



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Ouvrages d'Art et Infrastructures (O.A.I)

Présenté par :

HAMICHE MILOUD

KILANI MOHAMED

Sujet du mémoire

**ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE
DES PLAQUES FGM AYANT UN COEFFICIENT
DE DILATTATION THERMIQUE QUI VARIE A
TRAVERS L'ÉPAISSEUR AVEC DIVERS
CONDITION D'APPUI**

Soutenu publiquement le 30 / 05 /2016 devant le jury composé de :

Mr ABDE LAZIZ HADJ HENNI

Président

Mr HADJI LAZREG

Rapporteur

Mr DRAICHE KADA

Examineur

Mr TLIDJI YUCEF

Examineur

Mm KHLIFA ZOUBIDA

Examineur

PROMOTION : JUIN 2016

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	08
Figure .I.2 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées la direction verticale.....	08
Figure I.3 : La distribution composante des matériaux matériau plan compose(A), matériau relie(B), matériau a gradient de propriété(C).	10
Figure I.4 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.	11
Figure I.5 : Les dimensions de la plaque FGM.....	12
Figure I.6 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.	13
Figure I.7 : La variation du module de Young dans une plaque S-FGM.....	14
Figure .I.8 : La variation du module de Young de la plaque E-FGM.	15
Figure II.1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.	22
Figure. II.2. : Cinématique de d'ordre supérieur Reissner-Mindlin.....	23
Figure. II.3 : Variation de la fonction de gauchissement.....	24
Figure II.4 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.	25
Figure. II.5 : Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique.....	28
Figure II.6 : Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique.....	29
Figure. II.7 : Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.....	29
Figure. II.8 : Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre élevée. pour raffiné les effets de cisaillement.	30
Figure IV.1 : Géométries de la plaque FGM.	45
Figure IV.2 : la charge critique de flambement T_{CR} d'une plaque carrée encastree en FGM sous une élévation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport (a/b) avec (a/h=100).....	56

Figure IV.3 : la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encastrée en FGM sous une élévation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport (a/h) avec $(a/b = 1)$57

Figure IV.4 : la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encastrée en FGM sous une élévation uniforme, linéaire et non-linéaire ($\gamma=3$) de température pour différentes valeurs du rapport (a/b) avec $(a/h=100$ et $k=2)$57

Figure IV.5: la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encastrée en FGM sous élévation uniforme, linéaire et non-linéaire ($\gamma=3$) de température en fonction du rapport d'anisotropie « E_m/E_c » avec $(a/h=100$ et $k=2)$58

Figure IV.6 : la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encastrée en FGM sous élévation uniforme, linéaire et non- linéaire ($\gamma=3, \gamma=5, \gamma=10$) de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k avec $(a/h = 100, a/b=1)$59

Figure IV.7 : la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encastrée et simplement appuyé en FGM sous une élévation uniforme, linéaire et non-linéaire ($\gamma=3$) de température pour différentes valeurs du rapport (a/b) avec $(a/h=100, k=2)$ 59

Liste des notations :

$[]$	Matrice.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
E	Module de Young.
E_c	Module de Young de la céramique.
E_m	Module de Young de métal.
E_1	Module de Young de la face supérieure.
E_2	Module de Young de la face inférieure.
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z ».
$\alpha(z)$	Coefficient de dilatation thermique en fonction de « z ».
α_c, α_m	Coefficient de dilatation thermique de la céramique et du métal.
ν	Coefficient de Poisson.
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z ».
$V(z)$	Fraction volumique.
k	Paramètre de matériau.
γ	Exposant de la température.
a, b, h	Dimensions de la plaque.
u, v, w	Les déplacements suivant les directions x, y et z.
w_α	rotation due à la flexion (sans cisaillement).

u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la Plaque.
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse).
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z .
g	$1 - f'(z)$
$g(z)$	Module de cisaillement en fonction de « z ».
T	Temps.
T_{cr}	Charge critique de flambement thermique.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales.
$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xy}$	Contraintes de cisaillement.
$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y$	Déformations dans les directions x et y .
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion.
$\delta_u, \delta_v, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement.
W_b	Composante de la flèche due à la flexion.
W_s	Composante de la flèche due au cisaillement.
N	Efforts normaux de membrane.
K_x^b	Courbure de flexion suivant x .
K_y^b	Courbure de flexion suivant y .
K_x^s	Courbure de cisaillement suivant x .

K_y^s	Courbure de cisaillement suivant y.
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moment supplémentaire du à la flexion.
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse.
S_{xz}^s, S_{yz}^s	Effort de cisaillement.
N_x^T, N_y^T	Contraintes résultants due aux chargements thermique.
$M_x^{bT}, M_y^{bT}, M_x^{sT}, M_y^{sT}$	Moment résultants due aux chargements thermique.
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque.
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque.
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque.
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement.
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité.
$X_m(x), Y_n(y)$	Fonctions admissibles.
$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$	Paramètres arbitraires.
N_{cr}	La charge critique de flambement.

T_c, T_m	Températures de la surface supérieure et inférieure (céramique et métal).
T_f, T_i	Température initiale et finale respectivement.
ΔT	Différence de température de flambement.
$T(z)$	Chargement thermique.
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Les opérateurs différentiels.
∂	Dérivée partielle.
i, j	Nombres naturels.
$q(x, y)$	La charge extérieure.
$\{ \Delta \}$	Le vecteur des déplacements généralisés.
$[k]$	La matrice de rigidité.

Liste des tableaux

CHAPITRE III

Tableau III.1 les fonctions admissibles $X(x)$ et $Y(y)$	40
--	-----------

CHAPITRE IV

Tableau IV.1 Hypothèses et cinématiques pour différent théories de plaques.....	47
--	-----------

Tableau IV.2 La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque simplement appuyée en <i>FGM</i> sous une variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et du rapport (a/b) ($a=100h$)	49
---	-----------

Tableau IV.3 La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque simplement appuyée en <i>FGM</i> sous élévation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et le rapport d'aspect (a/b) ($a=100h$)	51
--	-----------

Tableau IV.4 : La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque simplement appuyée en <i>FGM</i> sous élévation non-linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport a/b et L'exposant de température « γ » ($a=10h$)	53
--	-----------

Tableau IV.5 La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque encastree en <i>FGM</i> sous élévation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et le rapport du coté/épaisseur (a/h), ($a/b = 1$)	54
--	-----------

Tableau IV.6 La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque encastree en <i>FGM</i> sous élévation non-linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et le rapport (a/b), et L'exposant de température « γ » avec ($a/h=10$)	55
--	-----------

Tableau IV.7 La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque encastree en <i>FGM</i> sous élévation de température non-linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance « k » et le rapport d'aspect (a/b), et L'exposant de température « γ » avec ($a/h = 20$)	56
--	-----------

SOMMAIRE

REMERCIEMENT.....	I
LISTE DES TABLEAUX.....	VII
LISTE DES FIGURES.....	VIII
LISTE DES NOTATIONS.....	X
RESUME.....	XIV
ABSTRACT.....	XV
.ملخص.....	XVI
INTRODUCTION GENERALE	2
GENERALITES SUR LES MATERIAUX FGM.....	6
I.1 INTRODUCTION.....	7
I.2. LA DEFINITION ET LE CONCEPT D’UN MATERIAU A GRADIENT DE PROPRIETE.....	7
I.3. L’INTERET D’UTILISATION D’UN FGM.....	9
I.3.1. DIFFERENCE ENTRE FGM ET LES MATERIAUX COMPOSITES TRADITIONNELS.....	9
I.4. PROPRIETE MATERIELLE EFFECTIVE D’UN MATERIAUX FGM.....	10
I.5. REVUE SUR LES DIFFERENTES LOIS QUI REGISSENT LA VARIATION DES PROPRIETES MATERIELLE DES PLAQUES FGM.....	11
I.5.1.PROPRIETE MATERIELLE DE LA PLAQUE P-FGM	11
I.5.2. PROPRIETE MATERIELLE DE LA PLAQUE S-FGM.....	13
I.5.3.PROPRIETE MATERIELLE DE LA PLAQUE E-FGM.....	14
I.6.PROPRIETES PHYSIQUES ET MECANIQUES DES FGM	15
I.6.1. PROPRIETES DES ALLIAGES D’ALUMINIUM	16
I.6.2. RESISTANCE A LA CORROSION	16
I.6.3. PROPRIETE PHYSIQUE DE CERAMIQUE.....	17

I.6.4. PROPRIETE MECANIQUE DE CERAMIQUE.....	17
I.6.5. PROPRIETE DE CERAMIQUE	17
I.7.DOMAINE D'APPLICATION DES FGM.....	18
I.8. CONCLUSION	19
LES THEORIES ES PLAQUES FGM.....	20
II.1. INTRODUCTION	21
II.2. DIFFERENTS MODELES DES STRUCTURES COMPOSITES DANS L'ELASTICITE BIDIMENSIONNELLES.....	21
II.2.1.APPROCHE MONOCOUCHE EQUIVALENTE	21
II.2.1.1.LES MODELES CLASSIQUES LOVE-KIRCHHOFF (THEORIE CLASSIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES CPT).....	21
II.2.1.2 LES MODELES REISSNER-MINDLIN (THEORIE DE DEFORMATION EN CISAILLEMENT DU PREMIER ORDRE FSDPT).....	22
II.2.1.3.LES MODELES D'ORDRE ELEVEE(HSDPT)	24
II.2.2. APPROCHE PAR COUCHE.....	27
II.2.2.1. LES MODELES ZIG-ZAG	29
II.2.2.2. LES MODELES COUCHES DISCRETES	31
II.3. CONCLUSION.....	31
ANALYSE DE FLAMBEMENT THERMIQUE DES PLAQUES A GRADIENT EVALUEES FGM.....	32
III.1. INTRODUCTION.....	33
III.2.FORMULATIONS THEORIQUES.....	33
III.2.1.CHAMP DE DEPLACEMENT ET DEFORMATION.....	33

III.2.2 RELATIONS CONSTITUTIVES.....	34
III.3. ÉQUATIONS DE STABILITE.....	36
III.4. METHODE DES VARIABLES SEPARÉE POUR LE FLAMBEMENT THERMIQUE DES PLAQUES FGM	39
III.5 FLAMBEMENT DE LA PLAQUE FGM SOUS AUGMENTATION DE TEMPERATURE.....	42
III.5.1 FLAMBEMENT DE LA PLAQUE FGM SOUS AUGMENTATION UNIFORME DE TEMPERATURE.....	42
III.5.2 LE FLAMBEMENT DE LA PLAQUE FGM SOUMISE A UNE VARIATION DE TEMPERATURE GRADUÉE A TRAVERS L'ÉPAISSEUR... 	42
III.6. CONCLUSION	43
VALIDATION ET COMPARAISON DES RESULTATS.....	44
IV.1 INTRODUCTION.....	45
IV.2. CONFIGURATION GEOMETRIQUE	45
IV.3. PROPRIETES DES MATERIAUX.....	46
IV.4. RESULTATS ET DISCUSSION.....	46
IV.4.1.ÉTUDES COMPARATIVES.....	46
IV.5. CONCLUSION	60
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	61
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	63
ANNEXE 1.....	66
ANNEXE 2.....	68
ANNEXE 3.....	70
ANNEXE 4.....	72
ANNEXE 5.....	75
ANNEXE 6.....	77

Introduction générale

Introduction :

Les matériaux à gradient évalués (FGM) sont une nouvelle gamme des structures composites qui ont un grand intérêt pour la conception et la fabrication d'ingénierie. Ces types de matériaux possèdent des propriétés souhaitables pour des applications spécifiques, en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, le biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil, soumise à des concentrations des contraintes et des contraintes thermiques et résiduelles élevées.

Généralement, les FGM sont des composites avancés, macroscopiquement et microscopiquement hétérogènes qui sont réalisés par exemple à partir d'un mélange de céramique et de métal avec une gradation continue de composition à travers l'épaisseur. Ceci est réalisé par une variation graduelle de la fraction volumique des matériaux constitutifs.

Suite à l'importance de ces matériaux ainsi que leur large application, des analyses statiques, vibratoires, thermomécaniques et de flambement des structures en FGM ont été exposé par de nombreux chercheurs.

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort. Les propriétés physiques d'un matériau composite sont complètement différentes de celles de leurs composantes. La matrice à généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort, elle joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Mais l'optimisation locale des propriétés de ce mélange, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface.

Cette transition brutale de composition peut générer localement de fortes concentrations des contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Matériel " F.G.M ")

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé, ces type de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

Le concept de " Matériaux à Gradient de Propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion.

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.....

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux.

Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogène. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques".L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, L'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... .

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance de leur comportement thermique.

Le but de ce travail est d'étudier le comportement mécanique des plaques FGM ayant un coefficient de dilatation thermiques qui varie à travers l'épaisseur.

Notre mémoire s'articule autour de deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir les aspects:

-Théorique.

-Analytique.

L'aspect théorique comprend deux chapitres :

Le premier chapitre Généralités sur les matériaux à gradients de propriétés de type FGM.

Dans le deuxième chapitre, les différentes théories applicables aux plaques FGM ont été étudiées et analysées.

L'aspect Analytique comporte deux chapitres :

Une étude analytique du problème de flambement thermique des matériaux à gradients de propriétés type FGM à été présenté en détail par une nouvel théorie de cisaillement des

plaques raffinée avec une nouvelle fonction de forme. Cette fonction satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces (supérieure et inférieure) de la plaque. On suppose que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la plaque FGM selon une distribution de puissance (P-FGM).

