

II.1. Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter une méthode de calcul non linéaire qui permet d'obtenir à partir du champ de pression, dans le film lubrifiant, les caractéristiques du palier hydrostatique à trois patins telles que les forces engendrées par le film, les pressions d'alvéoles et les débits du lubrifiant.

Le champ de pression est déterminé à partir de la résolution de l'équation de Reynolds, qui est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique. Il n'est pas possible, sauf hypothèses particulières, de déterminer des solutions analytiques. Pour cela, dans notre étude, nous allons envisager la résolution de l'équation de Reynolds à l'aide d'une méthode analytique. Il est supposé ici que l'écoulement de fluide est incompressible et le régime est laminaire, isotherme et permanent.

II.2. Modélisation mathématique

II.2.1. Description d'un palier hydrostatique à trois patins

Sur la figure II.1 nous avons schématisé d'une ligne d'arbre monté verticalement dans un palier hydrostatique à trois patins. La position du centre de l'arbre est excentrée. Les indices 1, 2 et 3 indiquent les caractéristiques des butées à simple effet qui par assemblage constituent le palier hydrostatique. Le palier hydrostatique à trois patins est alimenté en fluide par les alvéoles, eux-mêmes alimentés par une pression extérieure à travers des résistances hydrauliques.

II.2.2. Caractéristiques d'un palier hydrostatiques à trois patins

Le calcul des caractéristiques de palier hydrostatique peut être obtenu par la juxtaposition de trois patins plats de palier hydrostatique (Figure II.2). Il est supposé que l'écoulement du fluide est incompressible et le régime est laminaire, isotherme et permanent.

Le palier hydrostatique à trois patins est alimenté en fluide par les alvéoles, eux-mêmes alimentés par une pression extérieure à travers des résistances hydrauliques

Le palier hydrostatique à trois patins est constitué de deux parties :

- Une partie fixe : représentée par trois patins identiques, où chaque patin à un alvéole central qui est contrôlé et alimenté par une résistance hydraulique de type capillaire.
- Une partie mobile : représentée par le grain mobile.

