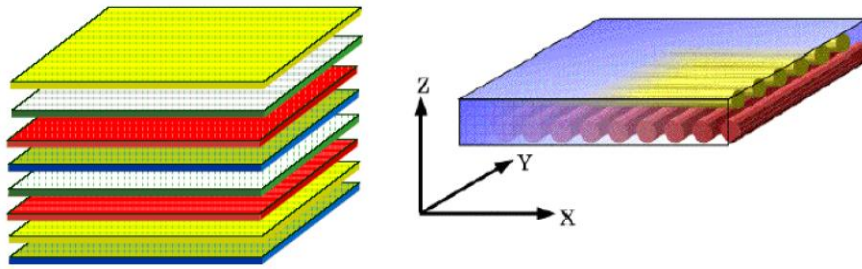
Les stratifiés sont, avec les panneaux sandwich, les matériaux composites qui ont les meilleures performances structurales. L'idée de base est celle de superposer des couches anisotropes, renforcées avec des fibres longues, uni- ou bi- directionnelles, en orientant les couches de sorte à obtenir un matériau final ayant les propriétés souhaitées (figure I.13), en terme de comportement élastique, rigidité, résistance...etc. La conception du matériau devient donc une phase de la conception structurale, leurs qualités est d'être :

- ✓ Hautes performances mécaniques ;
- ✓ Légers.

L'un des avantages des stratifiés est la possibilité d'orienter les fibres selon des directions adaptées aux efforts imposés à la structure. La conception d'une structure stratifiée passe donc par le choix des matériaux, des orientations des fibres et de l'agencement des plis (séquence d'empilement de plis d'inclinaison donnée).



**Figure I.14.** Structure d'un composite stratifié à base de plis unidirectionnels



**Figure I.15.** Matériau composite stratifié.

Le choix de l'empilement est plus particulièrement, des orientations permettront d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques (figures I.14 et I.15).

Un stratifié possédant l'empilement  $(0, +45, 90, -45)$  est un stratifié avec 4 couches dans les directions  $0^\circ$ ,  $+45^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $-45^\circ$ , l'orientation  $0^\circ$  coïncidant avec la direction « 1 » du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié. Il est recommandable que les stratifiés soient :

- ✓ Equilibrés : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientées suivant la direction  $-\theta$  ;
- ✓ Symétriques : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen ;
- ✓ Orthogonales : stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .

### **I.5.2.1. Différents types des stratifiés**

Parmi les stratifiés, on peut citer quatre principaux types :

#### ***I.5.2.1.1. Stratifié Unidirectionnel***

L'orientation des fibres est la même dans tous les plis, ils sont toutes dans la même direction. Exemple: un stratifié unidirectionnel à  $0^\circ$ ,  $\theta=0^\circ$  dans les différents plis.

#### ***I.5.2.1.2. Stratifié à Pli Orienté $\pm\theta$ (angle ply)***

L'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre,  $(+\theta/-\theta/)$ , avec  $\theta$  différent de  $0$  ou de  $90^\circ$ .

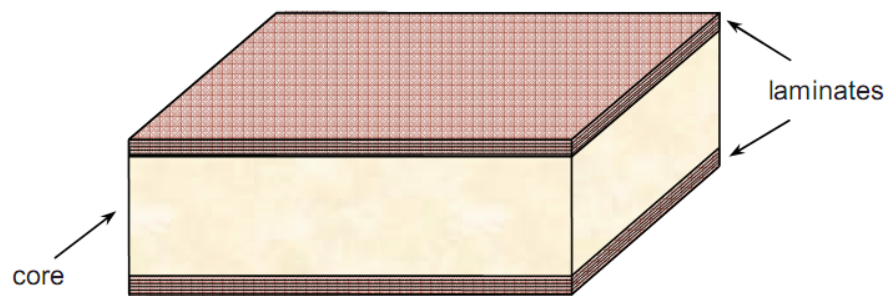
#### ***I.5.2.1.3. Stratifié à Pli Croisé (cross ply)***

L'orientation des fibres est alternée d'un pli à l'autre,  $0/90^\circ/0/90^\circ$ .

#### ***I.5.2.1.4. Stratifié Symétrique***

L'orientation des fibres est symétrique par rapport à la ligne centrale du stratifié, c.à.d. pour chaque pli à angle  $\theta$  au-dessus du plan médian il y a un pli à angle égal de l'autre côté du plan médian,  $\theta(z)=\theta(-z)$  [5].

### I.5.3. Les sandwichs



**Figure.I.16.** Composite sandwich

Les matériaux composites de types sandwichs sont principalement constitués de deux composants nommés : peau et noyau (Figure I.16).

Cette technique consiste à déposer une âme (constituée d'un matériau léger possède de bonnes caractéristiques en compression) entre deux feuilles ou peau.

Les âmes peuvent être pleines (bois, mousse, balsa, structure a nid d'abeille ...etc.) ou creuses (alliages métalliques léger, papier...etc.). Les peaux sont des stratifiés ou des feuilles d'alliages légers. Par ce fait les sandwichs deviennent assez légers et offrent une très grande rigidité en flexion.

## I.6. Autres types de composites

### I.6.1. Composites élastomères



**Figure I.17.** Exemples des composites élastomères

Les composites élastomères sont très répandus dans notre vie courante. En effet, les pneumatiques d'automobile et de cycles, les tuyaux, les courroies, les bateaux pneumatiques, pour ne citer qu'eux, ont des assemblages quelquefois très complexes d'élastomères et d'éléments de renfort.

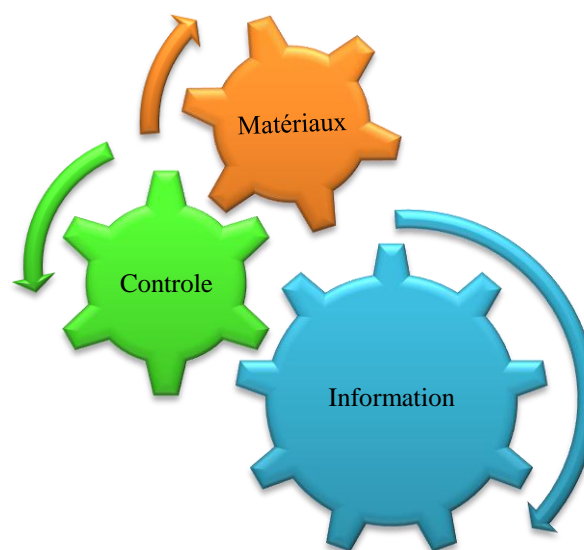
Ces associations ont des propriétés remarquables. Que l'on songe aux efforts subis par les pneumatiques, aux millions de flexions imposées à une courroie (figure I.17) ou aux pressions très élevées exigées dans les tuyaux de freinage, et l'on comprendra la complexité de ces produits. De plus,

certaines d'entre eux sont comptables de notre sécurité. La spécificité de l'industrie du caoutchouc fait que les méthodes de conception et de fabrication de ces produits sont peu connues des ingénieurs d'études. Il est cependant important, sans être un spécialiste, de savoir, au moins superficiellement, comment ces produits sont conçus, fabriqués et testés pour pouvoir cibler les cahiers des charges ou comprendre l'origine d'une défaillance [6].

Les matrices composites habituelles sont composées de résine comportant relativement peu de composants. Ici, la partie élastomère est composée de mélanges qui peuvent avoir plus de vingt ingrédients et sont réalisés avec des moyens très spécifiques. La nature de ces ingrédients et la formulation des mélanges dépend principalement du produit final réalisé : Courroies, pneumatiques, raccords des tuyaux, joints de portes,...etc.

### I.6.2. Composites intelligents

Les matériaux composites intelligents sont en train de s'affirmer comme les matériaux les plus prometteurs du XXI<sup>ème</sup> siècle. Leur étude n'en est qu'à ses débuts. Les matériaux composites sont déjà optimisés par nature de par leur résistance spécifique à la rupture, leur rigidité spécifique, leur résistance à la corrosion. Ils ont de plus des aptitudes exceptionnelles vis-à-vis de l'amortissement. Leur caractéristique la plus particulière est la souplesse de conception des pièces en composites, utilisant pleinement la versatilité des propriétés mécaniques telles que la résistance et le module anisotrope. La mise au point des matériaux composites intelligents consiste à fournir une intelligence active aux matériaux ou à les rendre adaptatifs en utilisant des capteurs et des actionneurs. Les recherches sur les matériaux composites, qui étaient jusqu'ici concentrées sur leurs propriétés et leurs fonctionnalités, font place à une nouvelle approche incluant la notion de système avec l'incorporation d'une combinaison d'informations et de contrôles (figure I.18).



**Figure I.18.** Combinaison de l'information et du contrôle avec les matériaux.

### **I.6.2.1. Définition du concept « technologie intelligente »**

En général, la technologie intelligente pour des matériaux et structures fait appel à l'adaptation des fonctions biologiques, tel que l'autoreproduction, l'autoréparation, autodiagnostic, l'auto-apprentissage ou l'adaptabilité à l'environnement. Autrement dit, trois fonctions majeures doivent être installées dans les matériaux composites et les structures hôtes :

- ✓ Détecter les conditions environnementales avec des fibres optiques ou des dispositifs piézoélectriques,...etc.;
- ✓ Agir pour changer en créant avec des dispositifs piézo-électriques, des fluides électrorhéologiques, des alliages à mémoire de forme,...etc.;
- ✓ Procéder à un contrôle des fonctions pour assurer une réponse optimale grâce à un micro-ordinateur.

Ces trois fonctions correspondent respectivement aux sensations humaines, aux mouvements musculaires et à la fonction du cerveau.

### **I.6.2.2. Utilisation des composites intelligents**

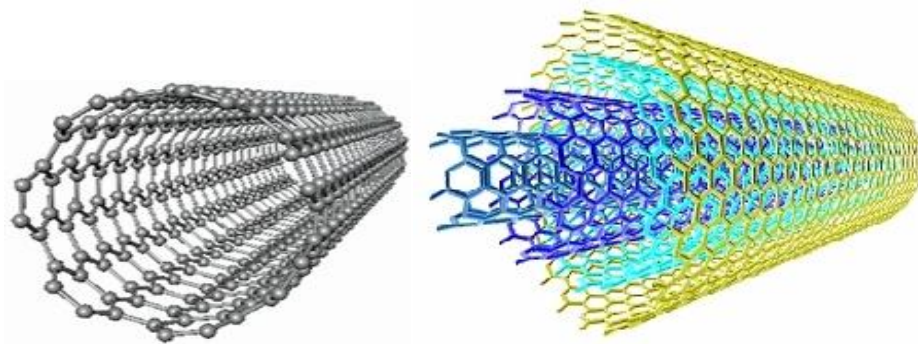
Dans un sens étroit, les matériaux composites intelligents sont considérés comme des structures en matériaux composites équipées de capteurs et d'actionneurs. Dans un sens large, ils peuvent être confondus avec la représentation des structures intelligentes elles-mêmes. La technologie intelligente peut être appliquée non seulement aux matériaux composites mais aussi aux céramiques ou aux alliages, en impliquant des applications potentielles dans l'industrie spatiale et aéronautique, le génie civil et le bâtiment. Les matériaux composites sont intéressants à cause de la mise en forme par moulage de grandes pièces pouvant intégrer en une seule étape la matière première dans les composants aéronautiques et spatiaux. En particulier, les études sur la construction des structures composites intelligentes sont devenues très fructueuses en incorporant des fibres optiques et des capteurs ou des actionneurs, comme des matériaux piézoélectriques, des fluides rhéologiques,...etc., très faciles à introduire dans les stratifiés.

### **I.6.2.3. Le concept de sécurité active dans les composites intelligents**

Selon T.G. Gerardi, l'étude de la sécurité active des avions a été fortement encouragée après l'accident du Boeing 737 de la compagnie Aloha le 28 avril 1988. Lors de l'accident, le plafond de l'avion qui reliait deux îles d'Hawaï s'est déchiré en plein vol. Au cours de fréquents décollages et atterrissages répétés, l'avion très âgé avait subi des endommagements préalables qui étaient passés inaperçus. Le pilote de l'avion a réussi à atterrir en minimisant les dégâts mais n'a pas été informé de la nature de l'incident. Compte tenu du nombre important de vieux avions volant avec des endommagements cachés de fatigue, l'idée du *health monitoring* a beaucoup progressé. Dans ce cas, une solution est de surveiller en temps réel l'endommagement à l'aide de capteurs. Ce concept est

possible grâce à la combinaison de capteurs, d'intelligence artificielle, et d'aide à la décision en temps réel. Gerardi a proposé un avion intelligent, qui est fréquemment cité dans les articles de ce domaine. Il tente de fournir à l'avion un pseudo-système nerveux. L'avion lui-même peut sentir et faire connaître la gravité des endommagements. Le *health monitoring* peut s'appliquer non seulement aux avions mais aussi aux machines et structures qui fonctionnent dans des conditions dangereuses (réacteurs nucléaires, vaisseaux spatiaux, barrages ou autres structures du génie civil). Autrement dit, la technologie intelligente pourra fournir un atout important aux structures de grande taille qui demandent une maintenance et une inspection régulières, ce qui entraîne un grand nombre d'heures de travail et un coût notable [6].

### I.6.3. Les nanocomposites



**Figure I.19.** Représentation graphique d'un nanotube de carbone

Les nanotubes de carbone NTC (figure I.19) ont été considérés comme un excellent candidat pour le renforcement des composites de polymères en raison de leur haute module d'élasticité, la résistance à la traction et de faible densité. Les applications potentielles de polymère/NTC se trouvent dans le domaine de renforcement des composites, structures composites à haute performance et composites multifonctionnels [7-9].

Depuis une dizaine d'années, on a pu assister à un intérêt grandissant pour une nouvelle classe de matériaux renforcés par des particules de taille submicronique, les nanocomposites [10]. La spécificité de ces nouveaux matériaux réside dans le fait qu'au moins une de leur dimension est à l'échelle nanométrique. Dans la vaste famille des nanocomposites, les élastomères renforcés avec du noir de carbone figurent sans contestation parmi les premiers nanocomposites développés par les manufacturiers de pneumatique. Aujourd'hui, les enjeux économiques pour le développement de ces matériaux sont multiples et touchent déjà de nombreux domaines d'application comme celui de la construction, des transports, de l'emballage alimentaire, des articles de sport, du textile, ...etc [11].

## I.7. Procédés de fabrication des structures composites

### I.7.1. Moulage au contact

Consiste à disposition successivement sur un moule (figure I.20) :

- ✓ Un agent de démoulage ;
- ✓ Un gel coat ;
- ✓ Une couche de résines thermodurcissable liquide. et à réaliser l'imprégnation du renfort par une opération manuelle à l'aide d'un rouleau [12].

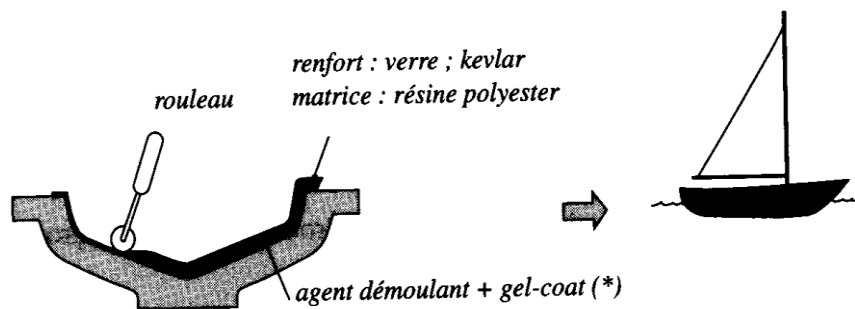


Figure I.20. Exemple d'application : élaboration d'une coque de bateau.

### I.7.2. Moulage par compression

Il s'agit de moulage par compression et les moules sont très proches (figure I.21), par leur conception, de ceux utilisés lors de la mise en œuvre d'autres matières thermodurcissables [13].

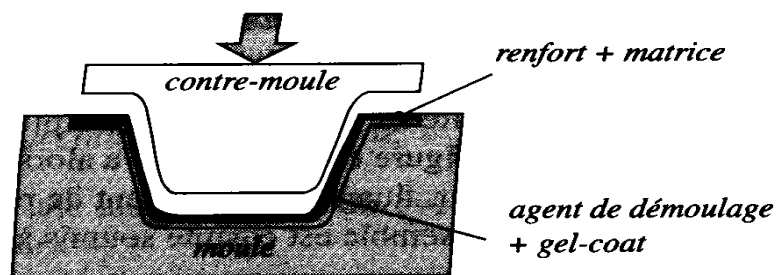


Figure I.21. Moulage par compression

### I.7.3. Moulage sous vide

La polymérisation se fait dans un moule sous vide (figure I.22), avec compression à la pression atmosphérique

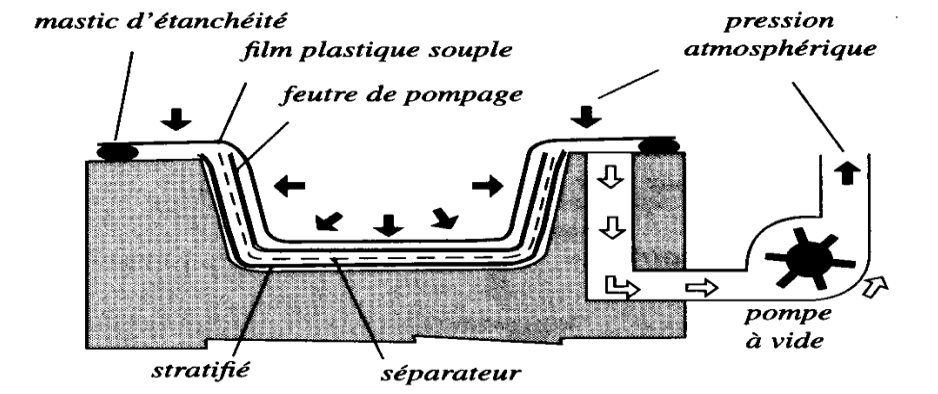


Figure I.22. Moulage sous vide

#### I.7.4. Moulage par injection de mousse

Cette technique permet d'obtenir des pièces de mousse de polyéthane renforcées par des fibres de verre (figure I.23), relativement de grandes dimensions. Ces pièces restent stables dans le temps, présentent de bons états de surface et ont des résistances mécanique et thermiques satisfaisantes [14].