Le quatrième chapitre est consacré pour la validation des résultats numériques en utilisant cette nouvelle théorie de cisaillement.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette nouvelle théorie dans la résolution du comportement de flexion thermomécanique des plaques sandwiches en FGM ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futurs.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX A
GRADIENTS DE PROPRIETIES FGM

I.1. Introduction

Un matériau n'est pas de la matière première brute, mais une matière élaborée en vue d'un usage. Cela nécessite une symbiose entre la préparation de nouveaux composés et la conception de nouveaux objets. Il est évident que la diversité des matériaux modernes est telle qu'on ne peut en faire une présentation exhaustive en quelques lignes. Il est plus en plus difficile de faire un choix entre les matériaux dits « traditionnels » comme le bois, le béton et l'acier et les matériaux « évolutifs » comme les céramiques, les métaux, les plastiques. la tendance actuelle n'est d'ailleurs pas de les opposer comme des ennemis mais de les marier pour engendrer des matériaux plus performants tels que le matériau à gradient de propriétés « FGM ».

I.2. La définition et le concept d'un matériau a gradient de propriété

Un matériau a gradient de propriété c'est un type de matériaux composé de deux ou plusieurs matériaux relatif a des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé.

Ces matériaux FGM sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique (Figure. I.1) par un processus de métallurgie de poudre .le coté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. En revanche, le céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est placé dans les régions de grands gradient de la température.

Le concept de matériaux à gradient de propriétés a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai).L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion Un exemple d'un tel matériau est montré sur la (Figure. I.2) où des particules sphériques ou presque sphériques.

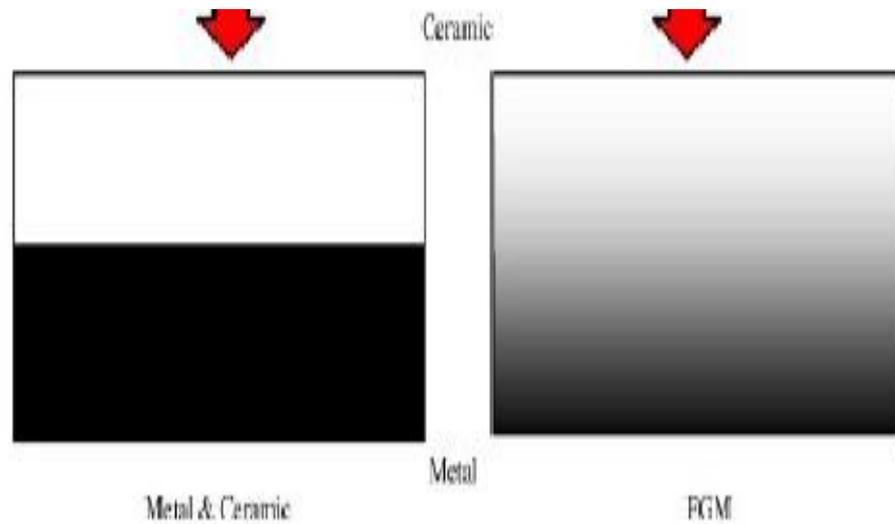


Figure. I.1 : Un type d'un matériau FGM en céramique et métal [Hadji 2012]

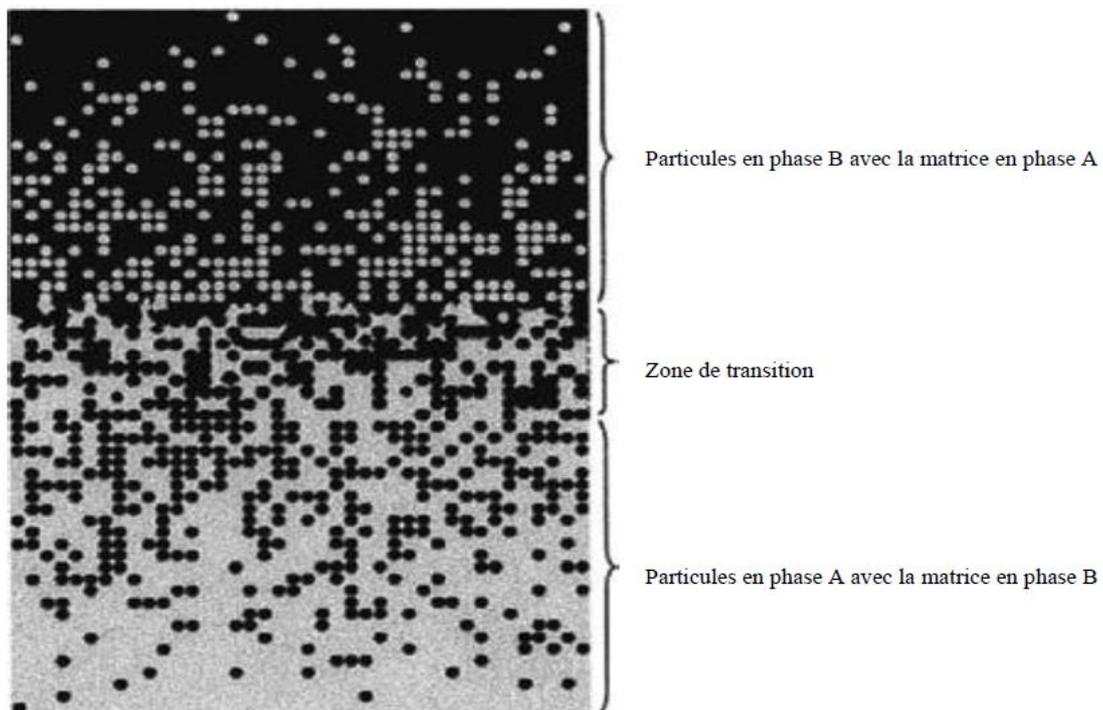


Figure. I.2 : Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale [ELOMARI 2011].

Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que couches en céramique barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques...etc.

D'autres application potentielles de ce matériau sont diverses et nombreuses, elles ont été récemment, rapporté dans la littérature ouverte par exemples, des sondes des déclencheurs des armure métal \ céramique, des détecteurs photoélectriques et des implant dentaires Un certain nombre de revues traitant les différent aspects de ce matériau ont été éditées pendant les deux dernière décennies. Il a été montré dans ces revues que la majorité des recherches récentes en FGM sont concentrés sur l'analyse mécanique de la rupture ainsi que sur les contraintes thermiques.

Dans l'avenir, les FGM avec des propriétés des formes complexes x, y compris les deux et gradients en trois dimensions, seront produits en utilisant la fabrication assistée par ordinateur. Ce potentiel signifie que le concepteur n'est plus limité à une palette du matériel existant homogène. Bien que beaucoup de recherches ont été consacrées à l'analyse des FGM, les ingénieurs et autres professionnels engagés dans le processus de conception avec les FGM manquent de cadre unifié pour la prise de décisions concernant la façon de tirer le meilleur partie du choix possibles en fonction de ce "menu" d'ingrédients produits et de matières disparates [Kawthar. Elomari 2011, Nora. Kassimi 2011].

I.3. L'intérêt d'utilisation d'un FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM [Nora. Kassimi 2011].

I.3.1. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure .I.3) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des

deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption [Kawthar. ELOMARI 2011].

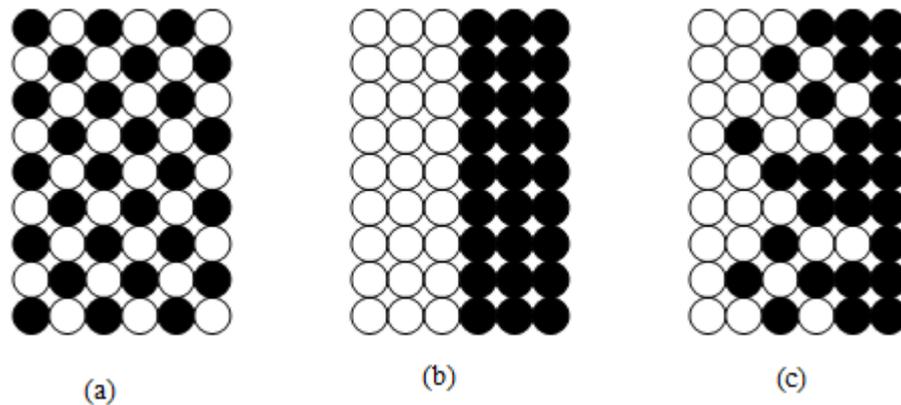


Figure. I.3 : La distribution composante des matériaux matériau plan compose(A), Matériau relie (B), Matériau à gradient de propriété (B) [Kawthar. ELOMARI 2011].

I.4. Propriété matériel effective d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM. La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. I.4.a). La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. I.4.b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur) [Kawthar. Elomari 2011].

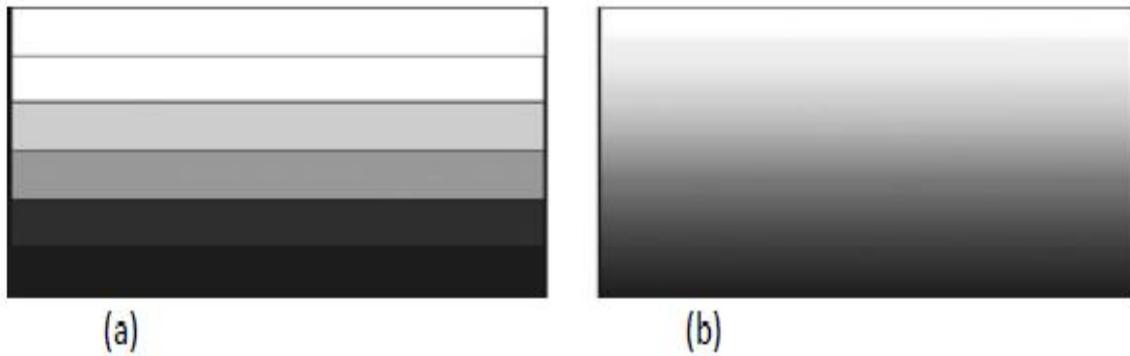


Figure. I.4 : Modèles analytiques pour une couche en FGM [Kawthar. Elomari 2011].

I.5. Revue sur les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielle suivant l'épaisseur d'une plaque FGM

Considérant une plaque élastique rectangulaire (figure .I.5). Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z lancé sur la surface moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés matérielles comme suite : le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieure et inférieure sont différents mais sont déterminés selon les demandes d'exécution. Cependant, le module de Young, la densité et le coefficient de Poisson des plaques changent sans interruption seulement dans la direction d'épaisseur (l'axe z), $E = E(z)$, $\rho = \rho(z)$, $\nu = \nu(z)$. Et ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est beaucoup moins important que celui du module de Young. Donc, on suppose que le coefficient de Poisson de la plaque F.G.M est constant dans tout point de la plaque, d'ailleurs cette propriété est sensiblement la même pour les matériaux avec lesquels on va travailler. Alors le module de Young et la densité changent dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), ou une fonction sigmoïde (S-FGM).[HASSEN. Ait Atman 2011].

I.5.1 : Propriété matérielle de la plaque P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assure par une loi de puissance sous la forme [HASSEN. Ait Atman 2011, Nora. Kassimi 2011].

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (\text{I.1})$$

Où

K est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Hassen. Ait Atman 2011, Nora. Kassimi 2011].

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.2)$$

Où

E_1 et E_2 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = h/2$) et de la surface supérieure ($z = -h/2$) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (figure .I.6), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$. [Nora. Kassimi 2011, lazreg. Hadji 2012].

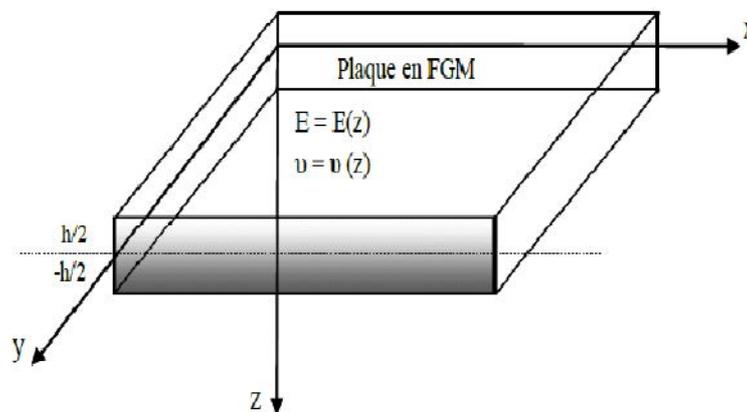


Figure. I.5 : Les dimensions de la plaque FGM.

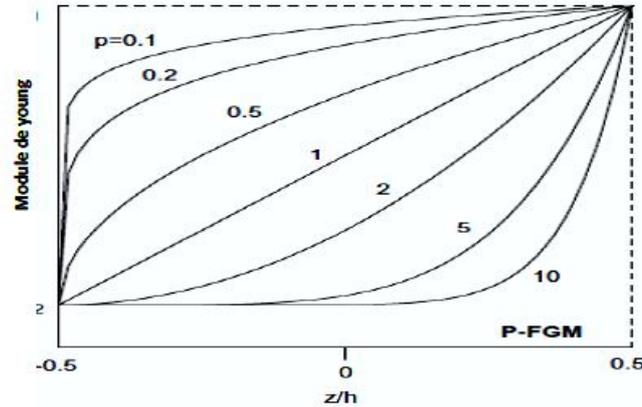


Figure. I.6 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

Comme il est présenté sur la (figure .I.7), le changement de la valeur de P produit un nombre infini de distributions de composition. Afin de modéliser exactement les propriétés matérielles de FGM, les propriétés doivent avoir une dépendance entre la température et la position. Pour une résolution numérique en utilisant les éléments finis par exemple, Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, comme le module de Young E , et la densité ρ et le coefficient de poisson ν peut alors être exprimé comme suit :

$$S = \sum_{j=1} S_j \cdot g_j \quad (\text{I.3})$$

La où S_j Et g_j sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche jj (figure.I.4) et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait unité :

$$\sum_{j=1} g_j = 1 \quad (\text{I.4})$$

I.5.2. Propriété matérielle de la plaque S-FGM

Si l'on rajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par [lazreg. Hadji 2012].

$$V(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^K \quad \text{Pour} \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.5.a})$$

$$V(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_2(z).E_1 + [1 - V_2(z)].E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.6.a})$$

$$E(z) = V_1(z).E_1 + [1 - V_1(z)].E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.6.b})$$

La (figure I.8) montre que la variation du module de Young selon les équations (I.7.a) et (I.7.b) avec des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée (Plaque S-FGM) [HASSEN. Ait Atman2011] .