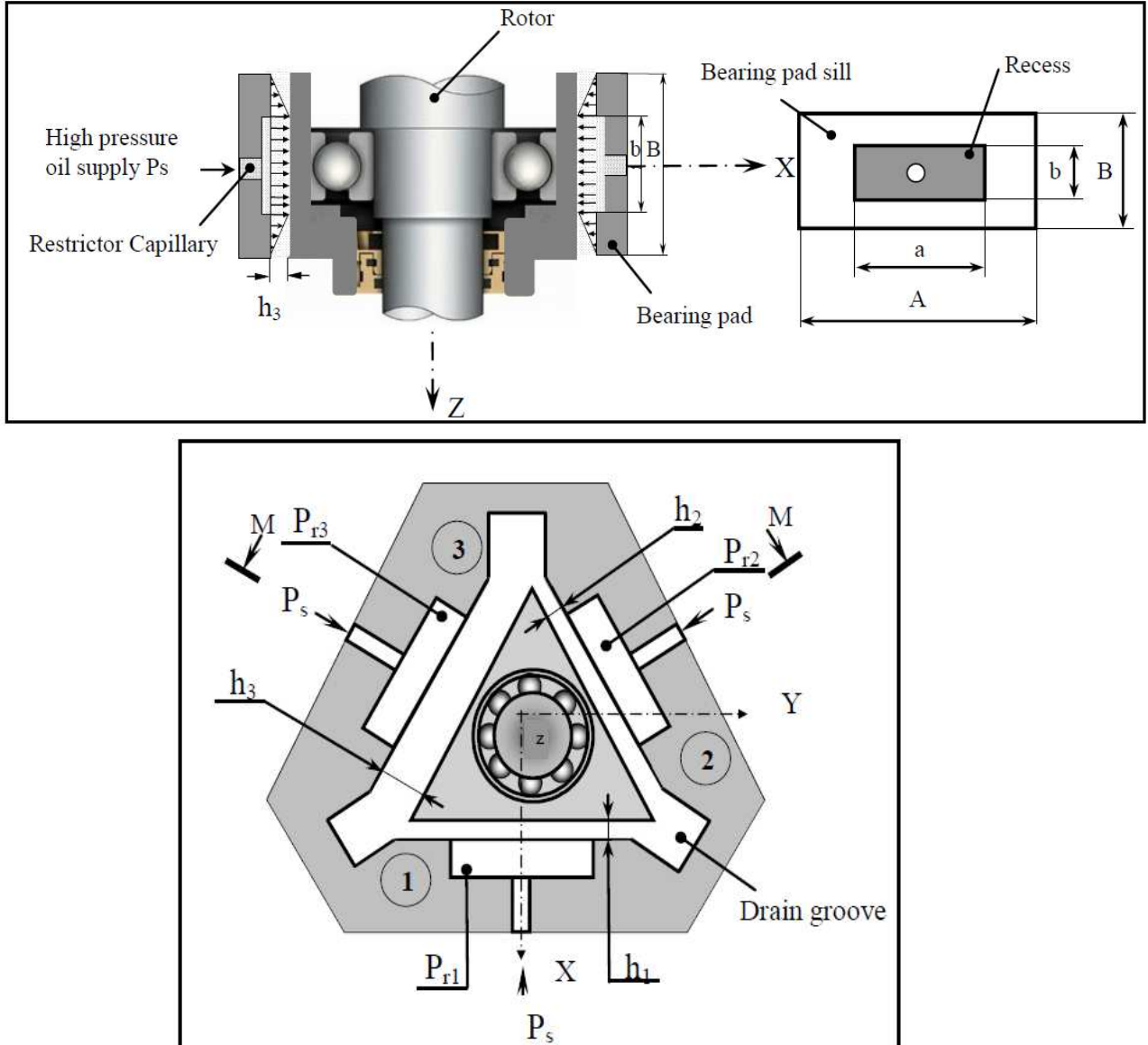


Figure II.1 : Schématisation d'un palier hydrostatique à 3 patins [13].