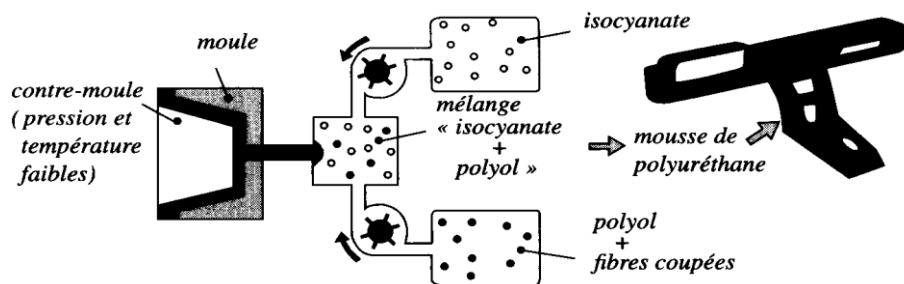


Figure I.23. Moulage par injection de mousse

#### I.7.5. Moulage par injection de pré-imprégné BMC (Injection Molding)

Les renforts sont mis en place entre le moule et le contre moule (figure I.24). La résine est injectée. La pression de moulage est faible [14]

- ✓ Renfort mis à sec dans le moule
- ✓ Injection de résine en pression (avec éventuellement moule sous vide)
- ✓ Polymérisation à froid ou à chaud.
- ✓ Le stratifié est préparé à froid, par superposition des plis pré- imprégnés
- ✓ Le stratifié est mis en autoclave ou dans une presse chauffante
- ✓ Pour polymériser sous pression.



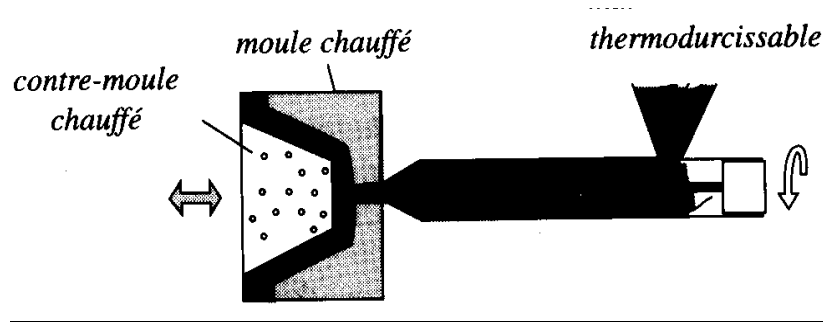


Figure I.24. Moulage par injection de pré-imprégné BMC (Injection Molding)

### I.7.6. Pultrusion

Dans ce cas, les renforts passent dans un bain de résine catalysée où sont imprégnés. Ils traversent ensuite une filière chauffée dans laquelle ont lieu simultanément mise en forme du profilé et polymérisation de la résine (figure I.25). Ce procédé est applicable aux résines thermoplastiques et thermodurcissables [15].

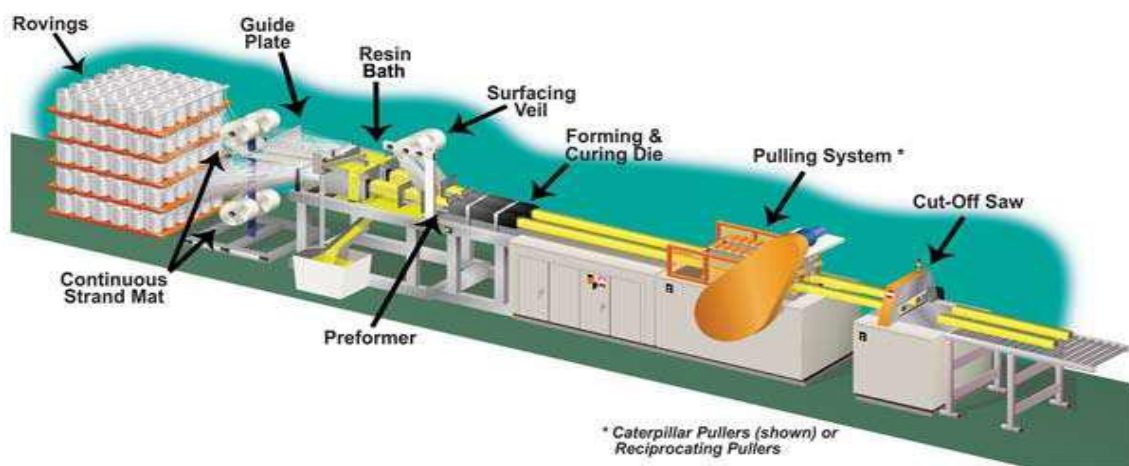


Figure I.25. Schéma présentant le procédé de pultrusion

Cette méthode possède une grande flexibilité dans la gamme de produits fabriqués, par exemple, elle permet la production de tubes, de bandes, de profilés, ou même de plaques d'épaisseurs variables.

Elle consiste en plusieurs étapes :

- ✓ Tension des fibres ;
- ✓ Imprégnation des fibres de résine de faible viscosité ;
- ✓ Passage des fibres par une filière chauffée (entre 100 et 200°C) pour former l'élément souhaité ;
- ✓ L'extension de l'élément par l'extracteur ;
- ✓ La découpe de l'élément.

### I.7.7. Enroulement filamentaire (ou bobinage)

Le renfort imprégné de résine catalysée est enroulé avec une légère tension, sur un mandrin cylindrique ou de révolution en rotation (figure I.26). Ce type de moulage est bien adapté aux surfaces cylindriques et sphériques, et permet une conception avancée des pièces [15].

Technique de réalisation de pièces à symétrie de révolution ou de forme à section convexe :

- ✓ La fibre est pré-imprégnée de résine et ensuite enroulée sur un mandrin qui donne la forme recherchée
- ✓ La polymérisation peut être à froid, à chaud, par rayons UV ...etc.

Technique très employée pour construire des réservoirs en pression.

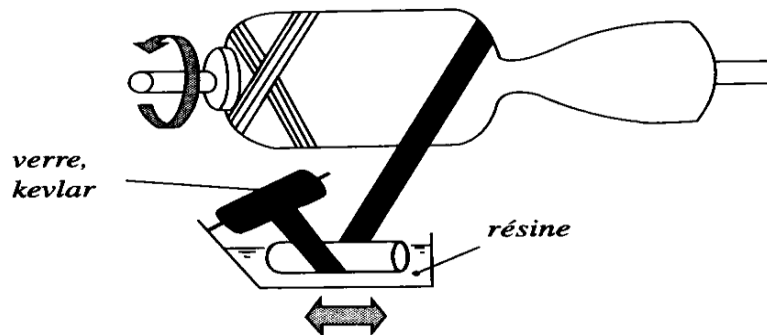


Figure I.26. Enroulement filamentaire

## I.8. Domaines d'application des composites

Les composites entrent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines d'applications possibles : Piscines, bassins, bâtiments, les transports aériens, maritime, routier, ferroviaire, sports, loisirs, ...etc.

### I.8.1. Les composites dans la construction civile

L'utilisation des composites dans la construction civile est un nouveau créneau, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites.

Le handicap majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif.

L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur [16].

Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone la résistance aux séismes.

### **I.8.2. Les composites dans l'automobile**

Les matériaux organiques composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable renforcées par des fibres, généralement de verre, courtes ou longues ont fait leur apparition dans l'automobile durant les années 60-70.

Le secteur de l'automobile utilise pour 95% des composites à matrice polyesters et fibres de verre, mais intègre massivement les composites thermoplastiques depuis 2003.

Les composites apportent au secteur de l'automobile une facilité d'entretien et une grande liberté de conception [17].

Dans l'automobile, le développement à long terme des composites est menacé par la difficulté de les intégrer dans les chaînes de fabrication et par les exigences de recyclage.

A priori, ces matériaux présentent en effet trois handicaps majeurs:

- ✓ Un prix élevé au kilogramme ;
- ✓ Des caractéristiques mécaniques plus faibles ;
- ✓ Des procédés de mise en œuvre souvent lents à l'exception du procédé d'injection.

Pourtant les matériaux composites à matrice organique présentent des avantages importants :

- ✓ Une faible densité ;
- ✓ Des technologies de mise en œuvre par moulage qui limitent la matière engagée dans la filière, offrent la possibilité d'obtenir des pièces de forme complexe et suppriment les usinages de finition.

### **I.8.3. Les composites et la construction électrique**

La consommation massive des composites dans les domaines électrique et électronique, prends de l'ampleur avec l'utilisation importante de l'audiovisuel (TV, microordinateurs, lecteurs DVD...etc.).

En utilisant les propriétés remarquables des matériaux composites, la construction électrique réalise des équipements fiables, aux fonctions multiples et longues durée de vie.

### **I.8.4. Les composites et la construction industrielle**

Le développement des composites TD et TP, avec la possibilité de jouer sur leurs caractéristiques, ont fait que ces matériaux, se sont imposés dans le monde industriel. Les fibres de carbone pourront être utilisées en complément aux fibres de verre à la fois comme renfort et comme capteur, et seront associées à des résines polyesters ou époxy.

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

### **I.8.5. Les composites dans les équipements de sports et loisirs**

Les performances sportives exigent des matériaux performants. Les matériaux composites répondent bien à ces exigences. Les sports et loisirs utilisent des composites HP avec un taux de renforts de plus de 70%. Les sports concernés par ces matériaux sont surtout, le tennis, le ski, les sports nautiques ...etc.

### **I.8.6. Les composites dans la construction nautique**

Dans la construction nautique de plaisance et de pêche, les composites sont indispensables pour les embarcations de taille inférieure à 40 mètres. D'ailleurs c'est le seul domaine exploité en Algérie. Les entreprises étatiques et privées telles que ECOREP, 3S, POLYOR, se sont spécialisées dans la construction des bateaux de pêche et de plaisance. Elles utilisent surtout de la résine polyester et la fibre de verre E.

### **I.8.7. Les composites dans l'aéronautique**

L'aéronautique utilise principalement des composites HP constitués d'une matrice époxy associée à un taux élevé de renforts en fibres de carbone.

L'aéronautique utilise les composites hautes performances pour la fabrication de pièces de structure primaire des appareils en raison de leur légèreté, de leur souplesse de forme et des économies de frais de maintenance qu'ils engendrent.

### **I.8.8. Les composites dans le ferroviaire**

Les matériaux composites sont utilisés dans le domaine ferroviaire pour deux principaux atouts :

- ✓ Un bon comportement au feu ;
- ✓ Un moulage facile des pièces utilisées.

### **I.8.9. Les composites dans le secteur médical**

Il s'agit surtout des composites hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone.

## **I.9. Influence de l'environnement sur le comportement des composites**

Les composites ne plastifient pas. Les composites sont affectés par la chaleur et par l'humidité. Ils ne se corrodent pas sauf en cas de contact entre l'aluminium et les fibres de carbone. Ils sont insensibles aux produits chimiques (graisses, huiles, etc.) et ont une tenue aux impacts et aux chocs inférieure à celle des métaux.

### **I.9.1. La température**

Vis-à-vis de la température, les performances des matériaux composites sont principalement conditionnées par l'adhésif. En revanche, pour une température basse, les performances sont conditionnées par la matrice.

En cas d'incendie, le renforcement par collage extérieur par matériaux composite doit être protégé par une technique d'isolation.

### **I.9.2. L'humidité**

La résine de la matrice absorbe l'eau. La quantité d'eau absorbée dépend du type de résine et de la température de l'eau, donc le comportement réduits.

### **I.9.3. Fluage et corrosion sous contrainte**

Le fluage des composites à fibres de carbone n'est pas un facteur déterminant pour le dimensionnement du renforcement d'éléments structuraux, car les structures renforcées ont généralement déjà subi leur propre fluage.

L'atmosphère ou l'environnement ambiant est en général insuffisant pour causer une corrosion du composite. Néanmoins, il peut y avoir corrosion lorsque le composite est soumis à un certain niveau de contrainte : c'est la corrosion sous contrainte. Ce phénomène est dépendant du temps, du niveau de contrainte, du type de matrice et de fibres. Les fibres de carbone ne sont que très légèrement affectées, lorsque le niveau de contrainte reste inférieur à 80 % de la résistance ultime : les niveaux de sollicitations réels des composites en place sont tels que les risques sont très limités.

## **I.10. Avantages et inconvénients des composites**

Les composites sont préférés à d'autres matériaux parce qu'ils offrent des atouts liés à :

- ✓ Leur légèreté ;
- ✓ Leur résistance à la corrosion et aussi à la fatigue ;
- ✓ Leur insensibilité aux produits comme les graisses, les liquides hydrauliques, les peintures et les solvants ;
- ✓ Leur possibilité de prendre plusieurs formes, d'intégrer des accessoires et permettre la réduction de bruit.

Cependant certains inconvénients freinent leur diffusion :

- ✓ Les coûts des matières premières et des procédés de fabrication;
- ✓ La gestion des déchets engendrés et la réglementation de plus en plus stricte ;

L'industrie des matériaux composites doit donc aujourd'hui relever certains défis tels que :

- ✓ La maîtrise des émanations de produits organiques volatiles, par exemple le styrène;
- ✓ La maîtrise des procédés de transformations et des performances des matériaux qui sous-entend d'une très bonne connaissance des constituants mis en place;

La mise en place de technologies et des filières pour la gestion des déchets en fin de vie qui est la partie la plus difficile à satisfaire en raison du caractère thermostable de la plupart des composites.

De plus, dans ce dernier point, le recyclage est actuellement très limité parce que le broyage ou les autres procédés sont très coûteux et fournissent une matière de faible qualité [18].

## **I.11. Conclusion**

En général, le composite est formulé pour satisfaire à des critères de résistance, de rigidité ou bien de tenue à l'action de l'environnement. Les propriétés finales dépendent des propriétés élémentaires de chaque constituant.

On a vu dans ce chapitre tout ce qui concerne les matériaux composites, leur domaine d'application (aéronautique, construction,...etc.), leurs avantages (grande rigidité, résistance à la corrosion, isolation thermique et phonique...etc.) et leurs inconvénients (mauvaise tenue à la chaleur, sensibilité de ces matériaux aux impacts...etc.), leurs caractéristiques mécaniques.

L'utilisation des composites dans le domaine de construction montre que c'est une excellente alternative aux solutions traditionnelles.

Dans le chapitre suivant nous allons voir les différentes hypothèses des théories des plaques.

**CHAPITRE II :**

**INVESTIGATION SUR**

**LES DIFFÉRENTES THÉORIES DES**

**PLAQUES**

## II.1. Introduction

Les plaques composites stratifiées sont largement utilisés dans l'industrie et les nouveaux domaines de la technologie, où ils représentent une partie essentielle de la construction civile, militaire, aérospatiale, marine et automobile. Ces composants structurels, dans de nombreux cas, sont soumis à des différents types de chargements. Il est maintenant bien connu que, pour l'analyse de la stabilité des plaques, les effets de déformation de cisaillement sont importants en particulier pour les plaques épaisses ou même pour les plaques minces.

Dans ce chapitre on va présenter les théories les plus utilisés qui décrivent le comportement des plaques stratifiées en matériaux composites, où on va suivre l'évolution de ces théories en illustrant les principes, les applications et l'insuffisance de chaque théorie.

## II.2. Description des plaques

A côté des structures linéaires (poutres et cadres) où une dimension domine les deux autres, on rencontre fréquemment, dans la construction, des structures qui s'étendent sur une surface plane ou courbe (structures bidimensionnelles). Dans ce cas, deux dimensions dominent la troisième (l'épaisseur). Si la surface est courbe, on parle de coque ou de coupole.

Si la surface est plane, on doit distinguer entre :

- ✓ Les voiles plans ou les charges agissant essentiellement dans le plan du voile ;
- ✓ Les dalles, où les charges agissent essentiellement perpendiculairement à la surface.

Ce type de structures est rencontré très fréquemment dans la construction. Dans le bâtiment, cette forme de structure est même prédominante.

## II.3. Les hypothèses fondamentales de la théorie des poutres et des plaques

### II.3.1. Principe de Saint venant

Le principe de saint venant s'énonce : La contrainte en un point éloigné des points d'application d'un système des forces ne dépend que de la résultante générale et du moment résultant de ce système des forces, même si la répartition des contraintes n'est pas la même, la solution trouvée sera valable, si on place les charges suffisamment loin du point d'application.

### II.3.2. Principe de Navier Bernoulli généralisé

L'hypothèse de Navier Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre ou des plaques. Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues aux moments fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure où l'effort tranchant est nul .Par contre, dans le cas de la flexion simple avec effort



tranchant, les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme de lettre S très comprimée. De même lorsque nous étudions la torsion, nous verrons qu'une section non circulaire, ayant deux axes de symétrie, tient sous l'effet d'un couple de torsion, un gauchissement radial. Le principe de Navier Bernoulli est fondé sur les observations suivantes:

- ✓ Le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section ;
- ✓ La variation du gauchissement, lorsqu'on passe d'une section à une section infiniment voisine, est toujours très petite, non seulement vis-à-vis de la distance des deux sections infiniment voisines.

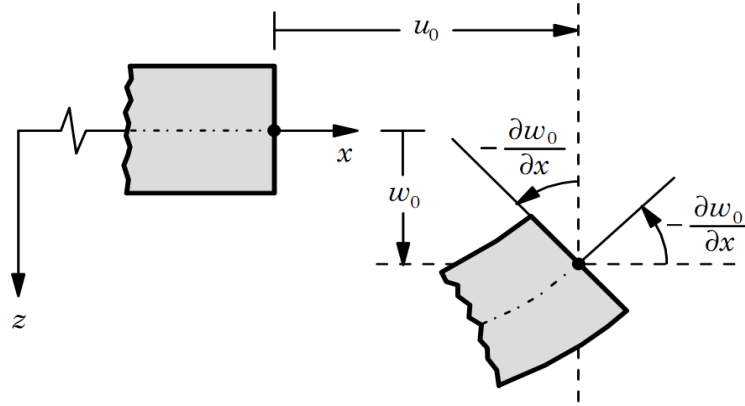
Le principe de Navier Bernoulli revient à négliger le cisaillement et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre ou de plaque.