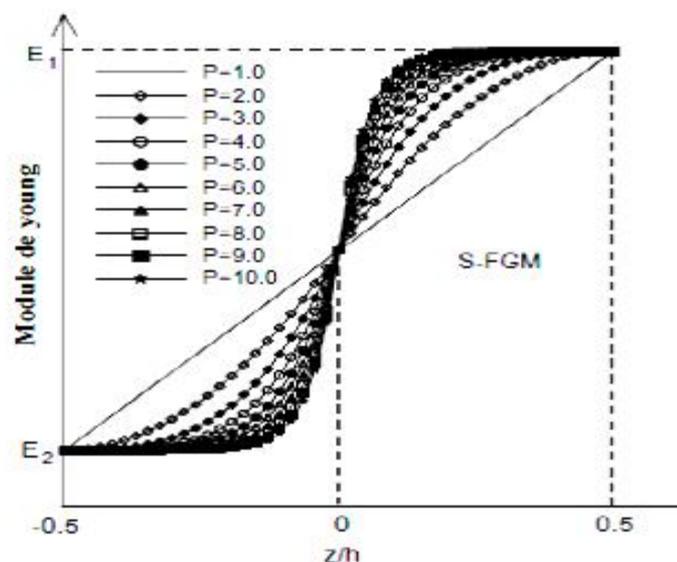


Figure. I.7 : La variation du module de Young dans une plaque S-FGM [Nora. Kassimi 2011]

I.5.3. Propriété matérielle de la plaque E-FGM

$$E(z) = E_2 \cdot e^{B \cdot (z+h/2)} \quad (\text{I.7.B})$$

AVEC :

$$B = \frac{1}{h} \cdot \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I 9

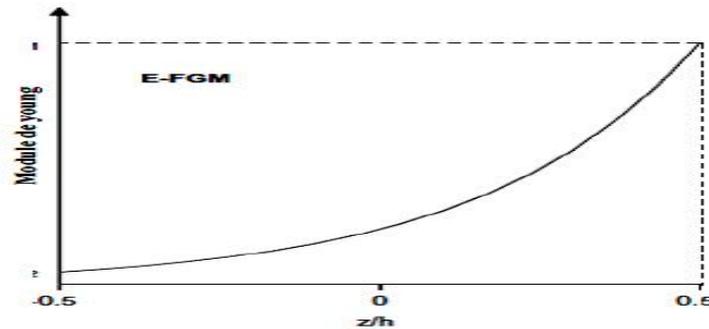


Figure .I.8 : La variation du module de Young de la plaque E-FGM [HASSEN. Ait Atman 2011].

I.6. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

L'aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant. Les propriétés physiques : l'aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660° . Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'aluminium est de 2700 kg/m^3 . L'utilisation de l'aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport. [Nora. Kassimi 2011].

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes [Nora. Kassimi 2011]:

Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

- Résistance à la traction
- Résistance à la pénétration (dureté).

Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

- La malléabilité (mise en feuilles).
- La ductilité (mise en fils).

I.6.1. Propriétés des alliages d'aluminium

L'Aluminium a pour propriétés une :

- Température de travail élevée.
- Très bonne résistance à la corrosion.
- Légèreté.
- Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
- Bon rapport force/poids.
- Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.
- Bonne conductivité thermique.
- Conductivité électrique élevée.
- Entièrement recyclable.
- Bonnes caractéristiques de finition.

I.6.2. Resistance a la corrosion

Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'aluminium résistent à la corrosion. on peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. l'aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état [lazreg. Hadji 2012, Nora. Kassimi 2011].

I.6.3. Propriété physique de céramique

La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater [Nora. Kassimi 2011].

La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. la masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m³. l'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements [lazreg. Hadji 2012].

I.6.4. Propriété mécanique de céramique

Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

- Matières première employées.
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

I.6.5. Propriété de céramique

Les propriétés de la céramique sont :

- un module de YOUNG élevé.
- une dureté élevée(surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).
- une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200MPa)[Nora. Kassimi 2011].

I.7. Domaine d'application des FGM

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations, le matériau FGM peut être utilisé dans plusieurs domaines tels qu'en [Nora. Kassimi 2011, lazreg. Hadji 2012]

-Aéronautique [Lazreg. Hadji 2012]

- L'amélioration des engins spatiaux.
- Création de barrières thermiques.

-Electronique et optique [Lazreg. Hadji 2012]

- Fibres optique avec une grande vitesse de transmission.
- Les circuits d'ordinateurs.
- Les téléphones cellulaires.

-Biomatériaux

- Dents.

-Industrie Nora [Hassen. Ait Atman, Kassimi 2011]

- Les machines.
- Les outils.
- Soudure.
- Structure:
- Cartes mémoires.

-Autres

- Batte de Baseball

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté dans un premier temps les matériaux FGM, et puis en est passé à décrire les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles (module de Young, la masse volumique, coefficient de poisson), ces lois peuvent être de puissance, exponentielles ou même sigmoïde. à la fin nous avons terminés, par les propriétés physiques et mécaniques des matériaux FGM et leur domaines d'applications. le chapitre suivant va porter sur les différentes théories des plaques applicables aux structures FGM.

Chapitre II

LES THEORIES DES PLAQUES FGM

CHAPITRE III

**ANALYSE DE FLAMBEMENT THERMIQUE DES
PLAQUES A GRADIENT EVALUEES FGM**

III.1. Introduction

Les Matériaux Fonctionnellement gradués (FGM) sont de plus en plus utilisés dans de nombreux candidats ingénierie tels que les réacteurs nucléaires et les industries satellites à haute vitesse. Les propriétés mécaniques des FGM varient en douceur et en continu d'une surface à l'autre. Généralement, ces matériaux sont fabriqués à partir d'un mélange de céramique et de métal ou d'une combinaison de différents matériaux. La céramique constitutive du matériel fournit la résistance à haute température en raison de sa faible conductivité thermique. D'autre part Le constituant d'un métal ductile prévient les fractures causées par les contraintes dues au gradient de température élevé dans un très court laps de temps.

Dans ce chapitre, une théorie de plaque raffinée de quatre variables est présentée pour l'analyse du flambement thermique des plaques fonctionnellement gradués (FGM). Cette théorie raffinée donne une variation parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur et satisfait les conditions de surface sans les contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'aide des facteurs de correction de cisaillement.

Une distribution en loi de puissance est utilisée pour décrire la variation de la fraction volumique des matériaux. Les équations d'équilibre et de stabilité sont dérivées en basant sur la présente théorie. Les équations non linéaires gouvernantes sont résolues pour les plaques simplement appuyées soumises à des conditions aux limites. Les charges thermiques sont supposées à une distribution uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque.

L'influence de nombreux paramètres de la plaque sur la différence de température de flambement sera étudiée. On remarque que la théorie des plaques raffinées présenté peut prédire avec précision les températures critiques des plaques simplement appuyées et encastrée fonctionnellement gradués [M, Bouiaidjra].

III.2. Formulations théoriques

III.2.1. Champ de déplacement et déformation

Considérons une plaque FGM rectangulaire d'épaisseur h , de longueur a et de largeur b . La théorie de plaque raffinée de quatre variables utilisée par Tounsi et ses collègues qui prend en compte la variation parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur et satisfait les conditions de surface sans les contraintes sur les surfaces

supérieure et inférieure de la plaque. Le champ du déplacement de cette théorie sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 \mathbf{V}(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 \mathbf{W}(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{III.1}$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements du plan médian de la plaque dans la direction x et y , respectivement; w_b et w_s sont les composantes de déplacement de flexion et de cisaillement transversal, respectivement. La non linéarité des équations déformation -déplacement de Von Karman sont les suivantes :

$$\begin{cases}
 \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f k_x^s \\
 \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f k_y^s \\
 \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f k_{xy}^s \\
 \gamma_{yz} = g(z) \gamma_{yz}^s \\
 \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s \\
 \varepsilon_z = 0
 \end{cases} \tag{III.2}$$

Ou :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2, k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2, k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \\
 k_{xy}^b &= -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{yz}^s &= \frac{\partial w_s}{\partial y}, \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, f(z) = -\frac{1}{4} z + \frac{5}{3} z \left(\frac{z}{h} \right)^2 \\
 \text{et } g(z) &= \frac{5}{4} - 5 \left(\frac{z}{h} \right)^2
 \end{aligned} \tag{III.3}$$

III.2.2 Relations constitutives

Considérons le cas d'une plaque FGM, composé à partir d'un mélange de céramique et de métal. La plaque est soumise à une charge thermique $T(x, y, z)$. On suppose que les

propriétés du FGM varient à travers l'épaisseur de la plaque. La variation des propriétés matérielles peuvent être exprimés comme :

$$p^{(n)}(z) = p_b + (p_t + p_b)V_t \quad (III.4)$$

Où P est la propriété matérielle comme les modules et P_t et P_b sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement. De plus V_t dans l'équation. (4) représente la fraction volumique du constituant de la face supérieure et suit une simple loi de puissance comme :

$$V_t = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\kappa \quad (III.5)$$

Où $0 \leq \kappa \leq \infty$ est un paramètre qui détermine le profil de variation de matériau à travers l'épaisseur. Ici, nous supposons que les modules E , G et le coefficient de dilatation thermique α varient en fonction de l'équation. (III.4) et le coefficient de Poisson ν est supposé constant. Les relations constitutives linéaires sont :

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{cases}$$

(III.6)

et

$$\begin{cases} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{cases}$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ sont les composants de contraintes et de déformations, respectivement. Utilisant les propriétés matérielles définies en Eq (III.4) les Coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (III.7a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad (III.7b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (III.7c)$$

III.3 Équations de stabilité

L'énergie potentielle totale de la plaque FG peut être écrite comme

$$U = \frac{1}{2} \iiint [\sigma_x(\varepsilon_x - \alpha T) + \sigma_y(\varepsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}] dx dy dz \quad (\text{III.8})$$

Le principe des travaux virtuel pour notre problème peut être exprimé comme suit :

$$\iint \left[\begin{array}{l} N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b \\ + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s \\ + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta k_{yz}^s + S_{xz}^s \delta k_{xz}^s \end{array} \right] dx dy = 0 \quad (\text{III.9})$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x + \sigma_y + \tau_{xy}) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z \\ f(z) \end{array} \right\} dz \quad (\text{III.10a})$$

$$(S_{xz}^s + S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{III.10b})$$

En utilisant l'équation. (6) dans l'équation. (10), les forces résultants de la plaque FGM peuvent être liées aux déformations totales par

$$\left\{ \begin{array}{c} N \\ M^b \\ M^s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{array} \right\}. \quad S = A^s \gamma. \quad (\text{III.11})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\} \quad (\text{III.12a})$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}, M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}, M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\} \quad (\text{III.12b})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \quad (\text{III.12c})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.12d})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.12e})$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}. \quad (\text{III.12f})$$

Où les composants de rigidité de la plaque A_{ij}, B_{ij} , etc sont donnés comme :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{pmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} dz. \quad (\text{III.13a})$$

Et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s)$$

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \quad (\text{III.13b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} [g(z)]^2 dz. \quad (\text{III.13c})$$

Les forces et les moments résultants, $N_x^T = N_y^T$, $M_x^{bt} = M_y^{bt}$ et $M_x^{st} = M_y^{st}$ du aux charges thermiques sont définies par :

$$\begin{pmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1 - \nu} \alpha(z) T \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{pmatrix} dz \quad (\text{III.14})$$

Les équations de stabilité de la plaque peuvent être dérivées par critère d'équilibre adjacent. Supposons que l'état d'équilibre de la plaque FGM sous des charges thermiques est défini en termes des composantes de déplacement $(u_0^0, v_0^0, w_b^0, w_s^0)$. Les composantes de déplacement d'un état stable voisin différencié par $(u_0^1, v_0^1, w_b^1, w_s^1)$ par rapport à la position d'équilibre. Ainsi, les déplacements totaux d'un état voisin sont :

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_b = w_b^0 + w_b^1, \quad w_s = w_s^0 + w_s^1 \quad (\text{III.15})$$

Où le chiffre 1 se réfère à l'état de stabilité et le chiffre 0 se réfère à l'état des conditions d'équilibre. Substituant les équations. (2) et (15) dans l'équation. (9) et en intégrant par partie et ensuite en fait égale les coefficients de $\delta u_0^1, \delta v_0^1, \delta w_b^1, \delta w_s^1$ à zéro, séparément, les équations de stabilité gouvernantes sont obtenus pour les théories des plaques de déformation de cisaillement comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + \bar{N} = 0 \\ \frac{\partial^2 M_x^{s1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{s1}}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} + \bar{N} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.16})$$

Avec

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \quad (\text{III.17})$$

Où les termes N_x^0 et N_y^0 sont les forces de pré-flambement résultantes obtenue comme

$$N_{cr} = N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\alpha(z)E(z)T}{1-\nu} dz \quad (\text{III.18})$$

Pour la plaque CPT, les équations de stabilité sont réduites aux trois premières équations de l'équation (III.16).

Les équations de stabilité en termes des composantes de déplacement peuvent être obtenues en substituant l'équation.(11) dans l'équation (16). les équations résultantes sont en nombre de quatre basée sur la présente théorie raffiné de déformation en cisaillement pour les plaques de FGM.

$$\begin{aligned} & A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_b \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) d_{122} w_s - B_{11}^s d_{111} w_s = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.19a})$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = 0. \quad (\text{III.19b})$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s + N_{cr} = 0 \quad (\text{III.19c})$$

$$B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s + N_{cr} = 0 \quad (\text{III.19d})$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.20})$$

III.4 méthode des variables séparée pour le flambement thermique des plaques FGM :

Plaques rectangulaires sont généralement classés en fonction du type de d'appuis utilisé. Nous sommes concernés ici par la solution exacte de l'équation (III.16) pour une plaque FGM simplement appuyé et encastree.