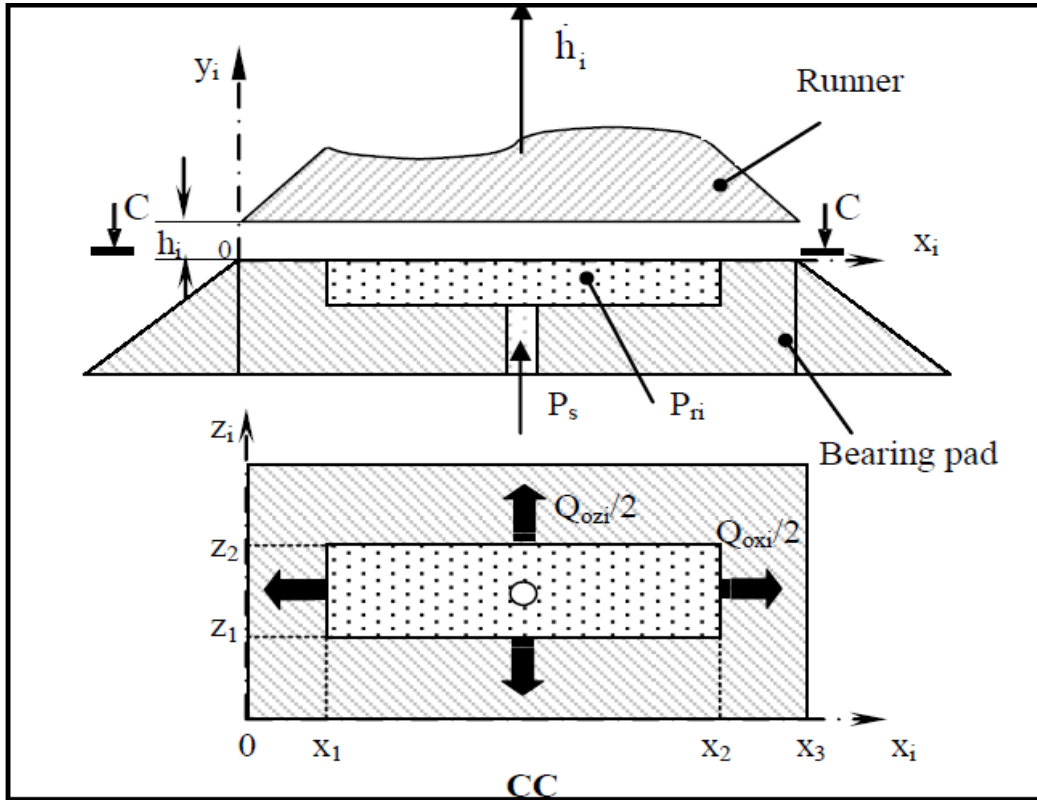


Figure II.2 : Patins de palier hydrostatique plat

II.2.2.1. Équation De Reynolds

L'équation de Reynolds tient compte du calcul de la distribution de pression, $P_i(x_i, z_i, t)$. Cette équation peut être résolue numériquement en appliquant la méthode analytiquement pour des cas spécifiques tels que les roulements infiniment longs ou courts. Si nous considérons qu'il n'y a aucune glissade entre le fluide et le roulement de patin, les conditions de frontière liée à la vitesse seront comme suit (Fig.II. 3):

Le patin plat:

$$U_{1i} = 0; V_{1i} = 0 \quad W_{1i} = 0$$

Le coureur:

$$U_{2i} = 0; V_{2i} = h' \quad \text{et} \quad W_{2i} = 0$$

où U_{1i} ; V_{1i} et W_{1i} sont les vitesses de la surface du patin de palier hydrostatique i ème, et U_{2i} ; V_{2i} et W_{2i} sont les vitesses de la surface du patin, $h' & i$ est la vitesse de compression de la i -ième coussinet de palier hydrostatique ($i = 1, 2$ et 3);

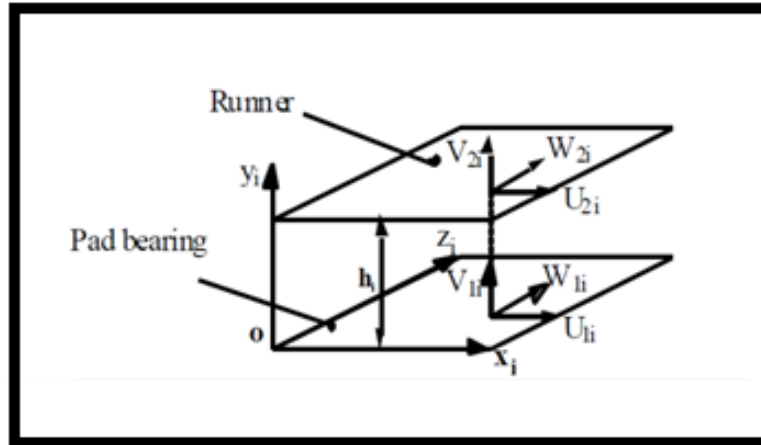


Figure II.3 : Les conditions aux limites de palier hydrostatique

On suppose que la profondeur des alvéoles est suffisante pour permettre l'hypothèse d'une pression constante.

Le grain mobile est animé d'une vitesse linéaire (Vitesse d'écrasement) caractérisée par V_{pi} . On lie au centre de la butée le repère fixe $(O_I, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$

Où O_I : représenté le centre du palier.

La position et la vitesse du centre du grain mobile sont définies respectivement en coordonnées cartésiennes par :

$\overrightarrow{O_I O_2} = x_I \vec{X} = y_I \vec{Y}$ et $\vec{V}(O_2) = V_a \vec{X} = V_b \vec{Y}$, où O_2 représente le centre du grain mobile.

La caractéristique géométrique d'un palier hydrostatique à trois patins impose donc, la définition des grandeurs suivantes :

- Le nombre de patins n ($n = 3$),
- La dimension du patin (Fig. II.1),
 - Dimension extérieur du patin : A, B
 - Dimension de l'alvéole du patin: a, b
- La dimension de la section du grain mobile (Fig. II.2).

La connaissance de ces grandeurs permet de définir l'épaisseur et vitesse du film relatif à chaque patin, et ces deux paramètres sont donnés respectivement dans le repère $(O_I, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ par (Fig. II.1) :

- Butées hydrostatique n° 1 :

$$h_1 = h_0 - x_1 \quad (\text{II.1})$$

$$V_{p1} = \frac{\partial h_1}{\partial t} = V_a \quad (\text{II.2})$$

- Butées hydrostatique n° 2 :

$$h_2 = h_0 - x_2 \quad (\text{II.3})$$

$$V_{p2} = \frac{\partial h_2}{\partial t} = V_b \quad (\text{II.4})$$

- Butées hydrostatique n° 3 :

$$h_3 = h_0 - x_3 \quad (\text{II.5})$$

$$V_{p3} = \frac{\partial h_3}{\partial t} = -V_a \quad (\text{II.6})$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x \cos(\pi/6) + y \sin(\pi/6) \\ x_3 = -x \cos(\pi/6) - y \sin(\pi/6) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Les coordonnées (déplacements) x_1 , x_2 , et x_3 sont déterminées à partir de la figure II.3