La théorie la plus ancienne est celle de Kirchhoff [19] qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre communément associée à Mindlin [20] et Reissner [21], qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Elle conduit, par l'hypothèse des « sections droites restent droites » à un vecteur des contraintes de cisaillement transverse constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion. Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du cisaillement transverse  $\gamma$  sont introduits. Les éléments finis formulés en déplacement basés sur la théorie du premier ordre donnent généralement de bons résultats pour les structures isotropes et orthotropes. Ils deviennent peu précis une fois appliqués aux matériaux composites contenant plusieurs couches avec une anisotropie très différente d'une couche à une autre [22], auquel cas il faudrait imposer des conditions de continuité sur les interfaces. Certes, les facteurs de correction du cisaillement transverse, une fois introduits dans les modèles du 1<sup>er</sup> ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluations dépend malheureusement du nombre de stratifications. Pour écarter à jamais ce type de problème, des théories d'ordre élevé ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney, qui a supposé un champ de déplacement d'ordre élevé à 3. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique; elle exige en effet un grand nombre de paramètres [23].

#### **II.4. La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (Classical Laminated Plate Theory CLPT)**

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène

isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement ( $L/h$ ). La théorie CLPT (Classical laminated plate theory) se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love Kirchhoff [24], selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse [25].



**Figure II.1.** Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$u_0$  et  $v_0$  : Les déplacements de membrane dans les direction  $x$  et  $y$ , respectivement,

$w_0$  : La flèche de la plaque,

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$  et  $\frac{\partial w_0}{\partial y}$  : Les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

Le plan principal de la plaque est le plan  $(o, x, y)$  et l'épaisseur est orienté selon l'axe  $z \in [-h/2; h/2]$ .

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

## II.5. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (First Order Shear Deformation Theory FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans [21 et 20] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que [26 et 27].

L'hypothèse cinématique de Mindlin est la suivante :

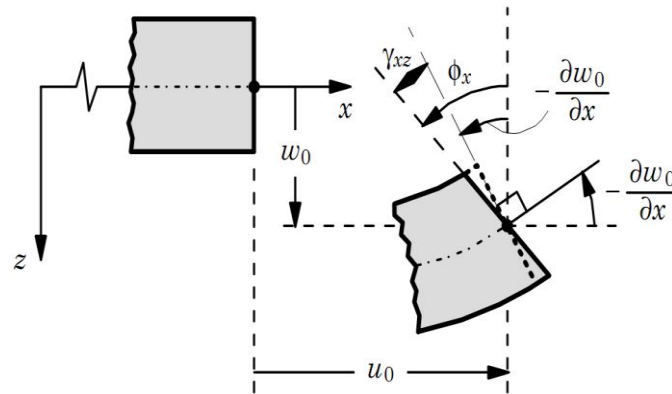
La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure II.2).

Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec :

$\phi_x$  et  $\phi_y$  : Les rotations de la normale au plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$ .



**Figure II.2.** Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement,  $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ ,  $\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$ .

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

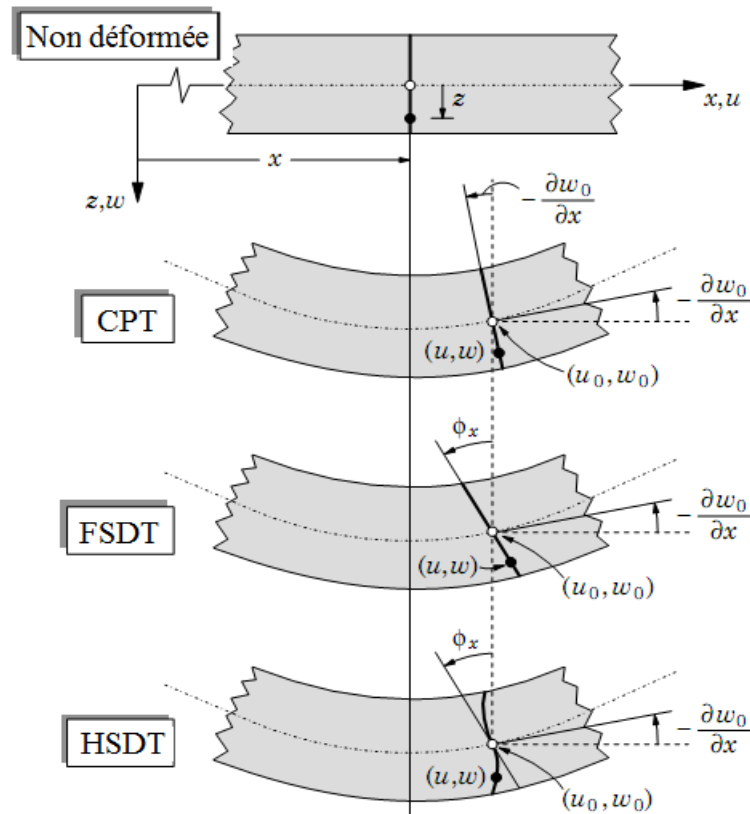
Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales  $\gamma_\alpha^0$  sont constantes en « z ». Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [28]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

## II.6. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (Higher Order Shear Deformation Theory HSDT)

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques épaisses ou poutres courtes, où la déformation transverse joue un rôle prédominant. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur (figure II.3). Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [29-32].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$



**Figure II.3.** Description de la déformation d'une plaque selon les théories : classique (CLPT), premier ordre (FSDT) et d'ordre élevé (HSDT)

En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CLPT) est obtenue en prenant  $f(z)=0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $f(z)=z$ .

## II.7. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordres élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.3) [28], [33-35].

Nous citons en particulier :

L'approche d'Ambartsumyan [36] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \tag{II.4}$$

L'approche de Reissner [21], Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.5})$$

L'approche de Levinson, Murthy [26 et 27] et [37] avec :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant [31]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène [38].

La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier [35] avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.7})$$

Touratier propose le modèle "sinus" (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur.

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre.

Récemment, Afaq et al, proposent un modèle exponentiel (ESDPT) avec une cinématique plus riche [39]. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme suivante:

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.8})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable «  $z$  », alors que la fonction (sinus) [35] ne permet qu'un développement en puissance impair.

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [40] est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh(\frac{\pi}{h} z)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad \text{Et} \quad \varphi_z = 0 \quad (\text{II.9})$$

## II.8. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre zéro (Zeroth Order Shear Deformation Theory ZSDT)

En plus de la théorie d'ordre élevé, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement à été utilisée pour décrire le comportement des plaques stratifiées en matériaux composites, la théorie de déformation de cisaillement d'ordre zéro (ZSDT) a été proposée pour la première fois par Shimpi [41] et Ray [42], la théorie d'ordre zéro tient en compte l'effet de cisaillement sans l'introduction de facteurs de correction de cisaillement en gardant un niveau minimum de complexité pour obtenir la solution.

Le champ de déplacement de la théorie ZSDT est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_x} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_x \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\lambda_y} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_y \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{array} \right. \quad (\text{II.10})$$

Ou :

$Q_x$  et  $Q_y$  sont des résultantes des contraintes transversales de cisaillement.

$\lambda_x$  et  $\lambda_y$  sont des constantes qui peuvent être déterminés en considérant la définition des résultantes  $Q_x$  et  $Q_y$  .

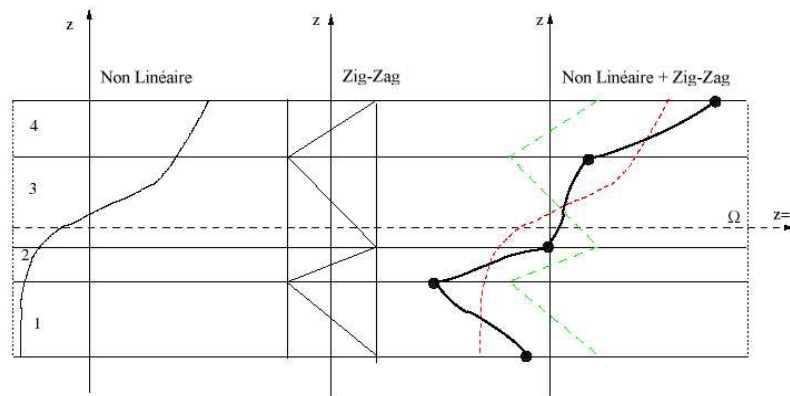
$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (\text{II.11})$$

## II.9. Théorie de zig-zag

Pour mieux décrire la déformation en cisaillement des matériaux composites, certains auteurs ont associé la théorie d'ordre élevé à celle dite de zig-zag [43 et 44], Cette dernière est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre élevé. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et elle est indépendante du nombre de couches. L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant

le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de Di Sciuva [45], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [46-50]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) figure II.4.

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres [51].



**Figure II.4.** Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

## II.10. Application de la théorie d'ordre élevé pour des structures composites

Les théories d'ordre élevé envisagées par certains auteurs sont applicables à certains types de problèmes (statique, dynamique, flambement,...). La performance d'un élément fini est liée à la théorie utilisée. La théorie d'ordre élevé se distingue par son ordre polynomial, son nombre de coefficients ou de paramètres qu'elle engendre et le type d'élément qu'elle utilise. Kapania et Raciti [52] ont fourni une synthèse détaillée des théories de déformation de cisaillement utilisées dans la statique, vibration et l'analyse de flambement des poutres et des plaques composites. Sunôes [51] a proposé un élément quadrilatère à 9 nœuds et 10 degrés de liberté par nœuds. Les champs déplacements « u » et « v » sont cubiques par rapport à l'épaisseur et « w » est constant. Il est particulièrement efficace pour calculer le flambage des plaques épaisses et minces. Le nombre de paramètres étant important, rend le calcul assez lourd. Kant et al [53], ont développé un élément basé sur la théorie d'ordre élevé raffinée (surtout sur les plaques sandwich). Ils ont défini un champ de déplacement de telle façon que « u, v, w » soient cubiques par rapport à l'épaisseur. Chaque ensemble de deux couches successives est divisé en un certain nombre de sous-couches pour améliorer l'état de contrainte de cisaillement et avoir une



continuité aux interfaces. Patel et al [54] ont traité une structure de coque assez compliquée géométriquement au 3<sup>ème</sup> ordre, afin d'améliorer l'état de déformation. Ils ont introduit l'effet de zig-zag qui assure la continuité sur les interfaces (le nombre de paramètres augmente avec le nombre de couches). Zen Wu et al [55], ont proposé une théorie intéressante du point de vue résultats sur les contraintes. Celle-ci assure la continuité sur les interfaces et les conditions nulles (en bas et en haut). Elle définit sur chaque couche un champ de déplacement différent et utilise 11 degrés de libertés par nœud. Elle est communément appelée « High ordre shear refined theory ». Daouadji et al [56-60] ont utilisé des théories d'ordre élevés pour étudier le comportement des structures (poutres et plaques) en matériaux composites et en matériaux FGM.

Toutes ces théories sont très intéressantes, d'une part pour traiter le problème de discontinuité des contraintes sur les interfaces et, d'autre part pour éviter l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants. Le seul reproche à faire à ce type de théories est qu'elles sont gourmandes en temps de calcul [61].

## II.11. Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques pour simplifier les problèmes rencontrés, une comparaison des théories classiques, du premier ordre et d'ordre élevé a été faite pour décrire la déformation de cisaillement des plaques.

Il est à noter qu'il existe d'autres théories issues de ces théories mentionnées dans ce chapitre qui donnent des résultats acceptables dans certains cas. Ainsi, on s'est intéressées par les théories les plus utilisés dans la littérature.

En général, il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite anisotrope, isotrope, stratifié, sandwich ...etc) et aux différents phénomènes étudiés (statique, dynamique, flambement, ...etc), et qui serait en plus simple et facile et ne coûte pas trop en temps de calcul, car chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formulations qui diffèrent selon le domaine d'application.

Le chapitre suivant fera l'objet de l'utilisation d'une nouvelle théorie raffinée d'ordre élevé pour l'analyse de flambement et la vibration libre des plaques en matériaux composites.

## **CHAPITRE III :**

# **ÉTUDE DE LA STABILITÉ AU FLAMBEMENT ET À LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES STRATIFIÉES EN MATÉRIAUX COMPOSITES**

### III.1. Introduction

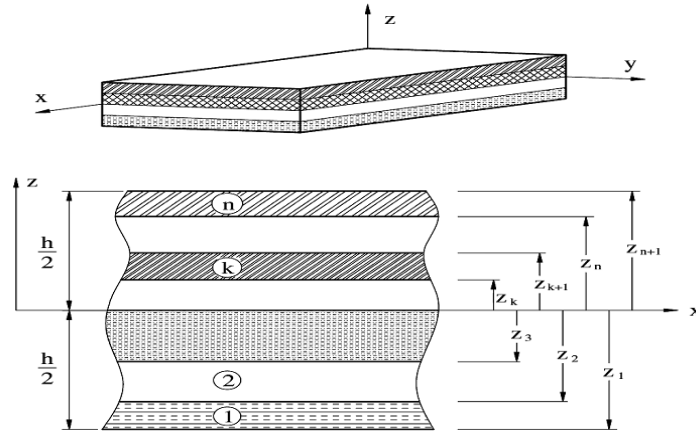
Dans ce chapitre on va présenter une étude analytique sur la stabilité au flambement mécanique et à la vibration libre des plaques stratifiées en matériaux composites soumises à des charges mécaniques axiales et biaxiales sous différentes conditions aux limites. Nous allons proposer une formulation analytique, ensuite, nous allons déduire les expressions mathématiques pour déduire la charge critique de flambement et les fréquences naturelles en utilisant une fonction raffinée de cisaillement de quatre variables qui vérifie la nullité des contraintes de cisaillement aux bords supérieur et inférieur de la plaque sans l'aide des coefficients de correction de cisaillement, ensuite, on va comparer les résultats obtenus par la présente théorie avec celles des différentes théories des plaques existantes dans la littérature à savoir : la théorie classique (CLPT) qui néglige complètement l'effet de cisaillement, la théorie de premier ordre (FSDT) qui prend en compte l'effet de cisaillement transverse mais elle n'assure pas la nullité des contraintes de cisaillement dans les bords supérieur et inférieur de la plaque ce que nécessite l'introduction des facteurs de correction de cisaillement et la théorie d'ordre élevé (Reddy, Karama et Swaminathan) qui tient en compte l'effet de cisaillement mais en utilisant cinq variables. Les équations d'équilibre sont obtenues en appliquant le principe d'Hamilton. Les expressions mathématiques sont obtenues en utilisant la solution de Navier pour le cas des plaques simplement appuyées et la solution exacte pour les différentes conditions aux limites.

### III.2. La théorie d'ordre élevé à quatre variables

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues impliquées dans la présente théorie de déformation de cisaillement à ordre élevé [62-66] n'est que de quatre ( $u_0, v_0, w_b$  et  $w_s$ ), contre cinq ( $u_0, v_0, w_0, \theta_x$  et  $\theta_y$ ) dans le cas d'autres théories de déformation de cisaillement [31], [35] et [39]. La théorie présentée ne nécessite pas l'introduction de coefficients correcteurs pour le calcul des contraintes de cisaillement transverse et prend en compte leur distribution parabolique à travers l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la plaque.

### III.3. Les hypothèses de la présente théorie

Considérons une plaque rectangulaire de longueur « a », de largeur « b » et d'épaisseur total « h » composée de  $n_p$  couches orthotropes avec le système de coordonnées comme le montre la figure III.1.



**Figure III.1.** Une plaque stratifiée en matériaux composites avec un système de coordonnées  $(x, y, z)$ .

- ✓ La déformation transversale  $\varepsilon_z$  et la contrainte transversale normale  $\sigma_z$  sont négligées.
- ✓ Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes : à la flexion  $w_b$  et au cisaillement  $w_s$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{III.1})$$

- ✓ Les déplacements  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction  $y$  sont les composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_b + u_s \\ v &= v_0 + v_b + v_s \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

- ✓ Les composantes de flexion sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques CLPT. Par conséquent, l'expression peut être donnée comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (\text{III.3a})$$

$$v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.3b})$$

- ✓ Les composantes de cisaillement  $u_s$  et  $v_s$  donnent lieu, en combinaison avec  $w_s$ , à la variation parabolique de déformations en cisaillement  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  et donc à des contraintes de cisaillement  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  à travers l'épaisseur de la plaque de telle manière que les contraintes de cisaillement sont égales à zéro au niveau des faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, les expressions peuvent être données comme suit :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.4a})$$

$$v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.4b})$$

### III.4. Cinématiques

Sur la base des hypothèses formulées dans le paragraphe précédent, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations. (III.1) à (III.4) comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (III.5a)$$

Où

$$f(z) = z \left[ 1 + \frac{3\pi}{2} \sec^2 h^2 \left( \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left( \frac{z}{h} \right) \quad (III.5b)$$

Et 
$$g(z) = 1 - \frac{d(f)}{d(z)} \quad (III.5c)$$

$f(z)$  : est la fonction de cisaillement.