La solution approximative suivante qui satisfait les équations différentielles et les conditions aux limites :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{mn} \frac{\partial X(x)}{\partial x} Y(y) \\ V_{mn} X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \\ W_{bmn} X(x) Y(y) \\ W_{smn} X(x) Y(y) \end{pmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Les conditions aux limites correspondantes aux bords simplement appuyés et encastrees sont :

- Encastree (C)

$$u_0 = v_0 = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{à } x = 0, a \text{ et } y = 0, b$$

- Simplement appuyés (S)

$$v_0 = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{à } x = 0, a$$

$$u_0 = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{à } y = 0, b$$

	Conditions aux limite		Fonction X(x) et Y(y)	
	Pour x=0,a	Pour y=0,b	X(x)	Y(y)
SSSS	$X(0)=X''(0)=0$	$Y(0)=Y''(0)=0$	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
	$X(a)=X''(a)=0$	$Y(b)=Y''(b)=0$		
	$X(a)=X'(a)=0$	$Y(b)=Y''(b)=0$		
CCCC	$X(0)=X'(0)=0$	$Y(0)=Y''(0)=0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
	$X(a)=X'(a)=0$	$Y(b)=Y'(b)=0$		
	$X''(a)=X'''(a)=0$	$Y(b)=Y'(b)=0$		

Tableau : les fonctions admissibles X (x) et Y (y) .

où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, $\lambda = m\pi / a$ et $\mu = n\pi / b$ et m et n sont les nombres de mode. En substituant l'équation. (III.19) dans l'équation. (16), on obtient :

$$[K]\{\Delta\} = \{0\} \tag{III.22}$$

Où $\{\Delta\}$ représente le vecteur de colonne des inconnus :

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\} \tag{III.23}$$

et $[K]$ est la matrice symétrique donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & s_{33} - \beta Ncr & s_{34} - \beta Ncr \\ S_{14} & S_{24} & s_{34} - \beta Ncr & s_{44} - \beta Ncr \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Dans laquelle :

$$\begin{aligned} S_{11} &= (A_{11}\alpha_{12} + A_{66}\alpha_8) \\ S_{12} &= (A_{11} + A_{66})\alpha_8 \\ S_{13} &= [-B_{11}\alpha_{12} - (B_{12} + 2B_{66})\alpha_8] \\ S_{14} &= -[B_{11}^s\alpha_{12} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_8] \\ S_{21} &= (A_{12} + A_{66})\alpha_{10} \\ S_{22} &= (A_{66}\alpha_{10} + A_{22}\alpha_4) \\ S_{23} &= -[(B_{12} + 2B_{66})\alpha_{10} + B_{22}\alpha_4] \\ S_{24} &= -[(B_{11}^s + 2B_{66}^s)\alpha_{10} + B_{22}^s\alpha_4] \\ S_{31} &= -B_{11}\alpha_{13} + (B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11} \\ S_{32} &= -(B_{12} + 2B_{66})\alpha_{11} + B_{22}\alpha_5 \\ S_{33} &= (D_{11}\alpha_{13} + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_{11} + D_{22}\alpha_5) \\ S_{34} &= (D_{11}^s\alpha_{13} + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha_{11} + D_{22}^s\alpha_5) \\ S_{41} &= B_{11}^s\alpha_{13} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_{11} \\ S_{42} &= (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\alpha_{11} + B_{22}^s\alpha_5 \\ S_{43} &= (D_{11}^s\alpha_{13} + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\alpha_{11} + D_{22}^s\alpha_5) \\ S_{44} &= H_{11}^s\alpha^{13} + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\alpha^{11} + H_{22}^s\alpha^5 - (A_{55}^s)\alpha_9 - (A_{44}^s)\alpha_3 \end{aligned} \quad (\text{III.25a})$$

$$\begin{aligned} N_{cr} &= N_x^0 \\ \xi &= N_y^0 / N_x^0 \end{aligned}$$

Avec

$$\beta = (\xi \alpha_3 + \alpha_9)$$

$$(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5) = \int_0^b \int_0^a (X_m Y_n, X_m Y_n'', X_m Y_n'''') X_m Y_n dx dy$$

$$(\alpha_2, \alpha_4, \alpha_{10}) = \int_0^b \int_0^a (X_m Y_n', X_m Y_n''', X_m'' Y_n') X_m Y_n' dx dy$$

$$(\alpha_6, \alpha_8, \alpha_{12}) = \int_0^b \int_0^a (X_m' Y_n, X_m' Y_n'', X_m''' Y_n) X_m' Y_n dx dy \quad (III.25b)$$

$$(\alpha_7, \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_{13}) = \int_0^b \int_0^a (X_m' Y_n', X_m'' Y_n, X_m'' Y_n'', X_m'''' Y_n) X_m Y_n dx dy$$

La solution non triviale est obtenue quand le déterminant de l'équation (22) est égal à zéro.

III.5 Flambement de la plaque FGM sous augmentation de température

III.5.1 Flambement de la plaque FGM sous augmentation uniforme de température

La température initiale de la plaque est supposée T_i . La température augmente uniformément à une valeur finale T_f dans lequel la plaque flambe. La variation de température est :

$$\Delta T = T_f - T_i. \quad (III.26)$$

Pour trouver les charges de flambement thermique, le déterminant de la matrice des coefficients de l'équation (III.22) doit être nul. Cela donne la charge critique de flambement thermique ΔT_{cr}

III.5.2 le flambement de la plaque FGM soumise à une variation de température graduée à travers l'épaisseur

On suppose que la température de la surface supérieure est T_t et la température varie de T_t , selon une variation en loi de puissance suivant l'épaisseur, à une température de la surface inférieure T_b , dans lequel la plaque flambe. Dans ce cas, la température à travers l'épaisseur est donnée par

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_m \quad (III.27)$$

Où la différence de température de flambement $\Delta T = T_t - T_b$ et γ est l'indice de la température ($0 < \gamma < \infty$). Notez que la valeur de γ égal à 1 représente une variation linéaire de température à travers l'épaisseur, tandis que la valeur de γ supérieure à 1 représente une variation non linéaire de température à travers l'épaisseur. Comme dans le cas de la charge uniforme, la variation de température critique de flambement ΔT_{cr} est obtenue en résolvant le système d'équation (III.22).

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse de flambement thermique des plaques FGM fonctionnellement graduées simplement appuyées et encastées sont examinées par une théorie raffinée à quatre variables. Cette théorie satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieures et inférieures de la plaque FGM.

On assume que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la plaque FGM seulement selon une distribution de loi de mélange. Les équations de stabilité pour la plaque en FGM sont obtenues par le principe d'énergie des travaux virtuels.

Les solutions sont sous forme des charges critiques de flambement pour le cas d'une charge thermique uniforme, linéaire et non linéaire sont obtenues par la résolution du système de l'équation (III.22).

Chapitre IV :

Validation et comparaison des résultats.

IV.1 Introduction

Après le développement dans le chapitre III pour objet est le calcul approchés des grandeurs généralisées sur la base du système d'équation d'équilibre, de compatibilité, de condition aux limites sur les bords, des solution des équations de stabilités sont présentées en résolvant les équations aux valeurs propres III22.

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de la réponse des plaques encastées et simplement appuyée en matériau à gradient évaluée (FGM) au flambement thermique sous variation uniforme, linéaire et non-linéaire de température à travers l'épaisseur. Les propriétés matérielles de la plaque **FGM** sont supposées variables à travers l'épaisseur selon une distribution simple en loi de puissance **P-FGM** et aux termes des fractions volumiques des constituants, des exemples sont présentés afin de démontrer l'efficacité du présent modèle. L'effet de diverses variables sur la charge thermique résultante, tel que le rapport a/h et a/b , l'indice matériel k et le chargement sont tous traités.

Afin de prouver la validité de la présente théorie, les résultats on été obtenue pour les plaques **FGM** est comparée aves ceux déjà existant dans la littérature tels que la théorie classique des plaques (**CPT**), la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre **FSDPT**, et les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevés (**SSDPT** et **HSDPT**) comme indique le tableau IV1.

IV.2. Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire en **FGM** d'épaisseur h , de longueur a et de Largeur b produits en mélangeant deux matériaux distincts (le métal et la céramique). dont le repère des coordonnées est reporté sur la figure V.1.

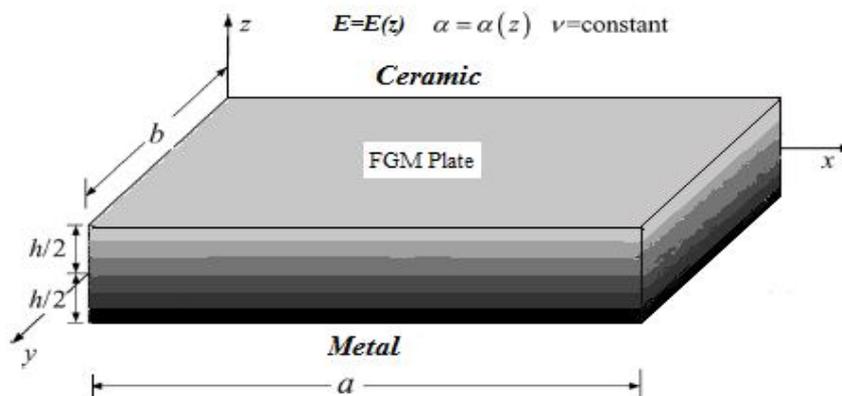


Figure V.1: Géométries de la plaque FGM

IV.3. Propriétés des matériaux

Les matériaux à gradient évalués ou à gradient de propriétés **FGM** sont des matériaux composites ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chacun des constituants (métal et céramique) à travers l'épaisseur, la fonction de loi de puissance est utilisée pour décrire cette variation.

Les propriétés matérielles de la plaque **FGM** sont supposées comme suit:

$$\alpha(z) = \alpha_m + \alpha_{cm} V(z) \quad (\text{IV.1})$$

$$\alpha_{cm} = \alpha_c - \alpha_m \quad (\text{IV.2})$$

$$E(z) = E_m + E_{cm} V(z) \quad (\text{IV.3})$$

$$E_{cm} = E_c - E_m \quad (\text{IV.4})$$

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{IV.5})$$

Avec E_m , α_m et E_c , α_c sont respectivement le module de Young et le coefficient de dilatation thermique des deux matériaux de la plaque (métal et céramique). k est l'indice matériel.

IV.4. Résultats et discussion

IV.4.1. Etudes comparatives

Afin d'illustrer la validité de la présente théorie de déformation de cisaillement parabolique, les résultats ont été obtenus pour les plaques **FGM** et comparées avec ceux issus de la littérature comme indiqué dans le tableau IV1 suivant :

Tableau IV1: Hypothèses et cinématiques pour différent théories de plaques

Théorie	Hypothèses de déplacement très dimensionnel
CPT	$U(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$ $V(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}$
SSDPT	$U(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_x(x, y)$ $V(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_y(x, y)$ $W(x, y, z) = w(x, y)$
FSDPT	$U(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \phi_x(x, y)$ $V(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \phi_y(x, y)$ $W(x, y, z) = w(x, y)$
NHSDPT (Bouhadra 2015)	$U(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \frac{\partial w_s}{\partial x}$ $V(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \frac{\partial w_s}{\partial y}$ $W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$
Présente théorie	$U(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial x}$ $V(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right] \frac{\partial w_s}{\partial y}$ $W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$

Le matériau est constitué d'aluminium et d'alumina avec les propriétés matérielles suivantes :

- Céramique (Alumina, Al_2O_3): $E_c = 380$ GPa; $\nu = 0.3$
- Métal (Aluminium, Al): $E_m = 70$ GPa; $\nu = 0.3$

La corrélation entre la présente théorie des plaques à quatre variables et les différentes théories des plaques à savoir la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (**HSDPT** et **SSDPT**), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDPT**) et la théorie classique des plaques (**CPT**) est illustrée dans les tableaux **IV.2**, **IV.3** et **IV.4**. Ces trois tableaux donnent l'effet du rapport géométrique a/b sur la charge critique de flambement N_{cr} d'une plaque **FGM** sous une élévation de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur respectivement avec des conditions aux limites d'une plaque simplement appuyées sur les quatre bords (SSSS).

A partir des résultats présentés dans les tableaux IV.2 et IV.3, on observe qu'il y a un bon accord entre la présente théorie et les autres théories de cisaillement.

Le tableau IV.2 montre que de la température de flambement augmente par l'augmentation du rapport a/b et diminue avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance k à partir de 0 à 10.

Tableau IV.2 : La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque simplement appuyée en FGM sous une variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport $(\frac{a}{b})$ ($a=100h$)

K	Théories	a/b=1	a/b=2	a/b=3	a/b=4	a/b=5
0	Présente	17.0894	42.6875	85.2551	144.6490	220.6706
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	17.0894	42.6876	85.2553	144.6496	220.6721
	SSDPT	17.0894	42.6876	85.2554	144.6500	220.6729
	HSDPT	17.0894	42.6875	85.2551	144.6490	220.6706
	FSDPT	17.0894	42.6875	85.2551	144.6489	220.6704
	CPT	17.0991	42.7477	85.4955	145.3524	222.2883
1	Présente	7.9400	19.8358	39.6248	67.2506	102.6356
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	7.9400	19.8359	39.6248	67.2509	102.6362
	SSDPT	7.9400	19.8359	39.6249	67.2510	102.6365
	HSDPT	7.9400	19.8358	39.6248	67.2506	102.6356
	FSDPT	7.9400	19.8358	39.6248	67.2506	102.6355
	CPT	7.9437	19.8594	39.7188	67.5220	103.2690
5	Présente	7.2607	18.1332	36.2044	61.4007	93.6198
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	7.2607	18.1330	36.2037	61.3985	93.6148
	SSDPT	7.2606	18.1324	36.2014	61.3921	93.5999
	HSDPT	7.2606	18.1327	36.2025	61.3951	93.6069
	FSDPT	7.2615	18.1380	36.2236	61.4559	93.7481
	CPT	7.2615	18.1642	36.3285	61.7585	94.4542
10	Présente	7.4635	18.6374	37.2035	63.0771	96.1409
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	7.46345	18.6368	37.2013	63.0709	96.1265
	SSDPT	7.4634	18.6365	37.2001	63.0673	96.1183
	HSDPT	7.4634	18.6366	37.2006	63.0687	96.1213
	FSDPT	7.4644	18.6427	37.2246	63.1378	96.2820
	CPT	7.4692	18.6731	37.3463	63.4888	97.1005

Dans le tableau IV.3, on remarque que les résultats de la présente théorie sont presque identiques à ceux donnés par HSDPT et par SSDPT.