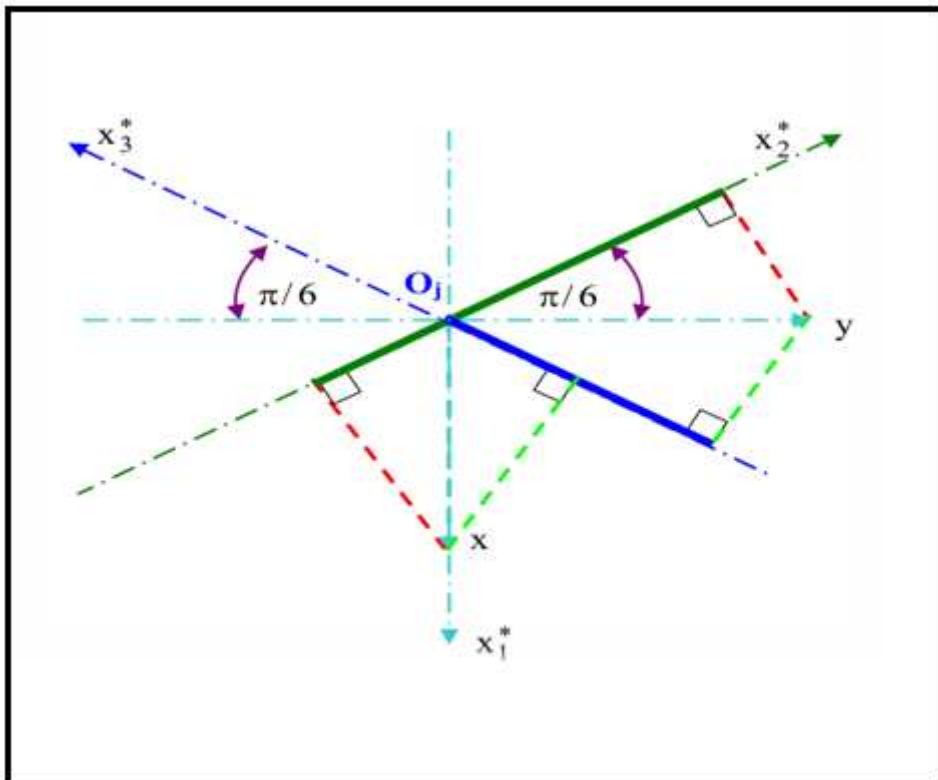


Figure II.4 : Système de coordonnées de l'arbre dans le palier

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -\dot{x} \\ \dot{h}_2 = \dot{x} \cos(\pi / 6) - \dot{y} \sin(\pi / 6) \\ \dot{h}_3 = \dot{x} \cos(\pi / 6) + \dot{y} \sin(\pi / 6) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

II.3. Calcul d'un palier hydrostatique à trois patins

Dans notre étude nous allons utiliser la méthode analytique car elle est couramment utilisée. Elle nous permet de réduire les dimensions des programmes du calcul, mais impose la connaissance de la pression dans l'alvéole et les pressions aux extrémités libres au niveau de chaque butée à simple effet. Le calcul des caractéristiques d'un palier hydrostatique à trois patins revient donc, au calcul des caractéristiques de trois butées hydrostatiques dont l'étude est analogue à celle d'une butée hydrostatique à simple effet.

II.4. Méthode analytique

La méthode analytique est appliquée, pour le calcul d'un palier hydrostatique à trois patins, dans le cas d'hypothèse particulière comme la butée hydrostatique infiniment longue. C'est ce cas que nous allons appliquer.

II.4.1. Butée hydrostatique infiniment longue à simple effet

Soit une butée hydrostatique plane infiniment longue à simple effet n° i (Fig. II.5), qui est constituée par une partie fixe appelée patin à un alvéole central et une partie mobile appelé grain mobile animé d'une vitesse linéaire (Vitesse d'écrasement) V_{pi} .