Les déformations sont calculées en dérivants l'équation (III.5a) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^b + fk_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y^b + fk_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + fk_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g\gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g\gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (III.6a)$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (III.6b)$$

### III.5. Equations constitutives

Sous l'hypothèse que chaque couche possède un plan de symétrie élastique parallèle au plan (x, y), les équations constitutives pour une couche peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7a})$$

Où  $Q_{ij}$  sont les rigidités de la couche considérée :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13} \quad (\text{III.7b})$$

Etant donné que le stratifié est composé de plusieurs couches orthotropes orientés de manière arbitraire par rapport aux coordonnées principales du stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées en coordonnées du stratifié (x, y). Les relations contrainte-déformation dans les coordonnées du stratifié de la  $k^{\text{ème}}$  couche sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (\text{III.8})$$

Où les rigidités  $\bar{Q}_{ij}$  sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= [(Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)] \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

### III.6. Equations gouvernantes

Les équations de mouvement son obtenus en utilisant le principe d'Hamilton qui est donné par :

$$\int_0^t \delta(U + V - T) dt = 0 \quad (\text{III.10})$$

Où, l'énergie de déformation de la plaque est donnée par

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (\text{III.11})$$

Substituant les équations (III.6) et (III.8) dans l'équation (III.11) et intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque devient :

$$U = \frac{1}{2} \int_A (N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s) dx dy = 0 \quad (\text{III.12})$$

D'où les efforts normaux  $N$  et les moments résultants  $M^b$ ,  $M^s$  et  $Q^s$  sont définies par :

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f(z) dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f(z) dz \\ (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g(z) dz = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Substituant l'équation (III.8) dans l'équation (III.13) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & A_{45}^s \\ A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.15a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.15b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.15c})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & B_{16}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & B_{26}^s \\ B_{16}^s & B_{26}^s & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & D_{16}^s \\ D_{12}^s & D_{22}^s & D_{26}^s \\ D_{16}^s & D_{26}^s & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & H_{16}^s \\ H_{12}^s & H_{22}^s & H_{26}^s \\ H_{16}^s & H_{26}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.15d})$$

Où Les composantes de rigidité  $A_{ij}, B_{ij}, \dots$  etc , sont définis comme :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s) = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (i, j) = (1, 2, 6) \quad (\text{III.16a})$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}[g(z)]^2 dz \quad (i, j) = (4, 5) \quad (\text{III.16b})$$

L'énergie due aux charges extérieures peut s'écrire comme :

$$V = \frac{1}{2} \int_A \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (\text{III.17})$$

Ou  $N_x^0, N_y^0$  et  $N_{xy}^0$  sont les charges de flambement.

L'énergie cinétique de la plaque est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^t \int_V \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV dt = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dV$$

$$T = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \delta u_0 \left( I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} w - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \right) + \delta v_0 \left( I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \right) \right. \quad (\text{III.18})$$

$$+ \delta w_b \left[ I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$\left. + \delta w_s \left[ I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_4 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \right] \right\} dx dy$$

Ou  $\rho$  est la masse volumique de la plaque et  $I_i$  sont les inerties définis par :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \sum_{k=1}^{n_p} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \rho (1, z, z^2, f(z), z f(z), [f(z)]^2) dz \quad (\text{III.19})$$

Substituant les équations (III.12), (III.17) et (III.18) dans l'équation (III.10) et intégrant par partie, mettant les coefficients ( $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$  et  $\delta w_s$ ) nuls séparément on obtient les équations d'équilibres suivants :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (\text{III.20a})$$



$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \quad (\text{III.20b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \hat{N} &= I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ + I_2 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.20c})$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} + \hat{N} &= I_1 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \\ + I_4 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.20d})$$

Avec

$$\hat{N} = \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right], N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}, N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}, N_{xy}^0 = 0 \quad (\text{III.21})$$

Les équations (III.20) peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_b$  et  $\delta w_s$ ) en substituant l'équation (III.14) dans (III.20) :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - 3B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = I_1 \ddot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{III.22a})$$

$$\begin{aligned} A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ - B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ - B_{16}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = I_1 \ddot{v}_0 - I_2 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.22b})$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
 & + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
 & - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
 & - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 4D_{16}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + \hat{N} \\
 & = I_1(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_2 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{III.22c}$$

$$\begin{aligned}
 & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \\
 & + B_{16}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
 & - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \\
 & - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 4H_{16}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^3 \partial y} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - 4H_{26}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x \partial y^3} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
 & + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + 2A_{45}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + \hat{N} \\
 & = I_1(\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_4 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{III.22d}$$

## III.7. Solution de Navier des plaques stratifiées simplement appuyées

### III.7.1. Cas des stratifiées à plis croisés (0/90) (cross-ply)

Les solutions de Navier peuvent être développés pour les stratifiés rectangulaires avec deux ensembles de conditions aux limites simplement appuyés, pour les stratifiées antisymétriques à plis croisés (cross-ply). Les rigidités de la plaque suivantes sont nulles.

$$\begin{aligned}
 A_{16} &= A_{26} = D_{16} = D_{26} = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = 0 \\
 B_{12} &= B_{26} = B_{16} = B_{66} = B_{12}^s = B_{16}^s = B_{26}^s = B_{66}^s = A_{45}^s = 0 \\
 B_{22} &= -B_{11}, B_{22}^s = -B_{11}^s
 \end{aligned} \tag{III.23}$$

Où les conditions aux limites peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned}
 v(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) &= \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \\
 v(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) &= \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \\
 N_x(0, y) = M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) &= N_x(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \\
 u(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) &= \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \\
 u(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) &= \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \\
 N_y(x, 0) = M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) &= N_y(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0
 \end{aligned} \tag{III.24}$$

Les conditions aux limites en équation (III.24) sont satisfaites par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\
 v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\
 w_b(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\
 w_s(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{III.25}$$

Où :  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$  et  $W_{smn}$ , sont des paramètres arbitraires à déterminer et  $\omega$  est la fréquence propre associée au  $(m, n)$  n<sup>ème</sup> mode de vibration, et  $\alpha = m\pi/a$  et  $\beta = n\pi/b$ .

Remplaçant les équations (III.23 et III.25) dans l'équation (III.22), la solution de Navier des stratifiées antisymétriques croisés peut être déterminée à partir de l'équation suivante :

$$\left( \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} + K & s_{34} + K \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} + K & s_{44} + K \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & ms_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.26}$$

Où :

$$s_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, \quad s_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \quad s_{13} = -B_{11}\alpha^3, \quad s_{14} = -B_{11}^s\alpha^3 \tag{III.27a}$$

$$s_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2, \quad s_{23} = B_{11}\beta^3, \quad s_{24} = B_{11}^s\beta^3 \tag{III.27b}$$

$$s_{33} = D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \tag{III.27c}$$

$$s_{34} = D_{11}^s\alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha^2\beta^2 + D_{22}^s\beta^4 \tag{III.27d}$$

$$s_{44} = H_{11}^s \alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \alpha^2 \beta^2 + H_{22}^s \beta^4 + A_{55}^s \alpha^2 + A_{44}^s \beta^2 \quad (\text{III.27e})$$

$$m_{11} = m_{22} = I_1, \quad m_{33} = I_1 + I_3(\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{III.27f})$$

$$m_{34} = I_1 + I_5(\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{44} = I_1 + I_6(\alpha^2 + \beta^2), \quad K = N_{cr}(\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2) \quad (\text{III.27g})$$

### III.7.2. Cas des stratifiées à plis alternées et équilibrés ( $\theta^\circ / -\theta^\circ$ ) (angle-ply)

Pour les stratifiées antisymétriques alternées et équilibrés (angle-ply), les rigidités suivantes de la plaque sont nulles :

$$\begin{aligned} A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = D_{16}^s = D_{26}^s = H_{16}^s = H_{26}^s = 0 \\ B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = B_{11}^s = B_{12}^s = B_{22}^s = B_{66}^s = A_{45}^s = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Les conditions aux limites suivantes pour les stratifiées antisymétriques alternées et équilibrés peuvent être écrites comme :

$$\begin{aligned} u(0, y) = w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0 \\ u(a, y) = w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_b}{\partial y}(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0 \\ N_{xy}(0, y) = M_x^b(0, y) = M_x^s(0, y) = N_{xy}(a, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0 \\ v(x, 0) = w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0 \\ v(x, b) = w_b(x, b) = w_s(x, b) = \frac{\partial w_b}{\partial x}(x, b) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, b) = 0 \\ N_{xy}(x, 0) = M_y^b(x, 0) = M_y^s(x, 0) = N_{xy}(x, b) = M_y^b(x, b) = M_y^s(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Les conditions aux limites en équation (III.29) sont satisfaites par les expressions suivantes

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ v_0(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ w_b(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ w_s(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Remplaçant les équations (III.28 et III.30) en équation (III.22), l'équation (III.26) peut être résolue en utilisant les coefficients suivants :

$$s_{11} = A_{11} \alpha^2 + A_{66} \beta^2, \quad s_{12} = \alpha \beta (A_{12} + A_{66}), \quad s_{13} = -(3B_{16} \alpha^2 \beta + B_{26} \beta^3) \quad (\text{III.31a})$$

$$s_{14} = -(3B_{16}^s \alpha^2 \beta + B_{26}^s \beta^3), \quad s_{22} = A_{66} \alpha^2 + A_{22} \beta^2, \quad s_{23} = -(B_{16} \alpha^3 + 3B_{26} \alpha \beta^2) \quad (\text{III.31b})$$

$$s_{24} = -(B_{16}^s \alpha^3 + 3B_{26}^s \alpha \beta^2), \quad s_{33} = D_{11} \alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha^2 \beta^2 + D_{22} \beta^4 \quad (\text{III.31c})$$

$$s_{34} = D_{11}^s \alpha^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \alpha^2 \beta^2 + D_{22}^s \beta^4 \quad (\text{III.31d})$$

$$s_{44} = H_{11}^s \alpha^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \alpha^2 \beta^2 + H_{22}^s \beta^4 + A_{55}^s \alpha^2 + A_{44}^s \beta^2 \quad (\text{III.31e})$$

$$m_{11} = m_{22} = I_1, \quad m_{33} = I_1 + I_3 (\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{III.31f})$$

$$m_{34} = I_1 + I_5 (\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{44} = I_1 + I_6 (\alpha^2 + \beta^2), \quad K = N_{cr} (\gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2) \quad (\text{III.31g})$$

### III.8. Solution exacte des plaques stratifiées croisés (cross-ply) sous divers conditions aux limites

Pour les stratifiées antisymétriques croisés (cross-ply), les rigidités nulles de la plaque sont mentionnés dans l'équation (III.23)

La solution exacte des équations (III.22) pour les plaques antisymétriques stratifiées croisés (cross-ply) sous diverses conditions aux limites peut être donnée selon [67, 68]. Où les conditions aux limites suivantes sont satisfaites pour une appuie simple et encastrée :

- encastrée (C)

$$u = v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{à } x = 0, a \text{ et } y = 0, b \quad (\text{III.32})$$

- Simple (S)

$$v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{à } x = 0, a \quad (\text{III.33a})$$

$$u = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{à } y = 0, b \quad (\text{III.33b})$$

Les conditions aux limites des équations (III.32) and (III.33) sont satisfaites dans les expressions suivantes [69] :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U_{mn} X'_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \\ v(x, y, t) &= V_{mn} X_m(x) Y'_n(y) e^{i\omega t} \\ w_b(x, y, t) &= W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \\ w_s(x, y, t) &= W_{smn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Où les fonctions  $X_m(x)$  and  $Y_n(y)$  sont proposées ici pour satisfaire au moins les conditions aux limites géométriques données dans les équations (III.32) et (III.33) et représentent des formes approximatives de la surface déviée de la plaque. Ces fonctions, pour les différents cas de conditions aux limites sont données dans le tableau III.1 :

**Tableau III.1.** Les fonctions admissibles  $X_m(x)$  et  $Y_n(y)$

	Conditions aux limites		Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$	
	à $x=0, a$	à $y=0, b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
SSSS	$X_m(0) = X_m''(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\alpha x)$	$\sin(\beta y)$
CSSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\alpha x)[\cos(\alpha x) - 1]$	$\sin(\beta y)$
CSCS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin(\alpha x)[\cos(\alpha x) - 1]$	$\sin(\beta y)[\cos(\beta y) - 1]$
CCSS	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n''(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n''(b) = 0$	$\sin^2(\alpha x)$	$\sin(\beta y)$
CCCC	$X_m(0) = X_m'(0) = 0$ $X_m(a) = X_m'(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$	$\sin^2(\alpha x)$	$\sin^2(\beta y)$
FFCC	$X_m''(0) = X_m'''(0) = 0$ $X_m''(a) = X_m'''(a) = 0$	$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0$ $Y_n(b) = Y_n'(b) = 0$	$\cos^2(\alpha x)[\sin^2(\alpha x) + 1]$	$\sin^2(\beta y)$

( ) Désigne la dérivée en respectant la coordonnée correspondante.

Substituant les équations (III.34) et (III.23) dans (III.22), l'équation (III.26) peut être résolue en remplaçant les coefficients de l'équation (III.27) par celles données dans l'équation (III.35) :

$$s_{11} = \int_0^a \int_0^b (A_{11} X_m''' Y_n + A_{66} X_m' Y_n'') X_m' Y_n'' dx dy \quad (III.35a)$$

$$s_{12} = \int_0^a \int_0^b (A_{12} + A_{66}) X_m' Y_n'' X_m' Y_n'' dx dy \quad (III.35b)$$

$$s_{13} = - \int_0^a \int_0^b [B_{11} X_m'' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m' Y_n''] X_m' Y_n'' dx dy \quad (III.35c)$$

$$s_{14} = - \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m'' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m' Y_n''] X_m' Y_n'' dx dy \quad (III.35d)$$

$$s_{21} = \int_0^a \int_0^b (A_{12} + A_{66}) X_m'' Y_n' X_m' Y_n' dx dy \quad (\text{III.35e})$$

$$s_{22} = \int_0^a \int_0^b (A_{22} X_m Y_n''' + A_{66} X_m'' Y_n'') X_m' Y_n' dx dy \quad (\text{III.35f})$$

$$s_{23} = - \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \quad (\text{III.35g})$$

$$s_{24} = - \int_0^a \int_0^b [B_{22}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n''] X_m' Y_n' dx dy \quad (\text{III.35h})$$

$$s_{31} = \int_0^a \int_0^b [B_{11} X_m''' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n''] X_m' Y_n dx dy \quad (\text{III.35i})$$

$$s_{32} = \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n''] X_m' Y_n dx dy \quad (\text{III.35j})$$

$$s_{33} = \int_0^a \int_0^b - [D_{11} X_m''' Y_n + 2(D_{12} + 2D_{66}) X_m'' Y_n' + D_{22} X_m Y_n'''] X_m' Y_n dx dy \quad (\text{III.35k})$$

$$s_{34} = \int_0^a \int_0^b - [D_{11}^s X_m''' Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n' + D_{22}^s X_m Y_n'''] X_m' Y_n dx dy \quad (\text{III.35l})$$

$$s_{41} = \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m''' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n''] X_m' Y_n dx dy \quad (\text{III.35m})$$

$$s_{42} = \int_0^a \int_0^b [B_{22}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n''] X_m' Y_n dx dy \quad (\text{III.35n})$$

$$s_{43} = \int_0^a \int_0^b - [D_{11}^s X_m''' Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n' + D_{22}^s X_m Y_n'''] X_m' Y_n dx dy \quad (\text{III.35o})$$

$$s_{44} = \int_0^a \int_0^b - [H_{11}^s X_m''' Y_n + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) X_m'' Y_n' + H_{22}^s X_m Y_n'' - A_{55}^s X_m'' Y_n - A_{44}^s X_m Y_n''] X_m' Y_n dx dy \quad (\text{III.35p})$$

$$K = N_{cr} \int_0^a \int_0^b (\gamma_1 X_m'' Y_n + \gamma_2 X_m Y_n'') X_m' Y_n dx dy \quad (\text{III.35q})$$

Et

$$m_{11} = \int_0^a \int_0^b -I_1 X_m' Y_n X_m' Y_n' dx dy \quad (\text{III.36a})$$

$$m_{13} = \int_0^a \int_0^b I_2 X_m' Y_n X_m' Y_n' dx dy \quad (\text{III.36b})$$

$$m_{14} = \int_0^a \int_0^b I_4 X_m' Y_n X_m' Y_n' dx dy \quad (\text{III.36c})$$

$$m_{22} = \int_0^a \int_0^b -I_1 X_m Y_n' X_m Y_n' dx dy \quad (\text{III.36d})$$

$$m_{23} = \int_0^a \int_0^b I_2 X_m Y_n' X_m Y_n' dx dy \quad (\text{III.36e})$$

$$m_{24} = \int_0^a \int_0^b I_4 X_m Y_n' X_m Y_n' dx dy \quad (\text{III.36f})$$

$$m_{31} = \int_0^a \int_0^b -I_2 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \quad (\text{III.36g})$$

$$m_{32} = \int_0^a \int_0^b -I_2 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \quad (\text{III.36h})$$

$$m_{33} = \int_0^a \int_0^b -I_1 X_m Y_n X_m Y_n dx dy + \int_0^a \int_0^b I_3 X_m Y_n X_m Y_n'' dx dy + \int_0^a \int_0^b I_3 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \quad (\text{III.36i})$$

$$m_{34} = \int_0^a \int_0^b -I_1 X_m Y_n X_m Y_n dx dy + \int_0^a \int_0^b I_5 X_m Y_n X_m Y_n'' dx dy + \int_0^a \int_0^b I_5 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \quad (\text{III.36j})$$

$$m_{41} = \int_0^a \int_0^b -I_4 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \quad (\text{III.36k})$$

$$m_{42} = \int_0^a \int_0^b -I_4 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy, m_{41} = m_{34} \quad (\text{III.36l})$$

$$m_{44} = \int_0^a \int_0^b -I_1 X_m Y_n X_m Y_n dx dy + \int_0^a \int_0^b I_6 X_m Y_n X_m Y_n'' dx dy + \int_0^a \int_0^b I_6 X_m Y_n X_m'' Y_n dx dy \quad (\text{III.36m})$$



Dans le cas du flambement, la charge critique de flambement est obtenue à partir du calcul du déterminant de la matrice de l'équation (III.26) qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} + K & s_{34} + K \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} + K & s_{44} + K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

Quant au cas de la vibration libre, les fréquences sont obtenues en mettant le déterminant de l'équation (III.38) égal à zéro, qui s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & ms_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.38})$$

### III.9. Conclusion

Dans ce chapitre, une étude analytique de la stabilité au flambement et à la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites sous divers conditions aux limites a été présentée en utilisant une théorie raffinée de quatre variables. Cette théorie satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieur et inférieur de la plaque et donne une distribution parabolique de ces contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur.