Il est conclu que la température de flambement augmente par l'augmentation du rapport a/b , diminue par l'augmentation de l'indice de la loi de puissance (k). De plus, les températures de flambement pour les plaques homogènes (plaque entièrement en céramique) sont considérablement plus élevées aux valeurs obtenues en basant sur la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement. Les différences sont considérables pour les plaques longues et les plaques épaisses.

Tableau IV.3 : La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque simplement appuyée en FGM sous élévation linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport $\left(\frac{a}{b}\right)$ ($a=100h$).

K	Théories	a/b=1	a/b=2	a/b=3	a/b=4	a/b=5
0	Présente	24.1789	75.3751	160.5102	270.2980	431.3412
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	24.1789	75.3753	160.5107	279.2993	431.3442
	SSDPT	24.1789	75.3753	160.5109	279.3000	431.3459
	HSDPT	24.1789	75.3751	160.5102	279.2980	431.3412
	FSDPT	24.1789	75.3751	160.5102	279.2979	431.3409
	CPT	24.1982	75.4955	160.9910	280.6848	431.5767
1	Présente	5.5138	27.8242	64.9376	116.7490	183.1123
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	5.51388	27.8242	64.9378	116.7495	183.1134
	SSDPT	5.5138	27.8242	64.9379	116.7498	183.1140
	HSDPT	5.5138	27.8242	64.9376	116.7490	183.1123
	FSDPT	5.5138	27.8242	64.9376	116.7490	183.1122
	CPT	5.5209	27.8683	65.1140	117.2580	183.3002
5	Présente	3.8912	22.6052	53.7086	97.0725	152.5184
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	3.89133	22.6057	53.7106	97.0784	152.5320
	SSDPT	3.8911	22.6047	53.7068	97.0673	152.5063
	HSDPT	3.8912	22.605	53.7086	97.0725	152.5148
	FSDPT	3.8927	22.6143	53.7450	97.1771	152.7615
	CPT	3.8999	22.6595	53.9256	97.6980	153.9769
10	Présente	4.3653	24.1650	57.0615	102.9015	161.4729
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	4.36540	24.1654	57.0629	102.9054	161.4821
	SSDPT	4.3653	24.1648	57.0607	102.8991	161.4674
	HSDPT	4.3653	24.1650	57.0615	102.9015	161.4729
	FSDPT	4.3670	24.1757	57.1041	103.0240	161.7575
	CPT	4.3757	24.2297	57.3198	103.6459	163.2080

Le tableau IV.4 présente la différence de température critique $t_{cr} = 10^{-3}T_{cr}$ pour différentes valeurs de rapport $\left(\frac{a}{b}\right)$, indice de température γ et l'indice de puissance k sous chargement de température non linéaire à $\left(\frac{a}{h}\right) = 10$ respectivement. On peut conclure à partir des résultats présentés que la présente théorie donne des résultats plus précis de la température critique de flambement par rapport à la théorie d'ordre élevé de déformation de cisaillement.

L'effet de $\left(\frac{a}{b}\right)$ sur la température critique de flambement t_{cr} est le même à celui des cas des températures uniforme et linéaire à travers l'épaisseur. Comme l'indice de la loi puissance k augmente, la température de flambement critique t_{cr} diminue pour atteindre des valeurs plus faibles, puis augmente à l'exclusion des plaques rectangulaires pour $\gamma = 10$.

On remarque aussi à partir des tableaux IV.4 que t_{cr} augmente avec l'augmentation du paramètre de non linéarité γ . En général, les valeurs de différence de température critique calculées à partir des théories de déformation de cisaillement sont plus faibles que celles calculées en utilisant la théorie classique des plaques, ce qui indique l'effet de cisaillement de déformation.

Tableau IV.4 : La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque simplement appuyée en FGM sous élévation non-linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport $(\frac{a}{b})$ et L'exposant de température γ ($a=10h$).

K	Théories	a/b=1			a/b=2			a/b=3		
		$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
0	Présente	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.16	20.00	40.01	73.35
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.16	20.00	40.01	73.35
	HSDPT	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.16	20.00	40.01	73.35
	SSDPT	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.16	20.01	40.03	73.39
	CPT	5.11	10.22	18.75	12.80	25.61	46.96	25.63	51.26	93.99
1	Présente	2.10	4.31	8.19	4.95	10.14	19.24	8.96	18.38	34.86
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	2.10	4.31	8.19	4.95	10.14	19.24	8.96	18.38	34.86
	HSDPT	2.1066	4.31	8.19	4.95	10.14	19.24	8.96	18.38	34.86
	SSDPT	2.1068	4.31	8.19	9.95	10.14	19.25	8.97	18.38	34.87
	CPT	2.20	4.52	8.58	5.53	11.35	21.53	11.09	22.73	43.12
5	Présente	1.59	2.85	5.00	3.65	6.52	11.44	6.37	11.38	19.97
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	1.59	2.85	5.00	3.65	6.52	11.44	6.37	11.38	19.97
	HSDPT	1.59	2.85	5.00	3.65	6.52	11.44	6.37	11.38	19.97
	SSDPT	1.59	2.84	4.99	3.64	6.51	11.43	6.36	11.36	19.93
	CPT	1.70	3.04	5.35	4.28	7.65	13.43	8.58	15.33	26.90
10	Présente	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.54	11.25	18.61
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.54	11.25	18.61
	HSDPT	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.54	11.25	18.61
	SSDPT	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.53	11.24	18.60
	CPT	1.80	3.11	5.14	4.54	7.81	12.92	9.09	15.64	25.88

Dans le tableau IV.5, la plaque est soumise à une élévation uniforme de température à travers l'épaisseur et avec des conditions aux limites d'une plaque encadrée sur les quatre bords. A partir des résultats présentés dans le tableau IV.5, on constate qu'il y'a un bon accord avec les résultats existantes dans la littérature.

En outre, on peut voir que dans le cas d'une plaque mince ($\frac{a}{h}$)=100), les résultats de la présente théorie sont en excellent accord avec ceux de la solution de référence [Bouhadra, 2015]. Cependant, pour l'autre cas ($\frac{a}{h}$)=50), il ya une légère différence entre les résultats de la présente théorie et la théorie **FSDPT**. Cela est dû à l'utilisation d'un coefficient de correction de cisaillement constant pour toutes les valeurs de l'indice de la loi de puissance « k » dans la **RTSDPT**.

Tableau IV.5 : La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque encadrée en FGM sous élévation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et le rapport du coté/ épaisseur ($\frac{a}{h}$), ($\frac{a}{b}$)=1).

a/h	Théories	k=0	k=0.5	k=1	k=2	k=5
50	Présente	181.2998	102.7953	84.3066	74.7146	76.9295
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	181.300	102.795	84.307	74.715	76.934
	Zaho et al (2009)	175.817	99.162	82.357	71.013	74.591
	Kiani et al (2011)	182.06	103.15	84.58	74.99	77.36
	Nguyen- Xuan et al (2011)	188.28	105.27	86.07	76.07	78.06
	Batani et al (2013)	180.30	102.23	83.84	74.30	76.50
100	Présente	45.5291	25.8003	21.1566	18.7547	19.3393
	NHSDPT (Bouhadra 2015)	45.529	25.800	21.156	18.754	19.339
	Zaho et al (2009)	44.171	24.899	20.771	18.489	19.150
	Kiani et al (2011)	45.51	25.79	21.15	18.75	19.34
	Nguyen- Xuan et al (2011)	47.50	26.54	21.70	19.18	19.70
	Batani et al (2013)	45.28	25.65	21.04	18.65	19.23

A partir de tableau IV.6 et IV.7, on peut voir que, quand l'indice de loi de puissance « k » augmente, la charge critique de flambement T_{cr} diminue pour atteindre des valeurs plus faibles. En outre, On observe également que T_{cr} augmente avec l'augmentation du paramètre de non-linéarité γ .

Il est clair que la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque sous variation de température non linéaire est supérieure à celle d'une plaque sous variation uniforme. Alors que T_{cr} d'une plaque sous variation linéaire de température est intermédiaire par rapport aux deux cas précédents.

Tableau IV.6 : La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque encadrée en FGM sous élévation non-linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et le rapport $(\frac{a}{b})$, et du rapport a/b et L'exposant de température γ ($a=10h$).

	a/b=1			a/b=2			a/b=3		
	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
k=0	11878.73	23757.472	43555.365	27982.652	55965.305	102603.06	45559.417	91118.834	167051.196
k=1	5244.726	10750.064	23090.153	12726.432	26085.243	49477.105	21397.567	43858.382	83188.254
k=1.5	4505.68	9013.992	17015.933	10901.086	21808.500	41168.438	18268.884	36548.370	68993.252
k=2	4155.823	8114.770	15178.230	9971.749	19471.103	36419.622	16559.052	32333.647	60478.299
k=2.5	3983.482	7611.403	14081.359	9457.867	18071.536	33432.96	15526.766	29667.631	54886.141
k=3	3899.173	7312.768	13375.010	9156.668	17173.022	31409.355	14858.247	27866.141	50967.007
k=3.5	3861.059	7128.094	12891.474	8973.625	16566.656	29961.528	14405.314	26594.369	48097.088
k=5	3858.344	6888.307	12088.569	8754.066	15628.646	27427.344	13717.569	24489.994	42978.483

Tableau IV.7 : La charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque encadrée en FGM sous élévation non-linéaire de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et le rapport $(\frac{a}{b})$, et du rapport $(\frac{a}{h})$ et l'exposant de température γ ($a=20h$).

	a/b=1			a/b=2			a/b=3		
	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
k=0	3280.953	6561.907	12030.164	9076.419	18134.839	33247.205	18079.015	36158.030	66289.722
k=1	1421.429	2913.489	5526.152	3981.845	8161.549	15480.394	8074.726	16550.687	31392.467
k=1.5	1222.324	2445.358	4616.162	3422.322	6846.631	12924.553	6929.304	13862.629	26168.825
k=2	1132.042	2210.456	4134.537	3161.015	6172.282	11544.912	6371.120	12440.419	23269.117
k=2.5	1091.128	2084.864	3857.072	3035.479	5800.015	10730.229	6082.197	11621.505	16944.781
k=3	1074.403	2015.007	3685.436	2976.987	5583.239	10211.712	5928.235	11118.210	20335.140
k=3.5	1070.031	1975.437	3572.666	2953.358	5452.341	9860.800	5846.612	10793.722	16924.001
k=5	1084.076	1935.403	3396.517	2964.279	5292.131	9287.376	5787.372	10332.204	18132.404

La figure IV2 montre la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encadrée en **FGM** sous une variation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport $(\frac{a}{b})$ avec $(\frac{a}{h})=100$.

On peut observer que, T_{cr} des plaques isotropes ($k=0$) est supérieure à celle de la plaque de **FGM** et que l'augmentation du rapport $(\frac{a}{b})$ conduit à l'augmentation de la charge critique de flambement.

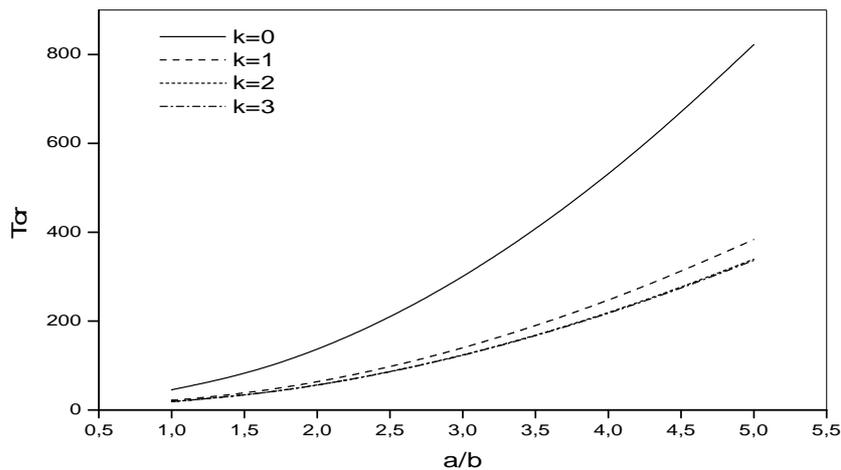


Figure IV.2 : la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encadrée en **FGM** sous une élévation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport $(\frac{a}{b})$ avec $(\frac{a}{h})=100$.

Il est à constater que l'augmentation du rapport géométrique a/h et l'indice k conduit à une diminution de la charge critique de flambement T_{cr} de la plaque de FGM.