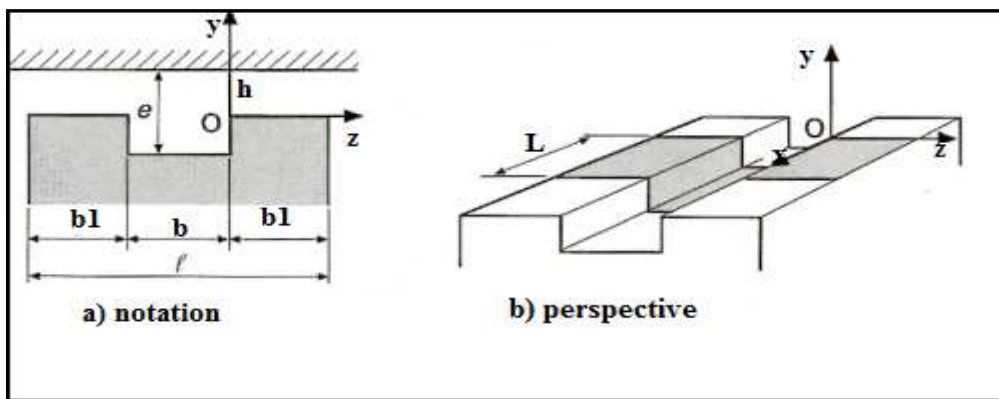


Figure II.5 : Butée hydrostatique infiniment longue n° i , a) notation, b) perspective

II.4.1.1. Calcul du champ de pression

Lorsque le rapport A/B de la longueur A ($A=L$) à la largeur b de la butée à simple effet n° i est grand, on peut négliger le débit sortant suivant la longueur A devant le débit sortant suivant la largeur b , l'écoulement se fait purement suivant la largeur b (Fig. II.6).

$$Q_{xi} \ll Q_{zi} \Rightarrow \frac{\partial P_i}{\partial x} = 0 \tag{II.9}$$

Avec :

$$\begin{cases} Q_{xi} = Q_{xi}^+ + Q_{xi}^- \\ Q_{zi} = Q_{zi}^+ + Q_{zi}^- \end{cases} \tag{II.10}$$

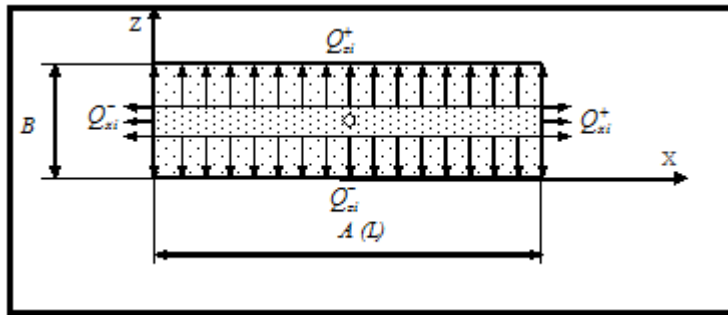


Figure II.6 : Débit sortant de l'alvéole d'une butée

Où Q_{xi} est le débit volumique sortant suivant l'axe X relatif à la butée à simple effet n° i , Q_{zi} le débit volumique sortant suivant l'axe Z relatif à la butée à simple effet n° i .

D'après l'équation (II.10), la variation de la pression suivant l'axe X n'existe pas, donc l'équation de Reynolds relative à la butée à simple effet n° i est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{h_i^3}{\mu} \left(\frac{\partial P_i}{\partial X} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{h_i^3}{\mu} \left(\frac{\partial P_i}{\partial Z} \right) \right] = 12V_{Pi} \tag{II.11}$$

Est devient :

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(h_i^3 \frac{\partial P_i}{\partial Z} \right) = 12 \mu \dot{h}_i \tag{II.12}$$

Avec

$$\dot{h}_i = V_{Pi} = \frac{\partial h_i}{\partial t} \tag{II.13}$$

L'intégration de l'équation (II.13) et l'application des conditions aux limites sur la pression :

$$P_i = P_{ai} \quad \text{Pour} \quad Z = 0$$

$$P_i = 0 \quad \text{Pour} \quad Z = b_1$$

La pression atmosphérique est prise comme pression de référence ce qui permet d'avoir :

$$P_i = \frac{6 \mu \dot{h}_i}{h_i^3} Z^2 - \left(\frac{P_{ai}}{b_1} + \frac{6 \mu \dot{h}_i}{h_i^3} b_1 \right) Z + P_{ai} \quad (\text{II.14})$$