Deux types de plaques stratifiées antisymétriques ont été considérés dans cette étude : les plaques croisées (cross-ply) ou les orientations dans ce cas doivent être soit  $0^\circ$  ou bien  $90^\circ$ , le deuxième type est les plaques alternées et équilibrées ( $\theta^\circ/-\theta^\circ$ ) qui diffèrent du premier type d'orientation.

Les équations du mouvement sont obtenues par le principe de Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant deux solutions : la solution de Navier pour les plaques stratifiées (croisées et alternées) simplement appuyées, et la solution exacte des plaques stratifiées croisées en matériaux composites sous divers conditions aux limites.

Dans le chapitre suivant on va présenter quelques résultats, où on va calculer la charge critique de flambement ainsi que les fréquences naturelles des plaques stratifiées en matériaux composites.

## **CHAPITRE IV :**

# **VALIDATION ET DISCUSSION DES RÉSULTATS**

## IV.1. Introduction

Dans cette partie de la thèse on va présenter une validation de la présente théorie raffinée à ordre élevée proposée en comparant les résultats obtenus en utilisant cette théorie raffinée à quatre variables avec les autres théories issues de la littérature. Ensuite, on va réaliser une étude paramétrique pour déterminer les différents paramètres qui influent sur la stabilité vis-à-vis le flambement mécanique et la vibration libre des plaques stratifiées simplement appuyées en matériaux composites.

Pour une présentation plus convenable des résultats, ce chapitre va contenir deux parties : au premier lieu on va présenter tout ce qui concerne le phénomène de flambement mécanique de validation et de discussion de résultats, quant à la deuxième partie on va entamer l'étude analytique de la vibration libre

Sauf dans le cas d'une indication contraire, les paramètres suivants sont donnés par :  $a/h=10$ ,  $a/b=1$

## IV.2. Stabilité au flambement mécanique

Pour bien comprendre le phénomène de flambement, une validation des résultats sera présentée dans cette partie du manuscrit, où on va déterminer la charge critique de flambement pour des plaques stratifiées antisymétriques (cross-ply et angle-ply) sous chargement mécanique axiale et biaxiale sous différentes conditions aux limites.

Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée dans cette application numérique sont:

Matériau 1 [70] :  $E_1 = 40E_2$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ,  $G_{23} = 0.5E_2$ ,  $\nu_{12} = 0.25$

La charge critique de flambement non-dimensionnelle est obtenue par la formule :

$$\bar{N} = N_{cr} \left( \frac{a^2}{E_2 h^3} \right) \quad (\text{IV.1})$$

**Tableau IV.1.** Variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  des plaques carrées stratifiées alternées ( $\theta/-\theta$ ) simplement appuyées (SSSS) en matériaux composites sous compression uniaxiale.

a/h	Théorie	$\bar{N}$	
		$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$
4	Présente [71]	9.5554	9.9145
	Ren [72]	9.5368	9.8200
	Reddy [31]	9.3391	8.2377
	FSDT [73]	7.5450	6.7858
10	Présente [71]	17.2737	18.1473
	Ren [72]	15.7517	16.4558
	Reddy [31]	17.1269	18.1544
	FSDT [73]	16.6132	17.5522
100	Présente [71]	20.5040	21.6662
	Ren [72]	20.4793	21.6384
	Reddy [31]	20.5017	21.6663
	FSDT [73]	20.4944	21.6576

**Tableau IV.2.** Variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  des plaques carrées stratifiées  $(0/90)_n$  simplement appuyées (SSSS) en matériaux composites sous compression axiale

Nombre de plis	Théorie	$\bar{N}$	Erreur %
$(0/90)_2$	Présente [71]	22.5821	6.12
	Exacte [70]	21.2796	-
	Reddy [31]	22.5790	6.11
	FSDT [73]	22.8060	7.17
	CLPT	30.3591	42.67
$(0/90)_3$	Présente [71]	24.4605	3.34
	Exacte [70]	23.6689	-
	Reddy [31]	24.4596	3.34
	FSDT [73]	24.5777	3.84
	CLPT	33.5817	41.88
$(0/90)_5$	Présente [71]	25.4223	1.84
	Exacte [70]	24.9636	-
	Reddy [31]	25.4225	1.84
	FSDT [73]	25.4500	1.95
	CLPT	35.2316	41.13

Les tableaux IV.1 et IV.2 représentent la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  des plaques stratifiées en matériaux composites sous compression axiale en fonction de séquence d'empilement et le rapport coté sur épaisseur  $a/h$ .

Ces tableaux montrent la comparaison des charges critiques de flambement  $\bar{N}$  obtenus par la présente théorie raffinée d'ordre élevé *Présente* avec ceux donnés par les autres théories : La théorie classique *CLPT*, La théorie du premier ordre *FSDT*, la théorie d'ordre élevé *Reddy* ainsi que la théorie *exacte*.

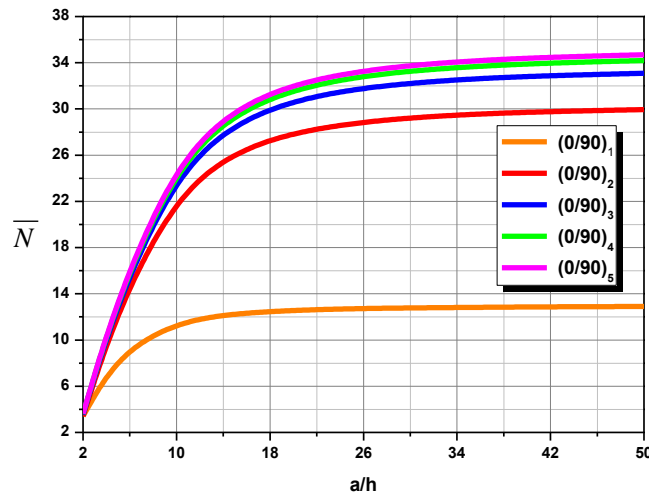
La présente théorie montre un très bon accord avec les autres théories *FSDT* et *Reddy* pour les plaques stratifiées en matériaux composites épaisses (voir tableau IV.1), où l'effet de cisaillement a une importance majeure.

Il est à noter que la présente théorie implique seulement quatre variables contre cinq variables dans les autres théories : celle du premier ordre *FSDT* et la théorie d'ordre élevé *Reddy*, et ceci sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement.

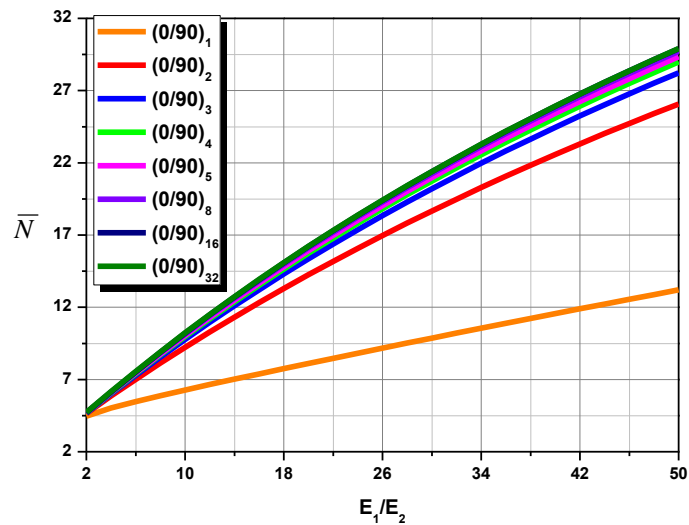
Et encore, plus que la plaque devient très épaisse, plus que l'écart entre les résultats obtenus par la théorie du premier ordre *FSDT* et celles des théories d'ordre élevé (*Présente* et *Reddy*) augmente. Ceci est dû à la mauvaise introduction de l'effet de cisaillement par la théorie du premier ordre *FSDT*.

**Tableau IV.3.** Effet de séquence d'empilement sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_n$  en matériaux composites (SSSS).

Nombre de plis	a/h			
	5	20	50	100
$(0/90)_1$	8,7694	12,5770	12,8949	12,9416
$(0/90)_2$	12,8466	27,9451	29,9449	30,2545
$(0/90)_3$	13,5747	30,7097	33,0862	33,4564
$(0/90)_4$	13,8389	31,6757	34,1852	34,5770
$(0/90)_5$	13,9630	32,1227	34,6939	35,0956
$(0/90)_8$	14,0990	32,6069	35,2449	35,6575
$(0/90)_{16}$	14,1650	32,8397	35,5098	35,9276
$(0/90)_{32}$	14,1815	32,8979	35,5761	35,9951

**Figure IV.1.** Effet de séquence d'empilement sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_n$  en matériaux composites (SSSS).**Tableau IV.4.** Effet de degré d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_n$  en matériaux composites (SSSS).

Nombre de plis	$E_1/E_2$					
	5	10	20	30	40	50
$(0/90)_1$	5.2597	6.2721	8.1151	9.8695	11.5625	13.2019
$(0/90)_2$	6.4394	9.2315	14.2543	18.6671	22.5790	26.0724
$(0/90)_3$	6.6599	9.7762	15.3518	20.2010	24.4596	28.2310
$(0/90)_4$	6.7374	9.9672	15.7361	20.7378	25.1176	28.9866
$(0/90)_5$	6.7732	10.0557	15.9141	20.9864	25.4225	29.3368
$(0/90)_8$	6.8122	10.1517	16.1071	21.2559	25.7530	29.7167
$(0/90)_{16}$	6.8309	10.1979	16.2000	21.3856	25.9121	29.8996
$(0/90)_{32}$	6.8677	10.2270	16.2190	21.3998	25.9248	29.9131



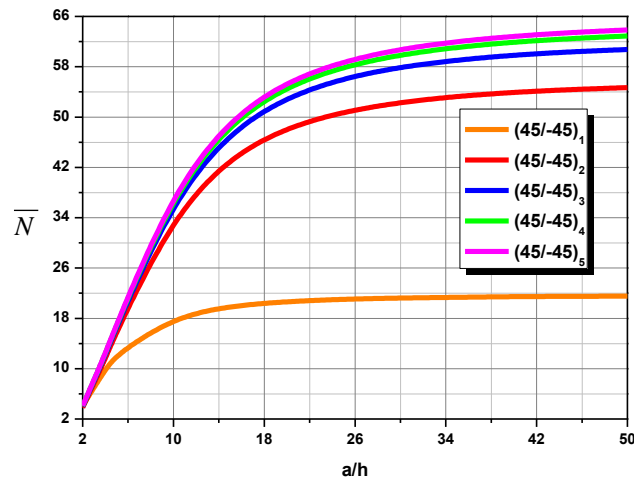
**Figure IV.2.** Effet de degré d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_n$  en matériaux composites (SSSS).

**Tableau IV.5.** Effet de séquence d'empilement sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée alternée  $(45/-45)_n$  en matériaux composites (SSSS).

Nombre de plis	a/h			
	5	20	50	100
$(45/-45)_1$	12.2700	20.6915	21.5393	21.6663
$(45/-45)_2$	16.0454	48.3542	54.6867	55.7310
$(45/-45)_3$	16.8439	53.1975	60.7603	62.0221
$(45/-45)_4$	17.1466	54.8877	62.8843	64.2236
$(45/-45)_5$	17.2913	55.6695	63.8673	65.2425
$(45/-45)_8$	17.4513	56.5164	64.9320	66.3462
$(45/-45)_{16}$	17.5295	56.9236	65.4439	66.8769
$(45/-45)_{32}$	17.5492	57.0254	65.5719	67.0096

Les tableaux (IV.3-IV.5) ainsi que les figures (IV.1-IV.3) représentent la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites simplement appuyée (SSSS) en fonction de rapport coté sur épaisseur  $a/h$  et le degré d'orthotropie  $E_1/E_2$  pour différentes séquences d'empilement (de 2 à 64 plis/couches). D'où la charge critique de flambement augmente en fonction de  $a/h$  et à mesure que le rapport coté sur épaisseur  $a/h$ , le degré d'orthotropie ainsi que le nombre de plis augmentent, ce qui est logique puisque l'augmentation de nombre de plis engendre l'augmentation de la rigidité de la plaque et par conséquent la plaque devient plus stable, et de même, par l'augmentation du rapport coté sur épaisseur  $a/h$  la plaque devient plus mince, c'est-à-dire il y aura

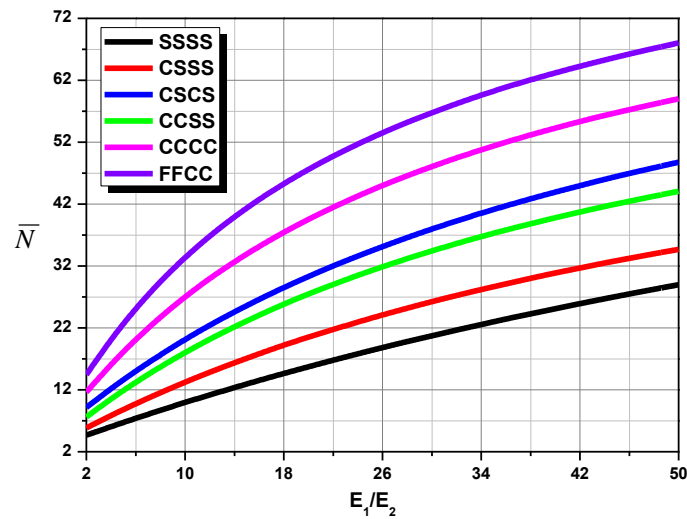
une condensation des fibres qui engendre l'augmentation de la rigidité et par la suite la plaque devient plus stable.



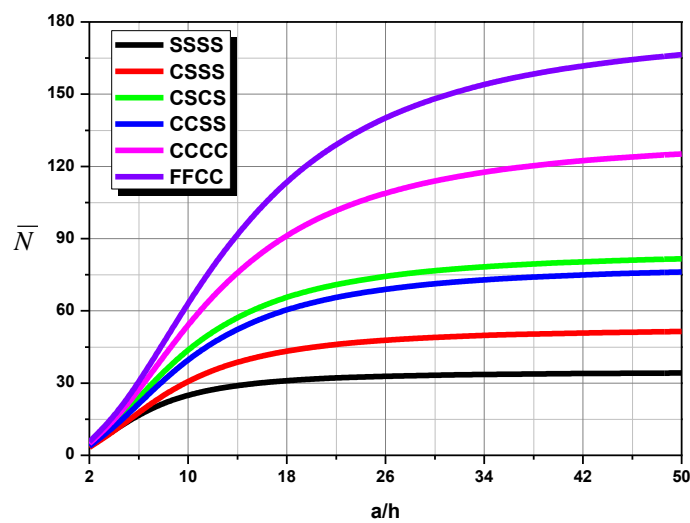
**Figure IV.3.** Effet de séquence d'empilement sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée alternée  $(45/-45)_n$  en matériaux composites (SSSS).

**Tableau IV.6.** Effet des conditions aux limites sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_n$  en matériaux composites.

Nombre de plis	SSSS	CSSS	CSCS	CCSS	CCCC	FFCC
$(0/90)_1$	11.5625	15.6796	23.8302	21.6053	32.5819	40.4980
$(0/90)_2$	22.5790	28.0782	40.2425	36.4605	50.1704	58.7157
$(0/90)_3$	24.4596	30.1404	42.9808	38.9277	53.1913	61.9980
$(0/90)_4$	25.1176	30.8669	43.9520	39.8040	54.2816	63.2002
$(0/90)_5$	25.4225	31.2046	44.4046	40.2127	54.7933	63.7675
$(0/90)_8$	25.7530	31.5715	44.8974	40.6578	55.3531	64.3902
$(0/90)_{16}$	25.9121	31.7485	45.1353	40.8728	55.6242	64.6927
$(0/90)_{32}$	25.9248	31.8484	45.1835	40.9699	55.6993	64.7282



**Figure IV.4.** Effet de degré d’orthotropie  $E_1/E_2$  sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d’une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_4$  en matériaux composites sous différentes conditions aux limites.



**Figure IV.5.** Effet du rapport coté sur épaisseur  $a/h$  sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d’une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_4$  en matériaux composites sous différentes conditions aux limites.

Les tableaux IV.6 et IV.7 ainsi que les figures IV.4 et IV.5 représentent la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  en fonction des différentes conditions aux limites, où cette charge dépend directement de la condition aux limites appliquée, ce qui est logique parce que cette condition influe sur la stabilité de la plaque. De ces résultats on constate que la charge critique de flambement est maximale pour la condition (FFCC) et minimale pour la condition (SSSS), il est à noter que le sens de l’application de la charge influe aussi, c.-à-d. si on change le sens de cette charge on n’obtiendra pas les mêmes résultats.

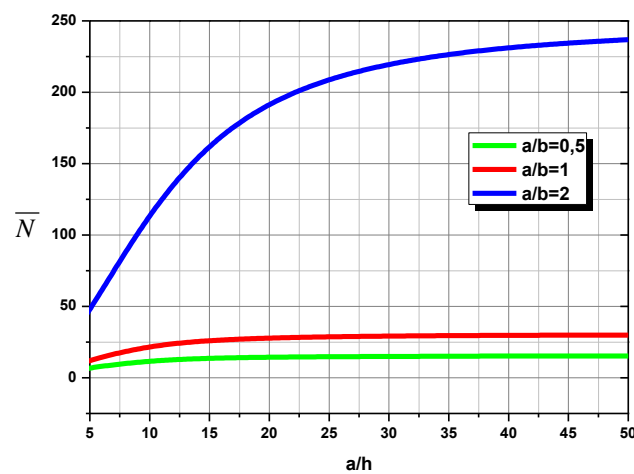


**Tableau IV.7.** Effet de degré d'orthotropie  $E_1/E_2$  et le rapport coté sur épaisseur  $a/h$  sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_4$  en matériaux composites sous différentes conditions aux limites.