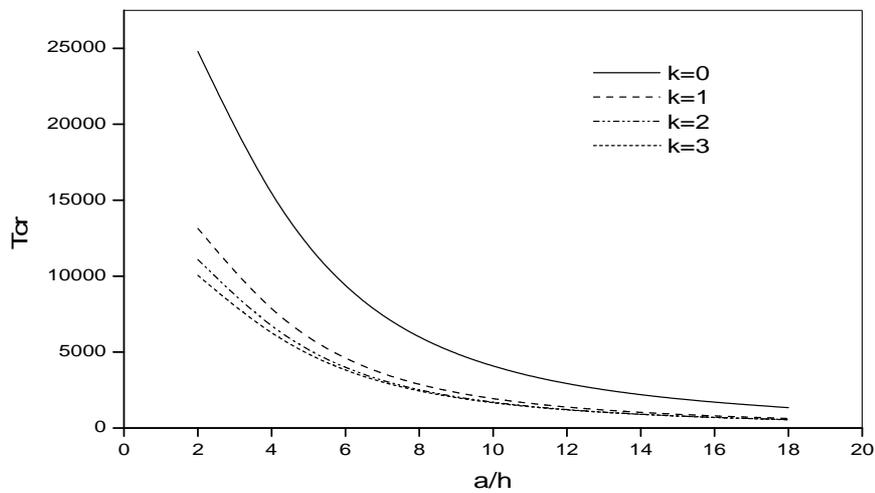


Figure IV.3 : la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encastrée en FGM sous une élévation uniforme de température pour différentes valeurs de l'indice de puissance k et du rapport $(\frac{a}{h})$ avec $(\frac{a}{b})=1$.

Quel que soit le type de chargement, la charge critique de flambement T_{cr} augmente lorsque le rapport $(\frac{a}{b})$ augmente.

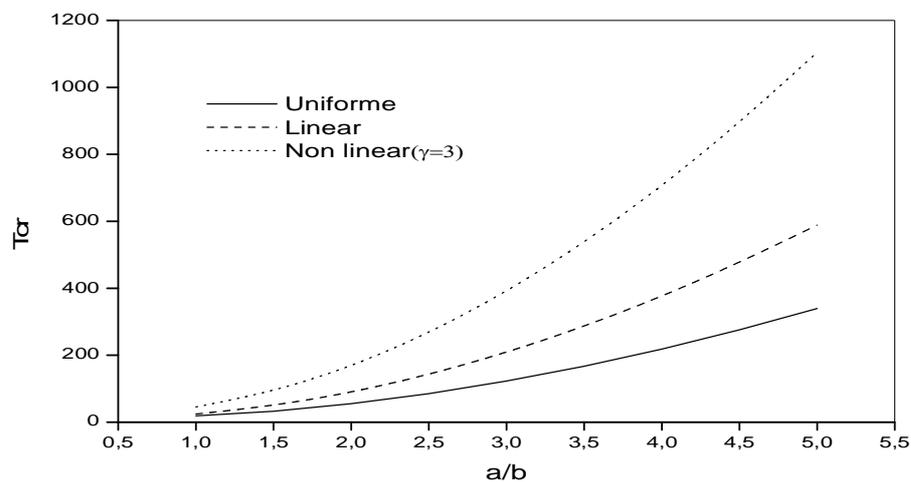


Figure IV.4 : la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encastrée en FGM sous une élévation uniforme, linéaire et non-linéaire ($\gamma = 3$) de température pour différentes valeurs du rapport (a/b) avec $(a/h=100$ et $k=2$).

Est clair que T_{cr} augmente avec l'augmentation du rapport E_m/E_c sauf dans le cas d'une charge uniforme.

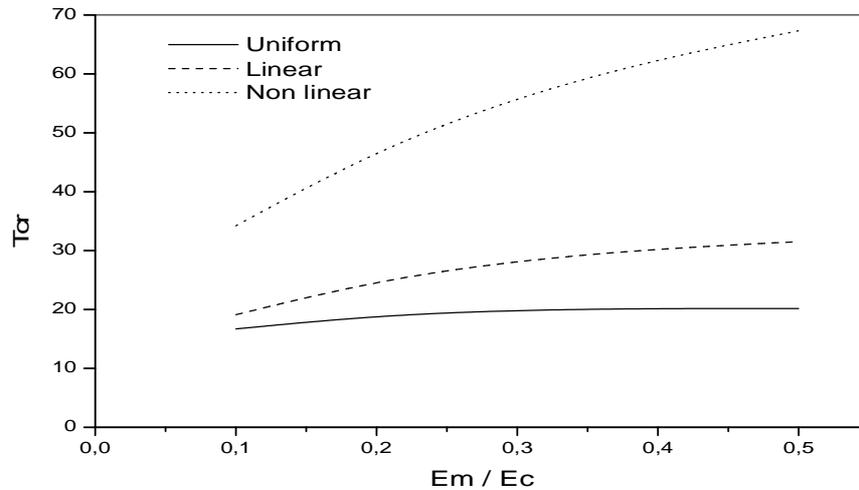


Figure IV.5 : la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encastree en FGM sous élévation uniforme, linéaire et non-linéaire ($\gamma = 3$) de température en fonction du rapport d'anisotropie E_m/E_c avec ($a/h=100$ et $k=2$).

La figure IV.6 montre l'effet de l'indice de puissance k sur la charge critique de flambement de la plaque **FGM** sous une variation uniforme, linéaire et non-linéaire de température à travers l'épaisseur.

On peut voir que, quand l'indice de loi de puissance k augmente, la charge critique de flambement T_{cr} diminue pour atteindre des valeurs plus faibles.

On observe également que T_{cr} augmente avec l'augmentation du paramètre de non-linéarité γ . Il est clair que la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque sous variation de température non linéaire est supérieure à celle d'une plaque sous variation uniforme. Alors que T_{cr} d'une plaque sous variation linéaire de température est intermédiaire par rapport aux deux cas précédents.

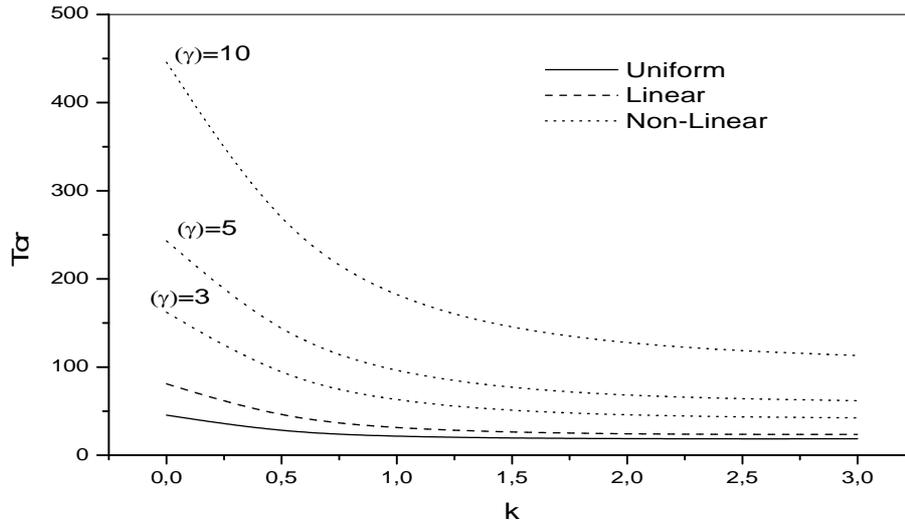


Figure IV.6 : la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encastree en FGM sous elevation uniforme, lineaire et non- lineaire ($\gamma = 3, \gamma = 5, \gamma = 10$) de temperature pour differentes valeurs de l'indice de puissance k avec $(\frac{a}{h}) = 100, (\frac{a}{b}) = 1$.

Dans la figure IV7, on remarque que pour tout les cas de chargement, l'accroissement du rapport a/b conduit a l'augmentation de la charge de flambement T_{cr} .

On constate aussi que la charge e flambement T_{cr} dans le cas de plaque encastree est plus importante que c'elle de plaque simplement appuye.

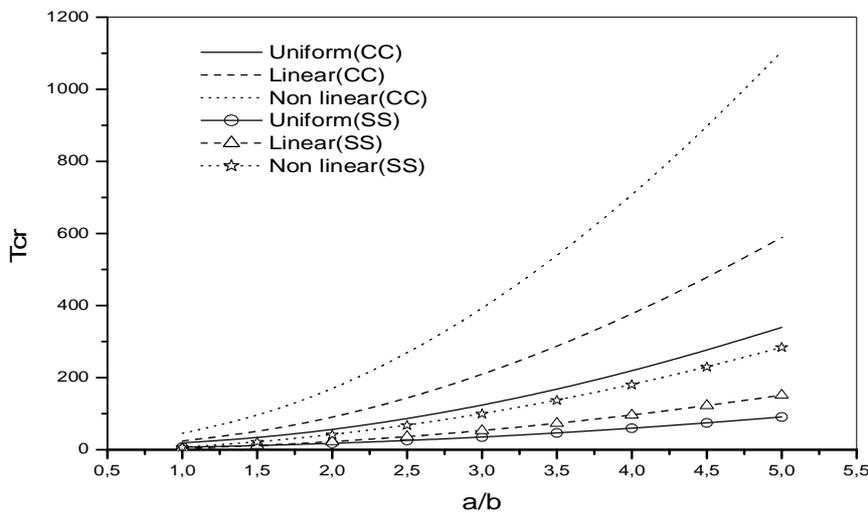


Figure IV.7 : la charge critique de flambement T_{cr} d'une plaque carrée encastree et simplement appuye en FGM sous une elevation uniforme, lineaire et non-lineaire ($\gamma = 3$) de temperature pour differentes valeurs du rapport (a/b) avec ($a/h=100, k=2$).

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale de la réponse des plaques encastrée et simplement appuyée en matériaux à gradient de propriétés **FGM** au flambement thermique en utilisant la théorie d'ordre élevé. Le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

La théorie présentée à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les résultats présentés dans ce chapitre permettent d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en les comparant avec les résultats des autres théories d'ordre élevé. En outre, l'influence des paramètres de la plaque comme l'indice de puissance k , le rapport géométrique $(\frac{a}{b})$, le rapport $(\frac{a}{h})$ et le type de chargement thermique sur la charge critique de flambement de la plaque **FGM** ont été complètement étudiés.

En conclusion, on peut dire que la présente théorie est exacte et simple pour la résolution du comportement de flambement des plaques **FGM** sous différents types de chargement thermique.

ANNEXE1

Programme Maple :

Flambement thermique (RPT) sous température uniforme (ssss)

```

> restart;
> Ec:=380;Em:=70;alpha111:=7.4*10**(-6);alpha222:=23*10**(-6);nu:=0.3;m:=1;n:=1;
  pi:=3.141592654;a:=1;k:=0;
> ah:=100;
> h:=a/ah;
> s:=5;
> b:=a/s;
> V:=(z/h+1/2)**k;
> E1:=(Ec-Em)*V+Em;alpha1:=(alpha111-alpha222)*V+alpha222;lambda:=m*pi/a;mu:=n*pi/b;
> f:=(-z/4)+(5*z**3/(3*h**2));
> g:=(5/4)-(5*z**2/h**2);
> Q11:=E1/(1-nu**2);Q12:=nu*E1/(1-nu**2);Q44:=E1/(2*(1+nu));Q55:=Q44;Q66:=Q44;
> A11:=int(Q11,z=-h/2..h/2);A12:=int(Q11*nu,z=-h/2..h/2);A66:=int(Q11*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);B11:=int(Q11*z,z=-h/2..h/2);B12:=int(Q11*z*nu,z=-h/2..h/2);B66:=int(Q11*z*(1-
nu)/2,z=-h/2..h/2);D11:=int(Q11*z^2,z=-h/2..h/2);D12:=int(Q11*z**2*nu,z=-
h/2..h/2);D66:=int(Q11*z**2*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);B11S:=int(Q11*f,z=-
h/2..h/2);B12S:=int(Q11*f*nu,z=-h/2..h/2);B66S:=int(Q11*f*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);D11S:=int(Q11*z*f,z=-h/2..h/2);D12S:=int(Q11*z*f*nu,z=-
h/2..h/2);D66S:=int(Q11*z*f*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);H11S:=int(Q11*f**2,z=-
h/2..h/2);H12S:=int(Q11*f**2*nu,z=-h/2..h/2);H66S:=int(Q11*f**2*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);A22:=A11;B22:=B11;D22:=D11;B22S:=B11S;D22S:=D11S;H22S:=H11S;H22S :=
int(Q11*f^2,z=-1/2*h..1/2*h);A44S:=int(Q44*g**2,z=-h/2..h/2);A55S:=A44S;
> X:=sin(lambda*x);Y:=sin(mu*y);
> X1:=diff(X,x);X2:=diff(X,x,x);X3:=diff(X,x,x,x);X4:=diff(X,x,x,x,x);
> Y1:=diff(Y,y);Y2:=diff(Y,y,y);Y3:=diff(Y,y,y,y);Y4:=diff(Y,y,y,y,y);
alpha12:=(int(int(diff(X,x,x,x)*Y*(diff(X,x)*Y),x=0..a),y=0..b));alpha8:=(int(int(diff(X,x)*diff(
Y,y,y)*diff(X,x)*Y,x=0..a),y=0..b));alpha10:=(int(int(diff(X,x,x)*diff(Y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),(
y=0..b));alpha4:=(int(int(X*diff(Y,y,y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),(y=0..b));alpha11:=(int(int(diff(X,x,
x)*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0..a),(y=0..b));alpha13:=(int(int(diff(X,x,x,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
alpha5:=(int(int(X*diff(Y,y,y,y,y)*X*Y,x=0..a),y=0..b));alpha3:=(int(int(X*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0
..a),(y=0..b));alpha9:=(int(int(diff(X,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
> S11:=A11*alpha12+A66*alpha8;S12:=(A12+A66)*alpha8;S13:=-B11*alpha12-
(B12+2*B66)*alpha8;S14:=-B12S+2*B66S)*alpha8-
B11S*alpha12;S21:=(A12+A66)*alpha10;S22:=A22*alpha4+A66*alpha10;S23:=-B22*alpha4-
(B12+2*B66)*alpha10;S24:=-B12S+2*B66S)*alpha10-B22S*alpha4;S31:=-
(B11*alpha13+(B12+2*B66)*alpha11);S32:=-
((B12+2*B66)*alpha11+B22*alpha5);S33:=+D11*alpha13+2*(D12+2*D66)*alpha11+D22*alp
ha5;S34:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D22S*alpha5;S41:=(B11S*alpha13+(B1
2S+2*B66S)*alpha11);S42:=-((B12S+2*B66S)*alpha11+B22S*alpha5);S43:=D11S*alpha13+2*