L'équation (II.15) pour : $0 \leq Z \leq b_1$

$$P_i = \frac{6 \mu \dot{h}_i}{h_i^3} Z^2 - \left(\frac{P_{ai}}{b_1} + \frac{6 \mu \dot{h}_i}{h_i^3} (b_1 + 2b) \right) Z + \left(\frac{P_{ai}}{b_1} + \frac{6 \mu \dot{h}_i}{h_i^3} b \right) (b_1 + b) \quad (\text{II.15})$$

L'équation (II.16) pour : $(b_1 + b) \leq Z \leq -b$

Cas particulier

Pour $\dot{h}_i = 0$ (cas statique)

$$P_i = P_{ai} \left(1 - \frac{Z}{b_1} \right) \quad (\text{II.16})$$

$0 \leq Z \leq b_1$

$$P_i = \left(\frac{P_{ai}}{b_1} \right) (Z + b + b_1) \quad (\text{II.17})$$

$-(b + b_1) \leq Z \leq -b$

II.4.1.2. Calcul des caractéristiques

a) Charge portante

La charge portante pour une longueur L relative à la butée à simple effet n° i s'écrit :

$$W_{P_i} = \int_S P_i ds = \int_{S_1} P_{ai} ds + 2 \int_{S_2} P_i ds \quad (\text{II.18})$$

Où S représente la surface totale du patin de la butée à simple effet, S_1 la surface de l'alvéole et S_2 la surface des portées de largeur b_1 .

Après intégration, on obtient :

$$W_{P_i} = P_{ai} L (b_1 + b) - \frac{2 \mu \dot{h}_i}{h_i^3} b_1^3 L \quad (\text{II.19})$$

On peut écrire cette relation sous une forme plus générale :

$$W_{P_i} = P_{ai} S K_w - \frac{2 \mu \dot{h}_i}{h_i^3} b_1^3 L \quad (\text{II.20})$$

Où K_w est un coefficient de la charge compris entre 0 et 1 : tel que $K_w = 1 - (b_1/B)$

La relation (II.21) peut également s'écrire :

$$W_{Pi} = \beta_i P_S S K_w - \frac{2\mu \dot{h}_i}{h_i^3} b_1^3 L \quad (\text{II.21})$$

Où $\beta_i = P_{ai}/P_S$ représente le rapport de la pression dans l'alvéole à la pression fournie par la pompe relative à la butée à simple effet.

Cas particulier

Pour : $\dot{h}_i = 0$ (cas statique)

La charge portante relative à la butée à simple effet n° i est déduite de la relation (II.21) :

$$W_{Pi} = \beta_i P_S S K_w \quad (\text{II.22})$$

b) Débit du lubrifiant

❖ Débit du lubrifiant sortant de l'alvéole suivant l'axe Z

La vitesse du fluide est donnée par la relation [5] :

$$u_{zi} = \frac{1}{2\mu} \frac{dP_i}{dZ} y(y - h_i) \quad (\text{II.23})$$

Le débit volumique Q_{Si} du fluide qui sort de la butée n° i est obtenu par intégration de la vitesse :

$$Q_{Si} = L \int_0^{h_i} u_{zi}(Z = b_1) - L \int_0^{h_i} u_{zi}(Z = -b_1 - b) dy \quad (\text{II.24})$$

$$Q_{Si} = \frac{L h_i^3 \left(P_{ai} - \frac{6\mu \dot{h}_i}{h_i^3} b_1^2 \right)}{6b_1\mu} \quad (\text{II.25})$$

Soit en introduisant le coefficient du débit K_Q :

$$K_Q = \frac{L}{6b_1} \quad (\text{II.26})$$

La relation (II.26) devient :

$$Q_{Si} = \frac{h_i^3 \left(P_{ai} - \frac{6\mu \dot{h}_i}{h_i^3} b_1^2 \right)}{\mu} K_Q \quad (\text{II.27})$$

D'où on peut déduire que le débit relatif à la butée à simple effet n° i est donné par :

$$Q_{Si} = \frac{h_i^3 \left(\beta_i P_S - \frac{6\mu \dot{h}_i}{h_i^3} b_i^2 \right)}{\mu} K_Q \quad (\text{II.28})$$