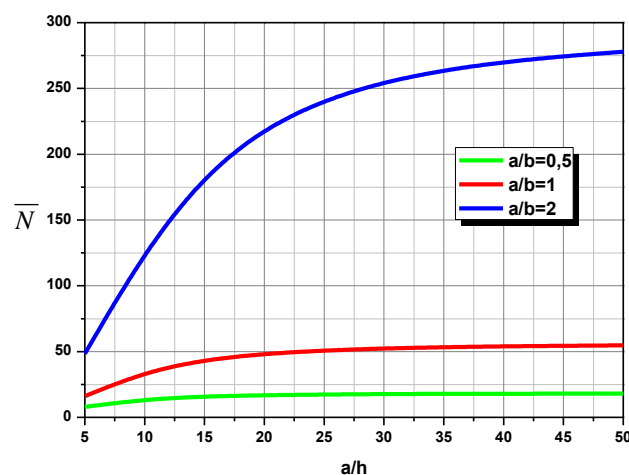
Conditions aux limites	a/h	$E_1/E_2$					
		5	10	20	30	40	50
SSSS	5	5.5200	7.5135	10.3900	12.3759	13.8389	14.9687
	10	6.7374	9.9672	15.7361	20.7378	25.1176	28.9866
	20	7.1319	10.8584	18.0830	25.0163	31.6757	38.0773
	50	7.2509	11.1377	18.8729	26.5553	34.1852	41.7631
	100	7.2683	11.1787	18.9915	26.7910	34.5770	42.3495
CSSS	5	6.5195	8.6544	11.2871	12.8767	13.9638	14.7704
	10	8.8330	13.2593	20.5219	26.2400	30.8669	34.6939
	20	9.6986	15.3157	25.9077	35.7243	44.8492	53.3541
	50	9.9726	16.0128	27.9718	39.7736	51.4219	62.9201
	100	10.0130	16.1176	28.2941	40.4292	52.5237	64.5781
CSCS	5	9.4479	12.1736	15.3465	17.1897	18.4353	19.3614
	10	13.6468	20.1364	30.3249	37.9773	43.9520	48.7592
	20	15.3672	24.1305	40.3893	55.1570	68.6330	80.9820
	50	15.9307	25.5542	44.5520	63.2278	81.5908	99.6493
	100	16.0146	25.7716	45.2187	64.5804	83.8583	103.0534
CCSS	5	8.2534	10.8055	13.6761	15.3044	16.3947	17.2036
	10	11.9149	18.0424	27.4861	34.4453	39.8040	44.0709
	20	13.4140	21.7258	37.0480	50.8586	63.3748	74.7731
	50	13.9048	23.0475	41.0716	58.7635	76.1342	93.1929
	100	13.9779	23.2497	41.7198	60.1007	78.3950	96.6038
CCCC	5	11.4487	14.4464	17.5457	19.2425	20.3906	21.2677
	10	18.2147	27.0472	39.5748	48.0838	54.2816	59.0281
	20	21.413	34.7654	58.5509	79.1234	97.1033	112.9594
	50	22.5230	37.7997	67.7187	96.8375	125.1918	152.8123
	100	22.6912	38.2775	69.2715	100.0470	130.6103	160.9645
FFCC	5	13.4242	16.6078	19.7489	21.4622	22.6507	23.5883
	10	22.7620	33.4224	47.6390	56.7713	63.2002	68.0204
	20	27.6316	45.0962	75.3323	100.6289	122.1242	140.6297
	50	29.3986	50.0162	90.1632	128.9493	166.4485	202.7261
	100	29.6699	50.8092	92.7796	134.3724	175.5989	216.4655

**Tableau IV.8.** Effet de rapport d'aspect  $a/b$  sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque rectangulaire stratifiée en matériaux composites (SSSS).

Orientation	a/b	a/h				
		5	10	20	50	100
$(0/90)_2$	0.5	7.3119	12.0755	14.4566	15.3040	15.4334
	1	12.8466	22.5789	27.9451	29.9449	30.2544
	2	46.6115	116.9912	193.2083	236.9264	244.8645
$(45/-45)_2$	0.5	7.8912	13.7220	16.8819	18.0497	18.2301
	1	16.0454	34.2726	48.3542	54.6867	55.7310
	2	48.3015	126.2594	219.5512	277.8107	288.7959



**Figure IV.6.** Effet de rapport d'aspect  $a/b$  sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque rectangulaire stratifiée croisée  $(0/90)_2$  en matériaux composites (SSSS).



**Figure IV.7.** Effet de rapport d'aspect  $a/b$  sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque rectangulaire stratifiée alternée  $(45/-45)_2$  en matériaux composites (SSSS).

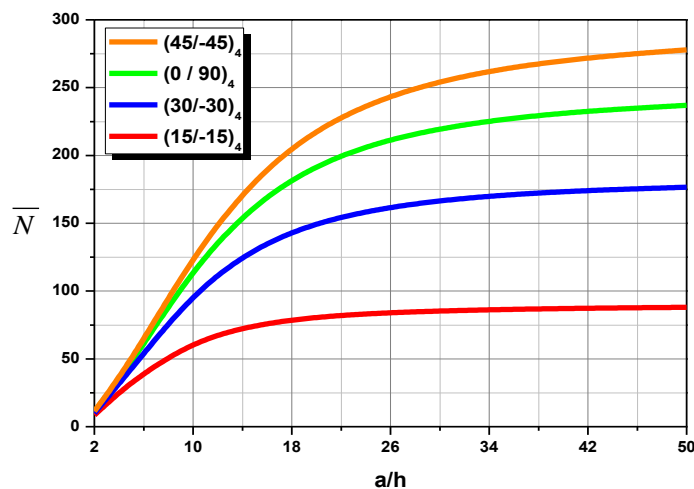
Le tableau IV.8 ainsi que les figures IV.6 et IV.7 représentent la variation de la charge critique de flambement d'une plaque rectangulaire stratifiée en matériaux composites simplement appuyée (SSSS) en fonction de rapport d'aspect (longueur sur largeur)  $a/b$  pour différents types de plaques (minces ou épaisses). D'où la charge critique de flambement augmente en fur et à mesure que le rapport d'aspect  $a/b$  et le rapport coté sur épaisseur  $a/h$  augmentent.

**Tableau IV.9.** Effet d'angle d'orientation des fibres sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque stratifiée alternée en matériaux composites (SSSS).

Orientation	a/b		
	0.5	1	2
$(0/90)_2$	12.0755	22.5790	116.9913
$(15/-15)_2$	6.2171	9.2746	26.3601
$(30/-30)_2$	16.8083	31.8760	98.8273
$(45/-45)_2$	13.7220	34.2726	126.2594
$(60/-60)_2$	9.4047	31.8760	143.3498

**Tableau IV.10.** Effet d'angle d'orientation des fibres sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque rectangulaire stratifiée en matériaux composites ( $a/b=2$ , SSSS).

Orientation	a/h				
	5	10	20	50	100
$(0/90)_2$	46.6116	116.9913	193.2083	236.9265	244.8646
$(15/-15)_2$	33.6360	62.9609	80.9058	87.9570	89.0671
$(30/-30)_2$	42.4626	98.8273	150.4756	176.5355	181.0239
$(45/-45)_2$	48.3015	126.2594	219.5512	277.8108	288.7959
$(60/-60)_2$	52.1371	143.3498	268.9332	358.3689	376.3252

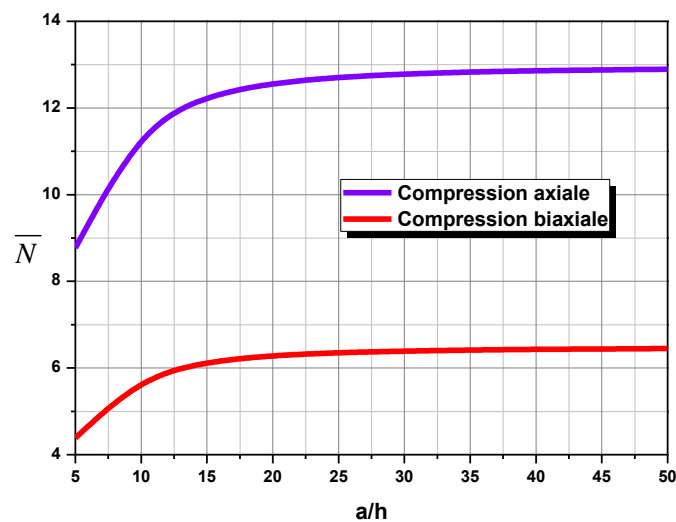


**Figure IV.8.** Effet d'angle d'orientation des fibres sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque rectangulaire stratifiée alternée en matériaux composites ( $a/b=2$ , SSSS).

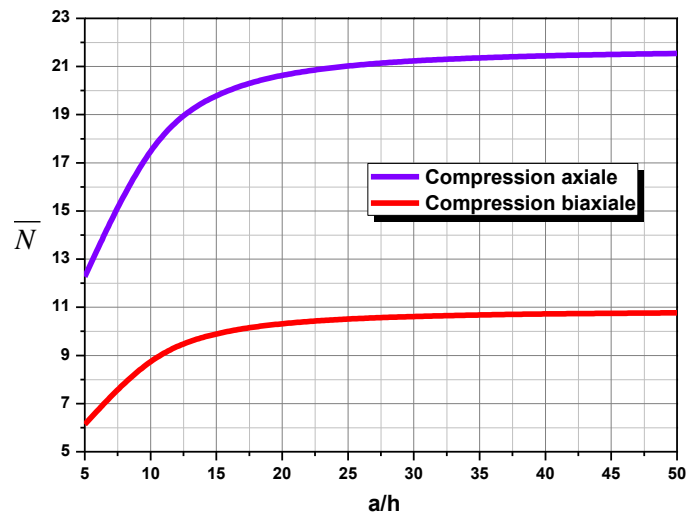
Les tableaux IV.9 et IV.10 ainsi que la figure IV.8 représentent l'influence de l'orientation des fibres sur la charge critique de flambement sous compression axiale ( $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$ ), d'où cette charge critique de flambement augmente au fur et à mesure que l'angle d'orientation augmente. Il est à noter que l'orientation des fibres optimale dépend de la géométrie de la plaque (longueur, largeur et épaisseur). Aussi, la charge critique de flambement n'est pas le seul critère qu'on doit prendre en considération lors de choix d'angle d'orientation, puisque par exemple, les stratifiées pose un majeur obstacle qui est les contraintes d'interfaces [74, 75], pour cela il faut que l'orientation choisie réponde à certain nombre de ces critères.

**Tableau IV.11.** Effet de type de charge (axiale ou biaxiale) sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites (SSSS).

Orientation	a/h	$(\gamma_1, \gamma_2)$	
		(-1,0)	(-1,-1)
(0/90)	5	8.76941	4.38471
	10	11.56255	5.78127
	20	12.57704	6.28852
	50	12.89488	6.44744
	100	12.94164	6.47082
(45/-45)	5	12.27004	6.13502
	10	18.15436	9.07718
	20	20.6915	10.34575
	50	21.53926	10.76963
	100	21.66626	10.83313



**Figure IV.9.** Effet de la charge de compression (axiale et biaxiale) sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée (0/90) en matériaux composites (SSSS).



**Figure IV.10.** Effet de la charge de compression (axiale et biaxiale) sur la variation de la charge critique de flambement  $\bar{N}$  d'une plaque carrée stratifiée (45/-45) en matériaux composites (SSSS).

Le tableau IV.11 ainsi que les figures IV.9 et IV.10 représentent la variation de la charge critique de flambement d'une plaque carrée stratifiée en matériaux composites en fonction de rapport coté sur épaisseur  $a/h$  sous différents types de compressions (axiale ou biaxiale). D'où la charge critique de flambement pour le cas de compression biaxiale est la moitié de celle de la compression axiale, puisque dans ce cas la charge est divisée sur les deux directions  $x$  et  $y$ .

### IV.3. Stabilité à la vibration libre

Afin de prouver la validité de la présente théorie pour le cas de la vibration libre, on va présenter une comparaison entre les résultats obtenus par cette théorie raffinée à quatre variables avec d'autres théories issues de la littérature (*Exacte, CLPT, FSDT, Reddy, Karama, ...etc*). Et par la suite, une étude paramétrique sera présentée pour déterminer les différents paramètres qui influent sur les fréquences naturelles des plaques stratifiées en matériaux composites.

Pour des raisons de validation, les propriétés matérielles suivantes seront utilisées :

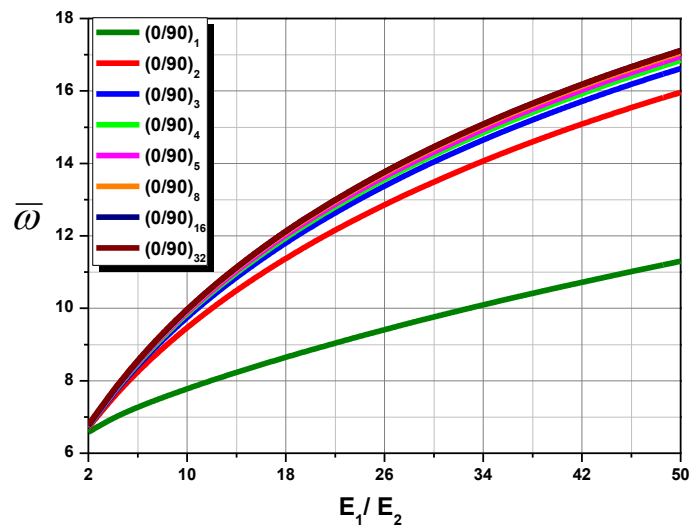
Matériau 2 [71] :  $E_1 = 40E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.6E_2, \nu_{12} = 0.25$

Les résultats numériques sont présentés en termes de fréquences adimensionnelles. Le paramètre de fréquence naturelle adimensionnelle est donné par :

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (\text{IV.2})$$

**Tableau IV.12.** Variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée  $(0^\circ/90^\circ)_n$  pour différentes degrés d'orthotropie (SSSS) ( $a/h=5$ ).

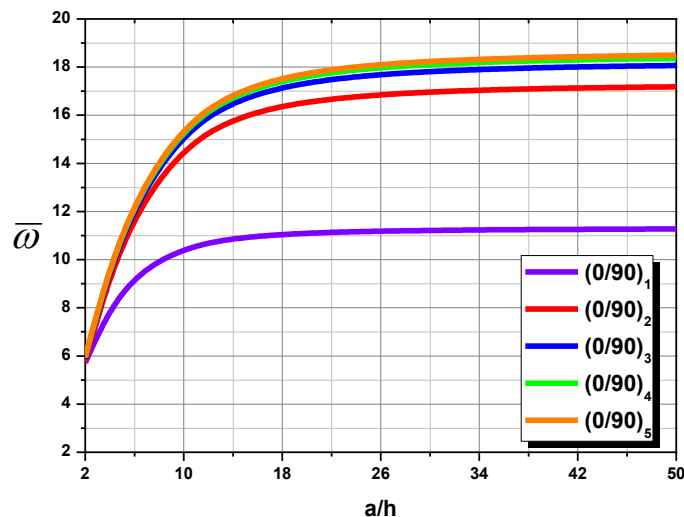
Nombre de plis	Théorie	$E_1/E_2$				
		3	10	20	30	40
$(0^\circ/90^\circ)_1$	Exacte [76]	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625
	Présente [71]	6.2168	6.9881	7.8198	8.5028	9.0841
	Reddy [31]	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	Karama [77]	6.2224	7.0066	7.8584	8.5630	9.1661
	FSDT [73]	6.2085	6.9392	7.7060	8.3211	8.8333
$(0^\circ/90^\circ)_2$	Exacte [76]	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6790
	Présente [71]	6.5009	8.1958	9.6273	10.5359	11.1728
	Reddy [31]	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
	Karama [77]	6.5034	8.1939	9.6201	10.5261	11.1628
	FSDT [73]	6.5043	8.2246	9.6885	10.6198	11.2708
$(0^\circ/90^\circ)_3$	Exacte [76]	6.6100	8.4143	9.8398	10.6950	11.2720
	Présente [71]	6.5558	8.4053	9.9182	10.8546	11.5009
	Reddy [31]	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
	Karama [77]	6.5595	6.5595	9.9313	10.8756	11.5314
	FSDT [73]	6.5569	8.4183	9.9427	10.8828	11.5264
$(0^\circ/90^\circ)_5$	Exacte [76]	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245
	Présente [71]	6.5842	8.5126	10.0671	11.0191	11.6721
	Reddy [31]	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	Karama [77]	6.5885	8.5229	10.0881	11.0522	11.7180
	FSDT [73]	6.5837	8.5132	10.0638	11.0058	11.6444



**Figure IV.11.** Effet de degré d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0^\circ/90^\circ)_n$  en matériaux composites (SSSS).

**Tableau IV.13.** Effet de séquence d'empilement et du rapport coté sur épaisseur  $a/h$  sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée  $(0^\circ/90^\circ)_n$  en matériaux composites (SSSS).