```

```
(D12S+2*D66S)*alpha11+D22S*alpha5;S44:=+H11S*alpha13+2*(H12S+2*H66S)*alpha11+H
22S*alpha5-(A44S)*alpha3-(A55S)*alpha9;
> Nx0:=-int(alpha1*E1*T/(1-nu),z=-h/2..h/2);Ny0:=Nx0;Ncr:=Nx0
> xi:=Ny0/Nx0;
> beta:=xi*alpha3+alpha9
> K:=array(1..4,1..4,[[S11,S12,S13,S14],[S21,S22,S23,S24],[S31,S32,S33-beta*Ncr,S34-
beta*Ncr],[S41,S42,S43-beta*Ncr,S44-beta*Ncr]]);
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
> det(K);
> equs:=det(K);
> Delta(Tcr):=solve(equs,T);
> restart;
```

ANNEXE2

Programme Maple :

Flambement thermique (RPT) sous température non linéaire (ssss):

```

> restart;
> Ec:=380;Em:=70;alpha111:=7.4*10**(-6);alpha222:=23*10**(-6);nu:=0.3;m:=1;n:=1;
  pi:=3.141592654;a:=1;k:=0;
> ah:=10;
> h:=a/ah;
> s:=2;
> b:=a/s;
> V:=(z/h+1/2)**k;
> E1:=(Ec-Em)*V+Em;alpha1:=(alpha111-alpha222)*V+alpha222;lambda:=m*pi/a;mu:=n*pi/b;
> f:=(-z/4)+(5*z**3/(3*h**2));
> f1:=diff(f,z);
> g:=1-f1;
> Q11:=E1/(1-nu**2);Q12:=nu*E1/(1-nu**2);Q44:=E1/(2*(1+nu));Q55:=Q44;Q66:=Q44;
> A11:=int(Q11,z=-h/2..h/2);A12:=int(Q11*nu,z=-h/2..h/2);A66:=int(Q11*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);B11:=int(Q11*z,z=-h/2..h/2);B12:=int(Q11*z*nu,z=-h/2..h/2);B66:=int(Q11*z*(1-
nu)/2,z=-h/2..h/2);D11:=int(Q11*z^2,z=-h/2..h/2);D12:=int(Q11*z**2*nu,z=-
h/2..h/2);D66:=int(Q11*z**2*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);B11S:=int(Q11*f,z=-
h/2..h/2);B12S:=int(Q11*f*nu,z=-h/2..h/2);B66S:=int(Q11*f*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);D11S:=int(Q11*z*f,z=-h/2..h/2);D12S:=int(Q11*z*f*nu,z=-
h/2..h/2);D66S:=int(Q11*z*f*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);H11S:=int(Q11*f**2,z=-
h/2..h/2);H12S:=int(Q11*f**2*nu,z=-h/2..h/2);H66S:=int(Q11*f**2*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);A22:=A11;B22:=B11;D22:=D11;B22S:=B11S;D22S:=D11S;H22S:=H11S;H22S :=
int(Q11*f^2,z=-1/2*h..1/2*h);A44S:=int(Q44*g**2,z=-h/2..h/2);A55S:=A44S;
> X:=sin(lambda*x);Y:=sin(mu*y);
> X1:=diff(X,x);X2:=diff(X,x,x);X3:=diff(X,x,x,x);X4:=diff(X,x,x,x,x);
> Y1:=diff(Y,y);Y2:=diff(Y,y,y);Y3:=diff(Y,y,y,y);Y4:=diff(Y,y,y,y,y);
> alpha12:=(int(int(diff(X,x,x,x)*Y*(diff(X,x)*Y),x=0..a),y=0..b));alpha8:=(int(int(diff(X,x)*diff
(Y,y,y)*diff(X,x)*Y,x=0..a),y=0..b));alpha10:=int(int(diff(X,x,x)*diff(Y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),
(y=0..b));alpha4:=int(int(X*diff(Y,y,y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),(y=0..b));alpha11:=int(int(diff(X,x
,x)*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0..a),(y=0..b));alpha13:=int(int(diff(X,x,x,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
alpha5:=int(int(X*diff(Y,y,y,y,y)*X*Y,x=0..a),y=0..b));alpha3:=int(int(X*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0
..a),(y=0..b));alpha9:=int(int(diff(X,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
> S11:=A11*alpha12+A66*alpha8;S12:=(A12+A66)*alpha8;S13:=-B11*alpha12-
(B12+2*B66)*alpha8;S14:=-B12S+2*B66S)*alpha8-
B11S*alpha12;S21:=(A12+A66)*alpha10;S22:=A22*alpha4+A66*alpha10;S23:=-B22*alpha4-
(B12+2*B66)*alpha10;S24:=-B12S+2*B66S)*alpha10-B22S*alpha4;S31:=-
(B11*alpha13+(B12+2*B66)*alpha11);S32:=-
((B12+2*B66)*alpha11+B22*alpha5);S33:=D11*alpha13+2*(D12+2*D66)*alpha11+D22*alph
a5;S34:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D22S*alpha5;S41:=-

```

```

(B11S*alpha13+(B12S+2*B66S)*alpha11);S42:=-
((B12S+2*B66S)*alpha11+B22S*alpha5);S43:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D
22S*alpha5;S44:=+H11S*alpha13+2*(H12S+2*H66S)*alpha11+H22S*alpha5-(A44S)*alpha3-
(A55S)*alpha9;
> gamma1:=5;
> Tm:=5;
> T1:=Delta(T)*(z/h+1/2)**gamma1+Tm;
> Nx0:=-int(alpha1*E1*T1/(1-nu),z=-h/2..h/2);
> Ny0:=Nx0;
> Ncr:=Nx0;
> xi:=Ny0/Nx0;
> beta:=xi*alpha3+alpha9;
> K:=array(1..4,1..4,[[S11,S12,S13,S14],[S21,S22,S23,S24],[S31,S32,S33-beta*Ncr,S34-
beta*Ncr],[S41,S42,S43-beta*Ncr,S44-beta*Ncr]]);
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
> det(K);
> equs:=det(K);
> Delta(Tcr):=solve(equs,Delta(T))/1000;
> restart;

```

ANNEXE3

Programme Maple :

Flambement thermique (RPT) sous température linéaire (ssss):

```

> restart;
Ec:=380;Em:=70;alpha111:=7.4*10**(-6);alpha222:=23*10**(-6);nu:=0.3;m:=1;n:=1;
  pi:=3.141592654;a:=1;k:=0;
> ah:=100;
> h:=a/ah;
> s:=1;
> b:=a/s;
> V:=(z/h+1/2)**k;
> E1:=(Ec-Em)*V+Em;alpha1:=(alpha111-alpha222)*V+alpha222;lambda:=m*pi/a;mu:=n*pi/b;
> f:=(-z/4)+(5*z**3/(3*h**2));
> f1:=diff(f,z);
> g:=1-f1;
> Q11:=E1/(1-nu**2);Q12:=nu*E1/(1-nu**2);Q44:=E1/(2*(1+nu));Q55:=Q44;Q66:=Q44;
> A11:=int(Q11,z=-h/2..h/2);A12:=int(Q11*nu,z=-h/2..h/2);A66:=int(Q11*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);B11:=int(Q11*z,z=-h/2..h/2);B12:=int(Q11*z*nu,z=-h/2..h/2);B66:=int(Q11*z*(1-
nu)/2,z=-h/2..h/2);D11:=int(Q11*z^2,z=-h/2..h/2);D12:=int(Q11*z**2*nu,z=-
h/2..h/2);D66:=int(Q11*z**2*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);B11S:=int(Q11*f,z=-
h/2..h/2);B12S:=int(Q11*f*nu,z=-h/2..h/2);B66S:=int(Q11*f*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);D11S:=int(Q11*z*f,z=-h/2..h/2);D12S:=int(Q11*z*f*nu,z=-
h/2..h/2);D66S:=int(Q11*z*f*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);H11S:=int(Q11*f**2,z=-
h/2..h/2);H12S:=int(Q11*f**2*nu,z=-h/2..h/2);H66S:=int(Q11*f**2*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);A22:=A11;B22:=B11;D22:=D11;B22S:=B11S;D22S:=D11S;H22S:=H11S;H22S :=
int(Q11*f^2,z=-1/2*h..1/2*h);A44S:=int(Q44*g**2,z=-h/2..h/2);A55S:=A44S;
> X:=sin(lambda*x);Y:=sin(mu*y);
> X1:=diff(X,x);X2:=diff(X,x,x);X3:=diff(X,x,x,x);X4:=diff(X,x,x,x,x);
> Y1:=diff(Y,y);Y2:=diff(Y,y,y);Y3:=diff(Y,y,y,y);Y4:=diff(Y,y,y,y,y);
> alpha12:=(int(int(diff(X,x,x)*Y*(diff(X,x)*Y),x=0..a),y=0..b));alpha8:=(int(int(diff(X,x)*diff
(Y,y,y)*diff(X,x)*Y,x=0..a),y=0..b));alpha10:=int(int(diff(X,x,x)*diff(Y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),
(y=0..b));alpha4:=int(int(X*diff(Y,y,y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),(y=0..b));alpha11:=int(int(diff(X,x
,x)*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0..a),(y=0..b));alpha13:=int(int(diff(X,x,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
alpha5:=(int(int(X*diff(Y,y,y,y)*X*Y,x=0..a),y=0..b));alpha3:=int(int(X*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0
..a),(y=0..b));alpha9:=int(int(diff(X,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
> S11:=A11*alpha12+A66*alpha8;S12:=(A12+A66)*alpha8;S13:=-B11*alpha12-
(B12+2*B66)*alpha8;S14:=-B12S+2*B66S)*alpha8-
B11S*alpha12;S21:=(A12+A66)*alpha10;S22:=A22*alpha4+A66*alpha10;S23:=-B22*alpha4-
(B12+2*B66)*alpha10;S24:=-B12S+2*B66S)*alpha10-B22S*alpha4;S31:=-
(B11*alpha13+(B12+2*B66)*alpha11);S32:=-
((B12+2*B66)*alpha11+B22*alpha5);S33:=D11*alpha13+2*(D12+2*D66)*alpha11+D22*alph
a5;S34:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D22S*alpha5;S41:=-

```

```

(B11S*alpha13+(B12S+2*B66S)*alpha11);S42:=-
((B12S+2*B66S)*alpha11+B22S*alpha5);S43:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D
22S*alpha5;S44:=+H11S*alpha13+2*(H12S+2*H66S)*alpha11+H22S*alpha5-(A44S)*alpha3-
(A55S)*alpha9;
> gamma1:=1;
> Tm:=5;
> T1:=Delta(T)*(z/h+1/2)**gamma1+Tm;
> T1:=Delta(T)*(z/h+1/2)**gamma1+Tm;
> Nx0:=-int(alpha1*E1*T1/(1-nu),z=-h/2..h/2);
> Ny0:=Nx0;
> Ncr:=Nx0;
> xi:=Ny0/Nx0;
> beta:=xi*alpha3+alpha9;
> K:=array(1..4,1..4,[[S11,S12,S13,S14],[S21,S22,S23,S24],[S31,S32,S33-beta*Ncr,S34-
beta*Ncr],[S41,S42,S43-beta*Ncr,S44-beta*Ncr]]);
> with(linalg):
> det(K);
> equs:=det(K);
> Delta(Tcr):=solve(equs,Delta(T));
> restart;

```

ANNEXE4

Programme Maple :

Flambement thermique (RPT) sous température uniforme (cccc)

```

> restart;
> Ec:=380;Em:=70;alpha111:=7.4*10**(-6);alpha222:=23*10**(-6);nu:=0.3;m:=1;n:=1;
  pi:=3.141592654;a:=1;k:=0;
> h:=a/100;
> s:=1;
> b:=a/s;
> V:=(z/h+1/2)**k;
> E1:=(Ec-Em)*V+Em;alpha1:=(alpha111-alpha222)*V+alpha222;lambda:=m*pi/a;mu:=n*pi/b;
> f:=(-z/4)+(5*z**3/(3*h**2));
> f1:=diff(f,z);
> g:=1-f1;
> Q11:=E1/(1-nu**2);Q12:=nu*E1/(1-nu**2);Q44:=E1/(2*(1+nu));Q55:=Q44;Q66:=Q44;
> A11:=int(Q11,z=-h/2..h/2);A12:=int(Q11*nu,z=-h/2..h/2);A66:=int(Q11*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);B11:=int(Q11*z,z=-h/2..h/2);B12:=int(Q11*z*nu,z=-h/2..h/2);B66:=int(Q11*z*(1-
nu)/2,z=-h/2..h/2);D11:=int(Q11*z^2,z=-h/2..h/2);D12:=int(Q11*z**2*nu,z=-
h/2..h/2);D66:=int(Q11*z**2*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);B11S:=int(Q11*f,z=-
h/2..h/2);B12S:=int(Q11*f*nu,z=-h/2..h/2);B66S:=int(Q11*f*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);D11S:=int(Q11*z*f,z=-h/2..h/2);D12S:=int(Q11*z*f*nu,z=-
h/2..h/2);D66S:=int(Q11*z*f*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);H11S:=int(Q11*f**2,z=-
h/2..h/2);H12S:=int(Q11*f**2*nu,z=-h/2..h/2);H66S:=int(Q11*f**2*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);A22:=A11;B22:=B11;D22:=D11;B22S:=B11S;D22S:=D11S;H22S:=H11S;H22S :=
int(Q11*f^2,z=-1/2*h..1/2*h);A44S:=int(Q44*g**2,z=-h/2..h/2);A55S:=A44S;
> X:=sin(lambda*x)**2;Y:=sin(mu*y)**2;
> X1:=diff(X,x);X2:=diff(X,x,x);X3:=diff(X,x,x,x);X4:=diff(X,x,x,x,x);
> Y1:=diff(Y,y);Y2:=diff(Y,y,y);Y3:=diff(Y,y,y,y);Y4:=diff(Y,y,y,y,y);
> alpha12:=(int(int(diff(X,x,x,x)*Y*(diff(X,x)*Y),x=0..a),y=0..b));alpha8:=(int(int(diff(X,x)*diff
(Y,y,y)*diff(X,x)*Y,x=0..a),y=0..b));alpha10:=int(int(diff(X,x,x)*diff(Y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),
(y=0..b));alpha4:=int(int(X*diff(Y,y,y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),(y=0..b));alpha11:=int(int(diff(X,x
,x)*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0..a),(y=0..b));alpha13:=int(int(diff(X,x,x,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
alpha5:=int(int(X*diff(Y,y,y,y,y)*X*Y,x=0..a),y=0..b);alpha3:=int(int(X*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0
..a),(y=0..b));alpha9:=int(int(diff(X,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
> S11:=A11*alpha12+A66*alpha8;S12:=(A12+A66)*alpha8;S13:=-B11*alpha12-
(B12+2*B66)*alpha8;S14:=-B12S+2*B66S)*alpha8-
B11S*alpha12;S21:=(A12+A66)*alpha10;S22:=A22*alpha4+A66*alpha10;S23:=-B22*alpha4-
(B12+2*B66)*alpha10;S24:=-B12S+2*B66S)*alpha10-B22S*alpha4;S31:=-
(B11*alpha13+(B12+2*B66)*alpha11);S32:=-
((B12+2*B66)*alpha11+B22*alpha5);S33:=D11*alpha13+2*(D12+2*D66)*alpha11+D22*alph