Cas particulier

Pour : $\dot{h}_i = 0$ (cas statique), le débit volumique Q_{Si} du fluide relatif à la butée n° i est déduit de la relation (II.29) :

$$Q_{Si} = \frac{\beta_i P_S h_i^3}{\mu} K_Q \quad (\text{II.29})$$

❖ Débit de la variation du volume dans l'alvéole

Le débit dû à la variation du volume dans l'alvéole relatif à la butée à simple effet n° i est donné par [5] :

$$Q_{voli} = \frac{\partial V_i}{\partial t} \quad (\text{II.30})$$

Avec :

$$\begin{cases} V_i = S_l \times e_i \\ e_i = h_i + e_a \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Où : V_i est le volume de l'alvéole relatif à la butée à simple effet n° i , S_l surface de l'alvéole, e_i est l'épaisseur de film de l'alvéole relative à la butée à simple effet n° i , e_a la profondeur de l'alvéole et h_i l'épaisseur de film dans la zone de surface de la portée relative à la butée à simple effet n° i .

Ainsi :

$$Q_{voli} = S_l \frac{dh_i}{\partial t} \quad (\text{II.32})$$

❖ Débit des résistances hydrauliques de type capillaire

Parmi les types de résistances hydrauliques les plus fréquemment utilisés, on cite les types capillaires (Fig. II.7). Un capillaire [5] est un tube relativement long dont le rapport de la longueur l_c au rayon r est grand ($l_c / r > 50$); lorsque l'écoulement est laminaire (c'est à dire pour des nombres de Reynolds inférieurs à 1000) le débit est donné par la loi de Hagen-Poiseuille [5] :

$$Q_{ri} = \frac{\pi d_c^4}{128 \mu l_c} (P_S - P_{ai}) \quad (\text{II.33})$$

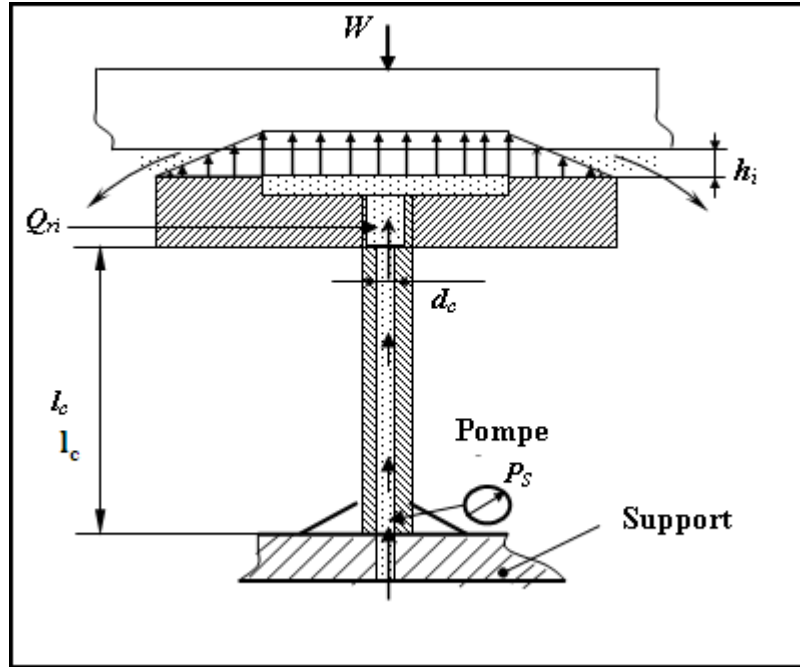


Figure II.7 : Résistance hydraulique de type capillaire

Avec :

P_{ai} : Pression dans l'alvéole relative à la butée à simple effet n° i .

P_S : Pression d'alimentation.

d_c : Diamètre du capillaire.

l_c : Longueur du capillaire.

μ : Viscosité dynamique.

Le calcul de la pression dans l'alvéole relative à la butée à simple effet n° i est effectué en écrivant la conservation du débit volumique, en tenant compte de la variation du volume de fluide dans l'alvéole due au déplacement du grain mobile.

L'équation de conservation du débit volumique s'écrit :

$$Q_{ri} = Q_{Si} + Q_{vol i} \quad (\text{II.34})$$

Où :

Q_{ri} : Débit à travers une résistance hydraulique relatif à la butée à simple effet n° i .