Nombre de plis	Théorie	a/h					
		2	4	10	20	50	100
$(0^\circ/90^\circ)_1$	Présente [71]	5.7100	8.3507	10.5669	11.1048	11.2750	11.3001
	Karama [77]	5.8948	8.4561	10.5964	11.1132	11.2764	11.3005
	Reddy [31]	5.7170	8.3546	10.5680	11.1052	11.2751	11.3002
	FSDT [73]	5.2104	8.0349	10.4731	11.0779	11.2705	11.2990
	CLPT	8.6067	10.4244	11.1537	11.2693	11.3023	11.3070
$(0^\circ/90^\circ)_2$	Présente [71]	5.7528	9.7366	14.8474	16.5737	17.1850	17.2784
	Karama [77]	5.8129	9.7362	14.8338	16.5683	17.1840	17.2781
	Reddy [31]	5.7546	9.7357	14.8463	16.5733	17.1849	17.2784
	FSDT [73]	5.6656	9.8148	14.9214	16.6008	17.1899	17.2796
	CLPT	14.1036	16.3395	17.1448	17.2682	17.3032	17.3083
$(0^\circ/90^\circ)_3$	Présente [71]	5.8702	9.9870	15.4635	17.3774	18.0644	18.1699
	Karama [77]	5.9888	10.0323	15.4702	17.3787	18.0646	18.1699
	Reddy [31]	5.8741	9.9878	15.4632	17.3772	18.0644	18.1698
	FSDT [73]	5.6992	9.9852	15.5010	17.3926	18.0673	18.1706
	CLPT	15.0895	17.2676	18.0461	18.1652	18.1990	18.2038
$(0^\circ/90^\circ)_5$	Présente [71]	5.9476	10.1226	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	Karama [77]	6.0889	10.1854	15.7847	17.7784	18.4991	18.6099
	Reddy [31]	5.9524	10.1241	15.7700	17.7743	18.4984	18.6097
	FSDT [73]	5.7140	10.0628	15.7790	17.7800	18.4995	18.6100
	CLPT	15.6064	17.7314	18.4916	18.6080	18.6410	18.6457



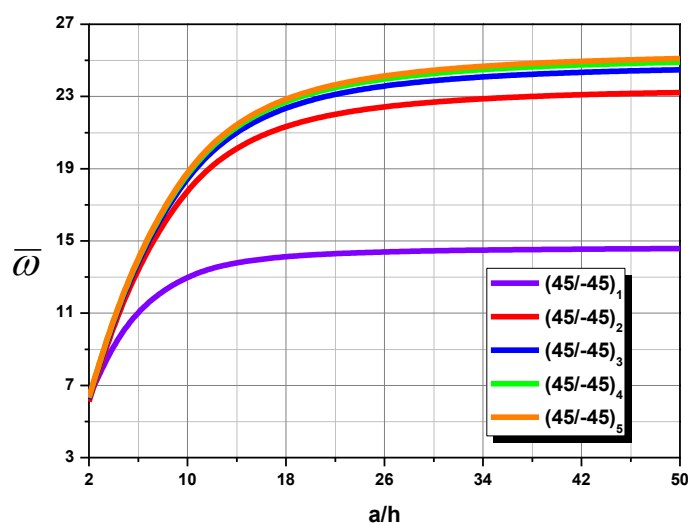
**Figure IV.12.** Effet de séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0^\circ/90^\circ)_n$  en matériaux composites (SSSS).

Les tableaux IV.12, IV.13, ainsi que les figures IV.11 et IV.12 représentent la variation des fréquences naturelles adimensionnelles obtenues en utilisant les différentes théories de cisaillement d'ordre élevé pour différentes valeurs de rapport d'épaisseur  $a/h$  et de degré d'orthotropie  $E_1/E_2$  d'une plaque stratifiée antisymétrique croisée (cross-ply) simplement appuyée (SSSS). Il est clair que la présente théorie donne des résultats plus précises en termes de prédiction des fréquences naturelles que les théories Reddy [31], Karama [77] et la théorie d'élasticité tridimensionnelle Exacte [76]. Il est à noter que le nombre d'inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, contre cinq variables dans la théorie du premier ordre *FSDT* [73] et les autres théories d'ordre élevé [31, 77].

D'où on peut conclure que la présente théorie n'est pas seulement précise, mais aussi simple pour la prédiction des fréquences naturelles des plaques stratifiées en matériaux composites.

**Tableau IV.14.** Effet de séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée alternée  $(45/-45)_n$  en matériaux composites (SSSS).

Nombre de plis	Théorie	a/h						
		2	4	5	10	20	50	100
$(45^\circ/-45^\circ)_1$	Présente [71]	6.3247	9.7517	10.8336	13.2605	14.2455	14.5722	14.6211
	Reddy [31]	6.2837	9.7593	10.8401	13.2630	14.2463	14.5723	14.6214
	Swaminathan [78]	5.3325	8.8426	10.0350	12.9115	14.1705	14.6012	14.6668
$(45^\circ/-45^\circ)_2$	Présente [71]	6.1019	10.6508	12.5342	18.3240	21.8072	23.2238	23.4508
	Reddy [31]	6.1067	10.6507	12.5331	18.3221	21.8063	23.2236	23.4507
	Swaminathan [78]	5.5674	10.0731	11.9465	17.8773	21.6229	23.1949	23.4499
$(45^\circ/-45^\circ)_4$	Présente [71]	6.3049	10.9870	12.9697	19.2659	23.2390	24.9046	25.1745
	Reddy [31]	6.2836	10.9905	12.9719	19.2659	23.2388	24.9046	25.1744
	Swaminathan [78]	5.9234	10.7473	12.7523	19.1258	23.1829	24.8959	25.1741



**Figure IV.13.** Effet de séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée alternée  $(45/-45)_n$  en matériaux composites (SSSS).



La variation des fréquences naturelles en fonction du rapport coté sur épaisseur  $a/h$  est présentée dans les tableaux IV.13 et IV.14. Les fréquences obtenues en utilisant la présente théorie sont comparées avec les théories de Reddy [31], Swaminathan [78] et du premier ordre *FSDT* [73]. D'où, dans le cas des plaques épaisses ( $a/h=2, 4, 5$  et  $10$ ) il y a une différence considérable entre les résultats obtenues par la présentes théorie raffinée et la théorie classique *CLPT* qui néglige complètement l'effet de cisaillement, ce qui signifie l'importance majeure de l'effet de cisaillement.

La figure IV.13 représente l'influence de séquence d'empilement sur la variation des fréquences naturelles d'une plaque stratifiée antisymétrique alternée  $(45/-45)_n$ . D'où, l'augmentation de séquence d'empilement ainsi que le rapport coté sur épaisseur  $a/h$  engendre l'augmentation des fréquences naturelles.

**Tableau IV.15.** Variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée alternée  $(\theta/-\theta)_3$  en matériaux composites (SSSS).

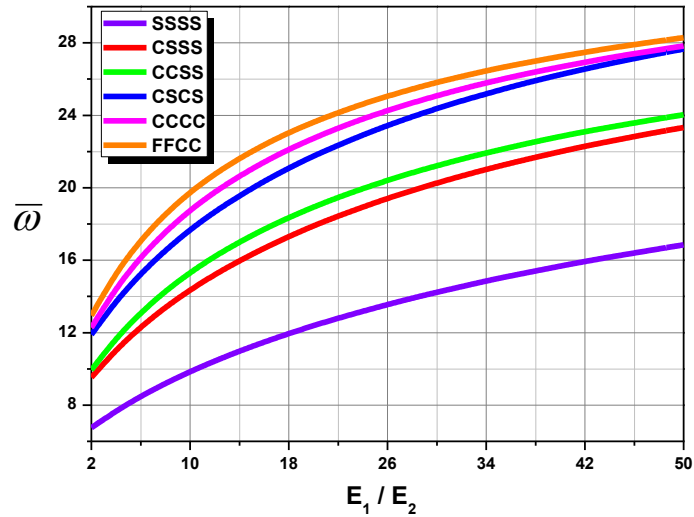
Orientation des plis	Théorie	a/h			
		10	20	50	100
$(5^\circ/-5^\circ)_3$	Présente [71]	15.9840	18.0774	18.8394	18.9568
	Reddy [31]	14.848	17.619	18.753	18.935
	Song Xiang [79]	15.405	17.943	18.942	19.206
$(30^\circ/-30^\circ)_3$	Présente [71]	18.3356	21.7196	23.0815	23.2988
	Reddy [31]	18.170	21.648	23.067	23.295
	Song Xiang [79]	19.075	22.304	23.579	23.968
$(45^\circ/-45^\circ)_3$	Présente [71]	19.0252	22.8770	24.4802	24.7392
	Reddy [31]	19.025	22.877	24.480	24.739
	Song Xiang [79]	20.027	23.623	25.061	25.478

Le tableau IV.15 représente la variation des fréquences naturelles d'une plaque carrée stratifiée antisymétrique  $(\theta/-\theta)_3$  en matériaux composites en fonction de l'orientation des fibres, où la variation de l'angle d'orientation des fibres influe sur les rigidités de la plaque et par la suite influe d'une façon directe sur le comportement de la plaque qui est exprimé dans ce cas en termes de fréquences naturelles (cas de la vibration libre). Il est à noter que le choix de l'angle d'orientation des fibres dépend généralement de la géométrie de la plaque.

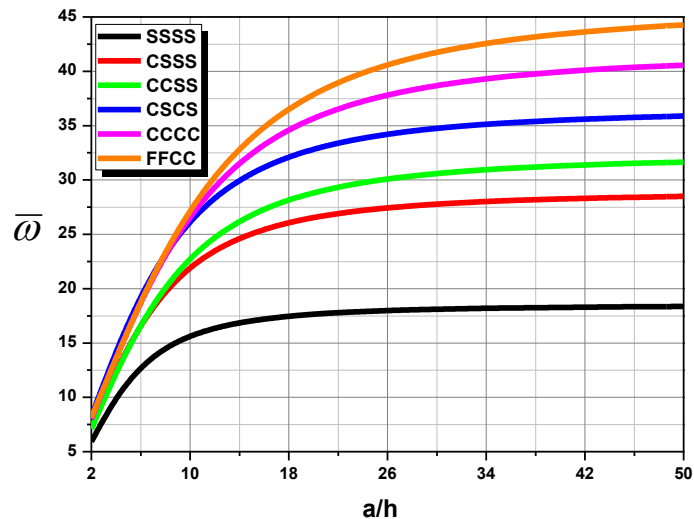
**Tableau IV.16.** Variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée alternée  $(45^\circ/-45^\circ)_n$  en matériaux composites pour différentes valeurs d'orthotropie (SSSS).

Nombre de plis	$E_1/E_2$	Théorie	a/h					
			2	4	10	20	50	100
$(45^\circ/-45^\circ)_1$	3	Présente [71]	4.5045	6.0858	7.0739	7.2704	7.3293	7.3378
		Reddy [31]	4.5052	6.0861	7.0739	7.2704	7.3292	7.3373
		FSDT [80]	4.4556	6.0665	7.0700	7.2694	7.3291	7.3378
		Swaminathan [78]	4.5312	6.1223	7.1056	7.3001	7.3583	7.3666
	10	Présente [71]	5.1686	7.3454	8.9656	9.3264	9.4377	9.4540
		Reddy [31]	5.1718	7.3469	8.9660	9.3265	9.4377	9.4538
		FSDT [80]	4.9316	7.2169	8.9324	9.3173	9.4362	9.4537
		Swaminathan [78]	4.9742	7.2647	8.9893	9.3753	9.4943	9.5123
	20	Présente [71]	5.7028	8.4115	10.7141	11.2769	11.4553	11.4816
		Reddy [31]	5.7094	8.4151	10.7151	11.2772	11.4553	11.4819
		FSDT [80]	5.2387	8.1185	10.6265	11.2517	11.4511	11.4806
		Swaminathan [78]	5.1817	8.0490	10.6412	11.2975	10.5074	11.5385
	30	Présente [71]	6.0590	9.1696	12.0954	12.8654	13.1153	13.1524
		Reddy [31]	6.0681	9.1752	12.0971	12.8659	13.1154	13.1521
		FSDT [80]	5.4104	8.7213	11.9456	12.8208	13.1077	13.1505
		Swaminathan [78]	5.2771	8.5212	11.8926	12.8422	13.1566	13.2035
	40	Présente [71]	6.3246	9.7517	13.2605	14.2455	14.5722	14.6211
		Reddy [31]	6.2837	9.7593	13.2630	14.2463	14.5723	14.6214
		FSDT [80]	5.5205	9.1609	13.0439	14.1790	14.5608	14.6183
		Swaminathan [78]	5.3325	8.8426	12.9115	14.1705	14.6012	14.6668
$(45^\circ/-45^\circ)_2$	3	Présente [71]	4.6545	6.4555	7.6268	7.8650	7.9367	7.9471
		Reddy [31]	4.6546	6.4554	7.6267	7.8649	7.9366	7.9472
		FSDT [80]	4.6519	6.4626	7.6293	7.8657	7.9368	7.9472
		Swaminathan [78]	4.6498	6.4597	7.6339	7.8724	7.9442	7.9545
	10	Présente [71]	5.3882	8.5126	11.4678	12.2381	12.4867	12.5236
		Reddy [31]	5.3887	8.5119	11.4674	12.2380	12.4866	12.5238
		FSDT [80]	5.3765	8.5634	11.4939	12.2463	12.4881	12.5239
		Swaminathan [78]	5.2061	8.3447	11.4116	12.2294	12.4952	12.5351
	20	Présente [71]	5.7414	9.6863	14.6619	16.3150	16.8964	16.9851
		Reddy [31]	5.7431	9.6855	14.6609	16.3146	16.8964	16.9848
		FSDT [80]	5.6542	9.7575	14.7292	16.3394	16.9008	16.9862
		Swaminathan [78]	5.4140	9.3306	14.4735	16.2570	16.8949	16.9927
	30	Présente [71]	5.9449	10.2790	16.7765	19.3506	20.3278	20.4806
		Reddy [31]	5.9481	10.2785	16.7750	19.3499	20.3277	20.4807
		FSDT [80]	5.7641	10.3391	16.8825	19.3944	20.3361	20.4827
		Swaminathan [78]	5.5079	9.7966	16.4543	19.2323	20.3134	20.4839
	40	Présente [71]	6.1019	10.6507	18.3240	21.8072	23.2239	23.4508
		Reddy [31]	6.1067	10.6507	18.3221	21.8063	23.2236	23.4507
		FSDT [80]	5.8228	10.6839	18.4633	21.8722	23.2368	23.4541
		Swaminathan [78]	5.5674	10.0731	17.8773	21.6229	23.1949	23.4499

Le Tableau IV.16 représente l'influence sur le degré d'orthotropie des fibres sur les fréquences naturelles d'une plaque stratifiée en matériaux composites, où l'augmentation de rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$  conduit à l'augmentation de la rigidité dans la direction longitudinale, qui régit la résistance mécanique des fibres et qui par conséquent cause l'augmentation de ces fréquences naturelles.



**Figure IV.14.** Effet du degré d'orthotropie  $E_1/E_2$  sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_4$  en matériaux composites sous différentes conditions aux limites.



**Figure IV.15.** Effet du rapport coté sur épaisseur  $a/h$  sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_4$  en matériaux composites sous différentes conditions aux limites.

**Tableau IV.17.** Effet de conditions aux limites et le rapport coté sur épaisseur  $a/h$  sur la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque carrée stratifiée croisée  $(0/90)_n$  en matériaux composites.

Nombre de plis	a/h	Conditions aux limites					
		SSSS	CSSS	CSCS	CCSS	CCCC	FFCC
$(0^\circ/90^\circ)_1$	5	9.0871	12.5343	14.9166	12.9658	15.1351	15.4818
	10	10.5680	15.5527	19.1522	16.7080	20.5334	21.6998
	20	11.1052	16.8306	21.1120	18.4273	23.3691	25.2666
	50	11.2751	17.2631	21.8054	19.0320	24.4398	26.6818
	100	11.3002	17.3283	21.9114	19.1242	24.6070	26.9067
$(0^\circ/90^\circ)_2$	5	11.1716	14.3104	16.4812	14.2097	15.8826	15.8543
	10	14.8463	20.9537	25.0846	21.8298	25.6243	26.2515
	20	16.5733	24.9845	30.9551	27.1671	33.7361	35.8955
	50	17.1849	26.6355	33.5615	29.5762	37.9431	41.4182
	100	17.2784	26.9008	33.9935	29.9779	38.6877	42.4429
$(0^\circ/90^\circ)_3$	5	11.5012	14.6633	16.8603	14.5312	16.2173	16.1802
	10	15.4632	21.7261	25.9454	22.5695	26.3983	26.9865
	20	17.3772	26.1605	32.3675	28.4105	35.1953	37.3816
	50	18.0644	28.0167	35.2912	31.1191	39.9079	43.5513
	100	18.1698	28.3173	35.7805	31.5756	40.7546	44.7168
$(0^\circ/90^\circ)_4$	5	11.6184	14.7950	17.0059	14.6557	16.3537	16.3178
	10	15.6735	21.9919	26.2441	22.8265	26.6721	27.2505
	20	17.6496	26.5591	32.8466	28.8321	35.6913	37.8880
	50	18.3622	28.4840	35.8764	31.6408	40.5723	44.2725
	100	18.4717	28.7965	36.3852	32.1160	41.4534	45.4855
$(0^\circ/90^\circ)_5$	5	11.6730	14.8575	17.0758	14.7156	16.4204	16.3858
	10	15.7700	22.1144	26.3821	22.9454	26.7996	27.3742
	20	17.7743	26.7416	33.0661	29.0252	35.9187	38.1204
	50	18.4984	28.6977	36.1440	31.8794	40.8761	44.6023
	100	18.6097	29.0156	36.6616	32.3630	41.7728	45.8369
$(0^\circ/90^\circ)_8$	5	11.7326	14.9264	17.1532	14.7821	16.4951	16.4626
	10	15.8741	22.2468	26.5316	23.0742	26.9384	27.5094
	20	17.9084	26.9378	33.3023	29.2330	36.1636	38.3709
	50	18.6448	28.9274	36.4317	32.1359	41.2026	44.9567
	100	18.7581	29.2512	36.9588	32.6285	42.1161	46.2145
$(0^\circ/90^\circ)_{16}$	5	11.7614	14.9600	17.1910	14.8146	16.5320	16.5006
	10	15.9239	22.3104	26.6035	23.1362	27.0053	27.5748
	20	17.9725	27.0317	33.4152	29.3324	36.2808	38.4909
	50	18.7148	29.0372	36.5693	32.2584	41.3587	45.1261
	100	18.8291	29.3637	37.1008	32.7553	42.2802	46.3950
$(0^\circ/90^\circ)_{32}$	5	11.7693	14.9337	17.2048	14.8006	16.5441	16.5105
	10	15.9277	22.1317	26.6177	22.9629	27.0237	27.5608
	20	17.9719	26.6732	33.4193	28.9131	36.2897	38.3843
	50	18.7122	28.5795	36.5653	31.6775	41.3554	44.9206
	100	18.8261	28.8886	37.0952	32.1439	42.2742	46.1664

Les tableaux IV.17 ainsi que les figures IV.14 et IV.15 représentent la variation des fréquences naturelles  $\bar{\omega}$  en fonction des différentes conditions aux limites, où ces dépendent directement de la condition aux limites appliquée (similaire au cas du flambement), ce qui est logique parce que cette

condition influe sur la stabilité de la plaque. D'où on observe clairement que les fréquences naturelles sont maximales pour la condition (FFCC) et minimales pour la condition (SSSS).