Q_{Si} : Débit sortant de l'alvéole relatif à la butée à simple effet n° i .

$Q_{vol i}$: Débit dû à la variation du volume d'alvéole relatif à la butée à simple effet n° i .

L'équation (II.34) peut s'écrire comme suit :

$$Q_{ri} = \frac{\pi d_c^4}{128 \mu l_c} (P_S - P_{ai}) = Q_{Si} + Q_{vol i} \quad (\text{II.35})$$

Le calcul de la pression dans l'alvéole relative à la butée à simple effet n° i est déterminé à partir de la résolution de l'équation linéaire de la conservation du débit volumique (II.35).

II.4.1.3. Calcul de la pression dans l'alvéole

Lorsque l'écoulement est laminaire, le débit pour une résistance hydraulique de type capillaire est donné par la loi de Hagen-Poiseuille :

$$Q_{ri} = \frac{\pi d_c^4}{128 \mu l_c} (P_S - P_{ai}) = \frac{K_C}{\mu} (P_S - P_{ai}) \quad (\text{II.36})$$

Où :

$$K_C = \frac{\pi d_c^4}{128 l_c} \quad (\text{II.37})$$

L'égalité du débit du capillaire à celui de débit sortant de la butée à simple effet n° i permet d'exprimer la pression dans l'alvéole P_{ai} :

Soit :

$$\frac{K_C}{\mu} (P_S - P_{ai}) = \frac{h_i^3 \left(P_{ai} - \frac{6 \mu \dot{h}_i}{h_i^3} b_l^2 \right)}{\mu} K_Q + S_l \dot{h}_i \quad (\text{II.38})$$

Ainsi donc :

$$P_{ai} = \frac{K_C P_S - \mu \dot{h}_i + (S_l - 6 b_l^2 K_Q)}{K_Q h_i^3 + K_C} \quad (\text{II.39})$$

Cas particulier

Pour : $\dot{h}_i = 0$ (cas statique)

La pression dans l'alvéole relative à la butée à simple effet n° i est déduite de la relation (II.40) :

$$P_{ai} = \frac{P_S}{\left(1 + \frac{K_Q}{K_C} h_i^3\right)} \quad (\text{II.40})$$

Et :

$$\beta_i = \frac{1}{\left(1 + \frac{K_Q}{K_C} h_i^3\right)} \quad (\text{II.41})$$

II.4.2. Palier hydrostatique infiniment long à trois patins

III.4.2.1. Calcul les caractéristiques

a) Charge totale

La charge totale de palier hydrostatique infiniment long à trois patins est obtenue en faisant la somme des charges portantes correspondantes aux trois butées à simple effet. La charge totale de palier hydrostatique infiniment long à trois patins est donnée dans le repère $(O_I, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ par :

$$F_X = -(W_{P2} - W_{P3}) \cos(\pi/6) \quad (\text{II.42})$$

$$F_Y = -(W_{P1} - (W_{P2} + W_{P3})) \sin(\pi/6) \quad (\text{II.43})$$

Cas particulier

Pour : $\dot{h}_i = 0$ (Cas statique)

Et $F_Y = 0 \Rightarrow (W_{P4} = W_{P2})$

La charge totale de la butée hydrostatique infiniment longue à double effet est donnée dans le repère $(O_I, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ par :

$$F_X = P_S S K_W (\beta_3 - \beta_1) \quad (\text{II.44})$$

La charge totale s'écrit :

$$W = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = F_X = P_S S K_W (\beta_3 - \beta_1) \quad (\text{II.45})$$

b) Débit du lubrifiant total

Le débit du lubrifiant total de palier hydrostatique infiniment long à trois patins est obtenu en faisant la somme des débits correspondants aux trois butées à simple effet.

Ainsi,

$$Q = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{h_i^3 \left[\beta_i P_S - \frac{6\mu \dot{h}_i}{h_i^3} b_1^2 \right] K_Q}{\mu} + S_1 \dot{h}_i \right) \quad (\text{II.46})$$

Cas particulier

Pour : $\dot{h}_i = 0$ (Cas statique)

Le débit du lubrifiant total de palier hydrostatique infiniment long à trois patins est déduit de la relation (II.47) :

$$Q = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{h_i^3 \beta_i P_S K_Q}{\mu} \right) \quad (\text{II.47})$$