#### **IV.4. Conclusion**

Cette partie du manuscrit a été consacré à l'analyse de la stabilité au flambement mécanique et à la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites sous différentes conditions aux limites. Où on a utilisé une théorie raffinée de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables. Cette théorie satisfait les conditions de nullité des contraintes de cisaillement dans les bords supérieur et inférieur de la plaque et donne une distribution parabolique à ces contraintes de cisaillement sans l'aide des facteurs correcteurs de cisaillement.

Nous avons procédé à l'établissement des équations de mouvement/équilibre par le principe d'Hamilton, d'où la solution de Navier est utilisée pour déterminer les charges critiques de flambement et les fréquences naturelles dans le cas des plaques simplement appuyées, quant à la solution exacte elle est utilisée pour les diverses conditions aux limites. La validation de la présente théorie a été très bien démontrée par comparaison de nos résultats analytiques avec celles des théories à ordre supérieur issues de la littérature.

À la lumière de cette étude, nous pouvons conclure que la présente théorie est non seulement précise, mais elle est aussi très simple et efficace pour étudier la stabilité au flambement mécanique et à la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites.

# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

## Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail nous avons étudié la stabilité au flambement mécanique et à la vibration libre des plaques rectangulaires stratifiées antisymétriques en matériaux composites sous différentes conditions aux limites.

Cette étude est basée sur une théorie de cisaillement raffinée de quatre variables, les équations d'équilibre et de mouvement des plaques rectangulaires en matériaux composites ont été étudiées. Cette théorie d'ordre élevé donne une variation parabolique aux contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement et satisfait les conditions de nullité de ces contraintes de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Pour montrer l'efficacité de la présente théorie, les résultats obtenus par cette analyse sont comparés avec des résultats existants dans la littérature.

Pour cela une étude paramétrique a été effectuée pour examiner l'influence de l'angle d'orientation des fibres, séquence d'empilement, le rapport coté sur épaisseur  $a/h$ , le rapport d'aspect  $a/b$ , degré d'orthotropie  $E_1/E_2$ , les conditions aux limites et type de chargement (compression axiale ou biaxiale) sur la charge critique de flambement et sur les fréquences naturelles des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites.

Basant sur l'étude précédente on peut tirer les conclusions suivantes :

- ✓ La présente théorie peut fournir des résultats de flambement et vibration libre presque identiques avec les autres théories d'ordre élevé pour toutes types de plaques (minces ou bien épaisses) ;
- ✓ La charge critique de flambement pour les plaques stratifiées en composites augmente par l'augmentation du rapport d'aspect  $a/b$ , c'est-à-dire, la charge critique de flambement est maximale pour les plaques élancées ;
- ✓ La charge critique de flambement ainsi que les fréquences naturelles des plaques stratifiées en composites augmentent lorsque le rapport coté sur épaisseur  $a/h$  augmente, c'est-à-dire, que la charge et les fréquences sont maximales pour les plaques minces et minimale pour les plaques épaisses ;
- ✓ La charge critique de flambement et les fréquences naturelles dépendent de l'angle d'orientation, où il faut être très attentif pour le choix de cette angle d'orientation;
- ✓ La charge critique de flambement ainsi que les fréquences naturelles des plaques stratifiées en composites augmentent lorsque la séquence d'empilement augmente, c'est-à-dire, que la charge et les fréquences sont maximales pour les plaques qui comportement plus de plis, il est à noter que pour les stratifiées il faut aussi prendre en considération l'aspect économique ;
- ✓ Les conditions aux limites influent directement sur la charge critique de flambement et les fréquences naturelles.

En général on peut dire que la présente théorie est précise, simple et surtout efficace pour étudier le phénomène de la stabilité au flambement et à la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites.

En termes de perspectives, il serait intéressant de faire des recherches sur les axes suivants :

- ✓ Etudier la stabilité au flambement des plaques stratifiées en composites sous chargement thermomécanique ;
- ✓ Etudier la stabilité à la vibration forcée des plaques stratifiées en matériaux composites ;
- ✓ Utiliser la présente théorie raffinée pour faire une étude statique des plaques stratifiées en composites ;
- ✓ Utiliser la présente théorie pour étudier le comportement d'autres structures en FGM et sandwich.



# RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

## Références bibliographiques

- [1] Glossaire des matériaux composites-CARMA-Actualisation octobre 2006.
- [2] L. Gornet, Généralités sur les matériaux composites, Ecole d'ingénieur, 2008.
- [3] M. P. Hanson, T. T. Serafini, Effects of Thermal and Environment Exposure on the Mechanical properties of Graphite/polyimide composites, Lewis Research Center, Cleveland, Ohio, Dec. 1971.
- [4] R. Maurice, technologie des composites, 3<sup>ème</sup> édition, Hermès, Paris, 1998
- [5] B. O. Sallai, A. Tounsi, I. Mechab, B. Boudarba, M. Meradjah, E.A. Adda Bedia, « A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams », Computational Materials Science, vol. 44(4), pp. 1344 – 1350, 2009.
- [6] C. Bathias et Coll., Matériaux composites : Architecture, mise en œuvre, propriétés et applications industrielles, 2<sup>ème</sup> édition, DUNOD, Paris, 2009.
- [7] E. T. Thostenson, Z. Ren, T.W. Chou, « Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review », Composites science and technology, vol. 61(13) pp. 1899–1912, 2001.
- [8] A. K. T. Lau, D. Hui, « The revolutionary creation of new advanced materials-carbon nanotube composites », Composites Part : B, vol. 33(4), pp. 263–277, 2002.
- [9] A. M. K. Esawi, M. M. Farag, « Carbon nanotube reinforced composites : potential and current challenges », Mater. Des., vol. 28(9), pp. 2394–2401, 2007.
- [10] Y. Kojima, A. Usuki, M. Kawasumi, A. Okada, Y. Fukushima, « Mechanical properties of nylon 6-clay hybrid. », J. Mater. Res., vol. 8, pp. 1185–1189, 1993.
- [11] A. Illaik, Synthèse et caractérisation de nanocomposites polymères/hydroxydes doubles lamellaires (HDL). Matériaux. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2008.
- [12] F. Berbain, A. Chevalier, « Mise en œuvre des composites », Techniques de l'Ingénieur, vol. A 3 720.
- [13] P. Jacquinet, « Moulage par compression des SMC polyesters et phénoliques », Techniques de l'Ingénieur, vol. A 3 727.
- [14] D. Gay, Matériaux composites, 4<sup>ème</sup> édition, Hermès, Paris, 1997.
- [15] J. M. Berthelot, Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures, 5<sup>ème</sup> édition, Mason, Paris, 2012.
- [16] Y. Menail, Analyse de l'effet du vieillissement à l'air, dans l'eau douce et dans l'eau salée, sur la tenue en fatigue de composites à matrice organique, renforcée par des fibres de verre, thèse de doctorat, UBM Annaba, 2009.
- [17] A. Giocosa, Les composites dans l'industrie automobile, Techniques de l'ingénieur, traité Plastiques et Composites, AM 5600, 1999.
- [18] E. H. Babacar Ly, « Nouveaux matériaux composites thermoformables à base de fibres de cellulose », Matériaux. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2008.

- [19] G. Dhatt, « Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchoff hypothesis », Proc. ASCE Symposium On Application of FEM in civil engineering, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, pp. 255-278, 1969.
- [20] R.D Mindlin, « Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates », Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- [21] E. Reissner, « The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates », J. Appl. Mech., vol. 12, pp. 69-77, 1945.
- [22] P. Topdar, A. H. Sheikh, N. Dhang, « Finite element Analysis of composite an Sandwich Plates Using a Continuous Inter-Laminar Shear Stress Model », J. Sandwich Structures and Materials, Vol. 5, July 2003.
- [23] J.M. Whitney, « The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates », J. Compos. Mater., Vol.3, pp.534-547, 1969.
- [24] G. Kirchhoff, « Sur l'équilibre et le mouvement d'un anneau élastique », Journal de mathématiques pures et appliquées, vol. 40, pp. 51-88, 1950.
- [25] J. Cugnoni, Identification par recalage modale et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites. Thèse de doctorat, l'école polytechnique fédérale de Lausanne, 2004.
- [26] J. N. Reddy, C. M. Wang, K. H. Lee, « Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories », International Journal of Solids and Structures, vol. 34(26), pp. 3373-3384, 1997.
- [27] J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates, Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.
- [28] J.M. Whitney, « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads », J. Applied Mechanics, Vol.40, pp. 302-304, 1973.
- [29] F. B. Hilderbrand, E. Reissner, G. G. Thomas, « Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA Technical note N°1833, 1949.
- [30] E. Reissner, « On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation », Int. J. Solids Structures, vol. 25 (5), pp.495-502, 1975.
- [31] J. N. Reddy, « A simple higher-order theory for laminated composite plates », Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pp. 745-752, 1984.
- [32] T. Kant, K. Swaminathan. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite Structures, 56(4):329-344, 2002.
- [33] R. B. Nelson, D. R. Lorch, « A refined theory for laminated orthotropic plates », ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.41, pp. 177-183,1974.
- [34] K. H. Lo, R. M. Christensen, « A higher order theory of plate deformation. Part 1: homogeneous plate's », journal of applied mechanics, Vol.44(4), pp. 663-668, 1977.
- [35] M. Touratier, « An efficient standard plate theory », Eng Sci, vol. 29(8), pp. 901-916, 1991.
- [36] S. A. Ambartsumyan, « Theory of anisotropic plate », Technomic Publishing Co, 1969.

- [37] M.V.V. Murthy, « An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate ». Rapport technique, NASA, 1981.
- [38] V. A. Duong, Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites, Thèse de doctorat, Ecole national des ponts, ParisTech, 2008.
- [39] K. S. Afaq, « Développement d'un nouveau modèle pour les structures Composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord », thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, Erance, 2003.
- [40] H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, E. Adda Bedia, « Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory », *Int. J. Mech. Mater. Design*, vol. 6 (2), pp. 113-121, 2010.
- [41] R. P. Shimpi, « Zeroth order shear deformation theory for plates », *AIAA Journal*, vol. 37, pp. 524-526, 1998.
- [42] M. C. Ray, « Zeroth order shear deformation theory for laminated composite plates », *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 70, pp. 374-380, 2003.
- [43] M. Cho, K. Kim, M. H. Kim, « Efficient high order shell theory for laminated composites », *Composite Structures*, vol. 34, pp. 197-212, 1996.
- [44] M. Cho, J. S. Kim. « A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element », *Composites: Part B*, vol. 31, pp. 65-74, 2000.
- [45] M. Di Sciuva, « A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates ». *Atti. Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pp. 279-295, 1984.
- [46] H. Murakami, « Laminated composite plate theory with improved in-plane responses », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, pp. 661-666, 1986.
- [47] R. C. Averill, « Static and dynamic response of moderately thick laminate beams with damage », *Composite Eng.*, vol. 4, pp. 381-395, 1994.
- [48] L. H. He. « A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces », *Int J Solids Structures*, vol. 31(5), pp. 613-627, 1994.
- [49] U. Icardi, « Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations », *Composite Structures: Part B*, vol. 32, pp. 343-354, 2001.
- [50] E. Carrera, « On the use of Murakami's zig-zag fonction in the modeling of layered plates and shells », *Computers and Structures*, vol. 82, pp. 541-554, 2004.
- [51] J. Sunôes, M. Moita, « Buckling behaviour of laminated composite structures using a discrete higher-order displacement model », *Composite Structures*, vol. 35, pp. 15-92. 1996.
- [52] R. K. Kapania, S. Raciti. « Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear effects and buckling ». *AIAA Journal*, vol. 27(7), pp. 923-934, 1989.
- [53] T. Kant, K. Swaminathan, « Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites a selective review and survey of current developments », *Composite structures*, vol. 49, pp. 65-75, 2000.

- [54] B. P. Patel, C. S. Munot, S. S. Gupta, G. T. Sanbanson, M. Ganapathi, « Application of higher-order finite element for elastic stability analysis of laminate cross-ply oval cylindrical shells », *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, pp. 1083-1104, 2004.
- [55] Z. Wu, W. Chen, “An efficient higher-order theory and finite element for laminated plates subjected to thermal loading”, *Composite Structures*, vol. 73, pp. 99-109, 2006.
- [56] T. Hassaine Daouadji, A. Tounsi, L. Hadji, A. Hadj Henni, E.A Adda Bedia, « A theoretical analysis for static and dynamic behavior of functionally graded plates », *Materials Physics and Mechanics journal*, Vol. 14, pp.110-128 , 2012.
- [57] L. Hadji, H. Atmane, A. Tounsi, I. Mechab, E. Adda Bedia, «Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory», *Applied Mathematics and Mechanics*, pp. 925–942, 2011.
- [58] B. Adim, A. Rabahi, T. Hassaine Daouadji, S. Chergui, « Vibration des plaques stratifiées en matériaux composites », *2<sup>nd</sup> International Conference on Aeronautics Sciences. ICAS’2*, Oran, Algérie, 2015.
- [59] B. Adim, A. Rabahi, T. Hassaine Daouadji, S. Chergui, « Analyse statique des plaques stratifiées antisymétriques en matériaux composites », *2<sup>ème</sup> Conférence Internationale sur la Maintenance et la Sécurité Industrielle. CIMS I’2015*, Skikda, Algérie, 2015.
- [60] H. Hebali, A. Tounsi, S. Houari, A. Bessaim, E.A. Adda Bedia, « A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates », *ASCE J. Engineering Mechanics*, vol. 140, pp. 374 - 383, 2014.
- [61] A. Tafia, « Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches », Thèse de doctorat, l'Université de Reims Champagne- Ardenne, France, 2007.
- [62] B. Adim, A. Rabahi, T. Hassaine Daouadji, « A simple higher order shear deformation theory for bending, buckling, and dynamic of laminated composite plates », *Int. J. Adv. Struct. Eng.*, accepted 30 January 2016.
- [63] B. Adim, A. Rabahi, T. Hassaine Daouadji, S. Chergui, « Utilisation d’une nouvelle théorie d’ordre élevé pour l’analyse statique des plaques en matériaux composites », *2<sup>ème</sup> Conférence Internationale sur l’Énergétique Appliquée et la Pollution. CIEAP’14*, Constantine, Algérie, 2014.
- [64] B. Adim, A. Rabahi, F. Z. Bouzid, T. Hassaine Daouadji, «Analyse de flambement thermique des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM», *1<sup>st</sup> International Conference on Pozzolan Construction Materials. ICPCM*, Oran, Algérie, 2014.
- [65] B. Adim, A. Rabahi, T. Hassaine Daouadji, « L’analyse du flambement des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM sous chargement thermique », *Colloque International, Caractérisation et modélisation des matériaux et structures. CMMS’14*, Tizi-Ouzou Algérie, 2014.
- [66] B. Adim, M. O. Andjani, A. Rabahi, R. Benferhat, L. Hadji, T. Hassaine Daouadji, « Utilisation d'une nouvelle théorie d'ordre élevé pour l'analyse statique des plaques en matériaux à gradient de propriété type FGM », *1<sup>st</sup> International Conference on Aeronautics Sciences. ICAS’1*, Oran, Algérie, 2013.

- [67] M. M. Ait Amar, A. Hadj Henni, A. Tounsi, « An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions », *J. Sandw. Struct. Mater.*, vol.16 (3), pp. 293–318, 2014.
- [68] M. Sobhy, «Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions», *Composite Structures*, vol. 99, pp. 76–87, 2013.
- [69] Y. Tlidji, T. Hassaine Daouadji, L. Hadji, A. Tounsi, E. A. Adda Bedia, « Elasticity solution for bedding response of fonctionally graded sandwich plates under thermomechanical loading», *journal of thermal stresses*, vol. 37(7), pp. 852-869, 2014.
- [70] A. K. Noor, « Stability of multilayered composite plate », *Fibre Sci. Technol.*, vol. 8, pp. 81-89, 1975.
- [71] B. Adim, T. Hassaine Daouadji, B. Abbas et A. Rabahi, « Buckling and free vibration analysis of laminated composite plates using an efficient and simple higher order shear deformation theory ». *Journal of Mechanics and industry*, Accepted 21 November 2015, DOI: 10.1051/meca/2015112.
- [72] J.G. Ren, « Bending, vibration and buckling of laminated plates, in: N.P. Cheremisinoff (Ed.), *Handbook of ceramics and composites* », Marcel Dekker, New York, Vol. 721, pp. 413–450, 1990.
- [73] J.M. Whitney, N.J. Pagano, « Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates », *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 37, pp. 1031–1036, 1970.
- [74] A. Rabahi, T. Hassaine Daouadji, B. Abbes, B. Adim, « Analytical and numerical solution of the interfacial stress in reinforced-concrete beams reinforced with bonded prestressed composite plate», *J. Rein. Plas. and Compos.*, vol. 35(3), pp. 258-272, 2016.
- [75] T. Hassaine Daouadji, A. Rabahi, B. Abbes, B. Adim, « Theoretical and finite element studies of interfacial stresses in reinforced concrete beams strengthened by externally FRP laminates plate », *J. Adh. and Tech.*, vol. 30 (12), pp. 1253-1280, 2016.
- [76] K. Noor, « Free vibrations of multilayered composite plates », *AIAA J*, vol. 11, pp. 1038-1039, 1973.
- [77] M. Karama, K. S. Afaq, S. Mistou, « Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 1525-1546, 2003.
- [78] K. Swaminathan, S. Patil, « Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates », *Composite Structures*, vol. 82, pp. 209–216, 2008.
- [79] S. Xiang, G. Li, W. Zhang, M. Yang, « A meshless local radial point collocation method for free vibration analysis of laminated composite plates », *Composite Structures*, vol. 93, pp.280–286, 2011.
- [80] H. T. Thai, D.H. Choi, « A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates », *Composite Structures*, vol. 106, pp. 754–763, 2013.