```

```

a5;S34:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D22S*alpha5;S41:=-
(B11S*alpha13+(B12S+2*B66S)*alpha11);S42:=-
((B12S+2*B66S)*alpha11+B22S*alpha5);S43:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D
22S*alpha5;S44:=+H11S*alpha13+2*(H12S+2*H66S)*alpha11+H22S*alpha5-(A44S)*alpha3-
(A55S)*alpha9;
> Nx0:=-int(alpha1 *E1 *T/(1-nu),z=-h/2..h/2);Ny0:=Nx0;Ncr:=Nx0;
> xi:=Ny0/Nx0;
> beta:=xi*alpha3+alpha9;
> K:=array(1..4,1..4,[[S11,S12,S13,S14],[S21,S22,S23,S24],[S31,S32,S33-beta*Ncr,S34-
beta*Ncr],[S41,S42,S43-beta*Ncr,S44-beta*Ncr]]);
> with(linalg):
> det(K);
> equs:=det(K);
> Delta(Tcr):=solve(equs,T);
> restart;

```


ANNEXE5

Programme Maple:

Flambement thermique (RPT) sous température non linéaire (cccc):

```

> restart;
> Ec:=380;Em:=70;alpha111:=7.4*10**(-6);alpha222:=23*10**(-6);nu:=0.3;m:=1;n:=1;
  pi:=3.141592654;a:=1;k:=0;
> ah:=100;
> h:=a/ah
> s:=1;
> b:=a/s;
> V:=(z/h+1/2)**k;
> E1:=(Ec-Em)*V+Em;alpha1:=(alpha111-alpha222)*V+alpha222;lambda:=m*pi/a;mu:=n*pi/b
> f:=(-z/4)+(5*z**3/(3*h**2))
> f1:=diff(f,z);
> g:=1-f1;
> Q11:=E1/(1-nu**2);Q12:=nu*E1/(1-nu**2);Q44:=E1/(2*(1+nu));Q55:=Q44;Q66:=Q44;
> A11:=int(Q11,z=-h/2..h/2);A12:=int(Q11*nu,z=-h/2..h/2);A66:=int(Q11*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);B11:=int(Q11*z,z=-h/2..h/2);B12:=int(Q11*z*nu,z=-h/2..h/2);B66:=int(Q11*z*(1-
nu)/2,z=-h/2..h/2);D11:=int(Q11*z^2,z=-h/2..h/2);D12:=int(Q11*z**2*nu,z=-
h/2..h/2);D66:=int(Q11*z**2*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);B11S:=int(Q11*f,z=-
h/2..h/2);B12S:=int(Q11*f*nu,z=-h/2..h/2);B66S:=int(Q11*f*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);D11S:=int(Q11*z*f,z=-h/2..h/2);D12S:=int(Q11*z*f*nu,z=-
h/2..h/2);D66S:=int(Q11*z*f*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);H11S:=int(Q11*f**2,z=-
h/2..h/2);H12S:=int(Q11*f**2*nu,z=-h/2..h/2);H66S:=int(Q11*f**2*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);A22:=A11;B22:=B11;D22:=D11;B22S:=B11S;D22S:=D11S;H22S:=H11S;H22S :=
int(Q11*f^2,z=-1/2*h..1/2*h);A44S:=int(Q44*g**2,z=-h/2..h/2);A55S:=A44S;
> X:=sin(lambda*x)**2;Y:=sin(mu*y)**2;
> X1:=diff(X,x);X2:=diff(X,x,x);X3:=diff(X,x,x,x);X4:=diff(X,x,x,x,x);
> Y1:=diff(Y,y);Y2:=diff(Y,y,y);Y3:=diff(Y,y,y,y);Y4:=diff(Y,y,y,y,y);
> alpha12:=(int(int(diff(X,x,x,x)*Y*(diff(X,x)*Y),x=0..a),y=0..b));alpha8:=(int(int(diff(X,x)*diff
(Y,y,y)*diff(X,x)*Y,x=0..a),y=0..b));alpha10:=int(int(diff(X,x,x)*diff(Y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),
(y=0..b));alpha4:=int(int(X*diff(Y,y,y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),(y=0..b));alpha11:=int(int(diff(X,x
,x)*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0..a),(y=0..b));alpha13:=int(int(diff(X,x,x,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
alpha5:=int(int(X*diff(Y,y,y,y,y)*X*Y,x=0..a),y=0..b);alpha3:=int(int(X*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0
..a),(y=0..b));alpha9:=int(int(diff(X,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
> S11:=A11*alpha12+A66*alpha8;S12:=(A12+A66)*alpha8;S13:=-B11*alpha12-
(B12+2*B66)*alpha8;S14:=-B12S+2*B66S)*alpha8-
B11S*alpha12;S21:=(A12+A66)*alpha10;S22:=A22*alpha4+A66*alpha10;S23:=-B22*alpha4-
(B12+2*B66)*alpha10;S24:=-B12S+2*B66S)*alpha10-B22S*alpha4;S31:=-
(B11*alpha13+(B12+2*B66)*alpha11);S32:=-
((B12+2*B66)*alpha11+B22*alpha5);S33:=D11*alpha13+2*(D12+2*D66)*alpha11+D22*alph
a5;S34:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D22S*alpha5;S41:=-

```

```

(B11S*alpha13+(B12S+2*B66S)*alpha11);S42:=-
((B12S+2*B66S)*alpha11+B22S*alpha5);S43:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D
22S*alpha5;S44:=+H11S*alpha13+2*(H12S+2*H66S)*alpha11+H22S*alpha5-(A44S)*alpha3-
(A55S)*alpha9
> gamma1:=2;
> Tm:=5;
> T1:=Delta(T)*(z/h+1/2)**gamma1+Tm;
> Nx0:=-int(alpha1*E1*T1/(1-nu),z=-h/2..h/2);
> Ny0:=Nx0;
> Ncr:=Nx0;
> xi:=Ny0/Nx0;
> beta:=xi*alpha3+alpha9;
> K:=array(1..4,1..4,[[S11,S12,S13,S14],[S21,S22,S23,S24],[S31,S32,S33-beta*Ncr,S34-
beta*Ncr],[S41,S42,S43-beta*Ncr,S44-beta*Ncr]]);
> with(linalg):
> det(K);
> equs:=det(K);
> Delta(Tcr):=solve(equs,Delta(T));
> restart;

```

ANNEXE6

Programme Maple :

Flambement thermique (RPT) sous température linéaire (cccc):

```

> restart;
> Ec:=380;Em:=70;alpha111:=7.4*10**(-6);alpha222:=23*10**(-6);nu:=0.3;m:=1;n:=1;
  pi:=3.141592654;a:=1;k:=0;
> ah:=100;
> h:=a/ah;
> s:=1;
> b:=a/s;
> V:=(z/h+1/2)**k;
> E1:=(Ec-Em)*V+Em;alpha1:=(alpha111-alpha222)*V+alpha222;lambda:=m*pi/a;mu:=n*pi/b;
> f:=(-z/4)+(5*z**3/(3*h**2))
> f1:=diff(f,z)
> g:=1-f1;
> Q11:=E1/(1-nu**2);Q12:=nu*E1/(1-nu**2);Q44:=E1/(2*(1+nu));Q55:=Q44;Q66:=Q44;
> A11:=int(Q11,z=-h/2..h/2);A12:=int(Q11*nu,z=-h/2..h/2);A66:=int(Q11*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);B11:=int(Q11*z,z=-h/2..h/2);B12:=int(Q11*z*nu,z=-h/2..h/2);B66:=int(Q11*z*(1-
nu)/2,z=-h/2..h/2);D11:=int(Q11*z^2,z=-h/2..h/2);D12:=int(Q11*z**2*nu,z=-
h/2..h/2);D66:=int(Q11*z**2*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);B11S:=int(Q11*f,z=-
h/2..h/2);B12S:=int(Q11*f*nu,z=-h/2..h/2);B66S:=int(Q11*f*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);D11S:=int(Q11*z*f,z=-h/2..h/2);D12S:=int(Q11*z*f*nu,z=-
h/2..h/2);D66S:=int(Q11*z*f*(1-nu)/2,z=-h/2..h/2);H11S:=int(Q11*f**2,z=-
h/2..h/2);H12S:=int(Q11*f**2*nu,z=-h/2..h/2);H66S:=int(Q11*f**2*(1-nu)/2,z=-
h/2..h/2);A22:=A11;B22:=B11;D22:=D11;B22S:=B11S;D22S:=D11S;H22S:=H11S;H22S :=
int(Q11*f^2,z=-1/2*h..1/2*h);A44S:=int(Q44*g**2,z=-h/2..h/2);A55S:=A44S;
> X:=sin(lambda*x)**2;Y:=sin(mu*y)**2;
> X1:=diff(X,x);X2:=diff(X,x,x);X3:=diff(X,x,x,x);X4:=diff(X,x,x,x,x);
> Y1:=diff(Y,y);Y2:=diff(Y,y,y);Y3:=diff(Y,y,y,y);Y4:=diff(Y,y,y,y,y);
alpha12:=(int(int(diff(X,x,x,x)*Y*(diff(X,x)*Y),x=0..a),y=0..b));alpha8:=(int(int(diff(X,x)*diff(
Y,y,y)*diff(X,x)*Y,x=0..a),y=0..b));alpha10:=int(int(diff(X,x,x)*diff(Y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),(
y=0..b));alpha4:=int(int(X*diff(Y,y,y,y)*X*diff(Y,y),x=0..a),(y=0..b));alpha11:=int(int(diff(X,x,
x)*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0..a),(y=0..b));alpha13:=int(int(diff(X,x,x,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));
alpha5:=(int(int(X*diff(Y,y,y,y,y)*X*Y,x=0..a),y=0..b));alpha3:=int(int(X*diff(Y,y,y)*X*Y,x=0
..a),(y=0..b));alpha9:=int(int(diff(X,x,x)*Y*X*Y,x=0..a),(y=0..b));

> S11:=A11*alpha12+A66*alpha8;S12:=(A12+A66)*alpha8;S13:=-B11*alpha12-
(B12+2*B66)*alpha8;S14:=-B12S+2*B66S)*alpha8-
B11S*alpha12;S21:=(A12+A66)*alpha10;S22:=A22*alpha4+A66*alpha10;S23:=-B22*alpha4-
(B12+2*B66)*alpha10;S24:=-B12S+2*B66S)*alpha10-B22S*alpha4;S31:=-

```

```

(B11*alpha13+(B12+2*B66)*alpha11);S32:=-
((B12+2*B66)*alpha11+B22*alpha5);S33:=D11*alpha13+2*(D12+2*D66)*alpha11+D22*alpha5;S34:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D22S*alpha5;S41:=-
(B11S*alpha13+(B12S+2*B66S)*alpha11);S42:=-
((B12S+2*B66S)*alpha11+B22S*alpha5);S43:=D11S*alpha13+2*(D12S+2*D66S)*alpha11+D22S*alpha5;S44:=+H11S*alpha13+2*(H12S+2*H66S)*alpha11+H22S*alpha5-(A44S)*alpha3-(A55S)*alpha9;
> gamma1:=1;
> Tm:=5
> T1:=Delta(T)*(z/h+1/2)**gamma1+Tm;
> T1:=Delta(T)*(z/h+1/2)**gamma1+Tm;
> Nx0:=-int(alpha1*E1*T1/(1-nu),z=-h/2..h/2);
> Ny0:=Nx0;
> Ncr:=Nx0;
> xi:=Ny0/Nx0;
> beta:=xi*alpha3+alpha9;
> K:=array(1..4,1..4,[[S11,S12,S13,S14],[S21,S22,S23,S24],[S31,S32,S33-beta*Ncr,S34-beta*Ncr],[S41,S42,S43-beta*Ncr,S44-beta*Ncr]]);
> with(linalg):
> det(K);
> equs:=det(K);
> Delta(Tcr):=solve(equs,Delta(T));
> restart;

```

Conclusion générale et perspectives

L'objectif de ce travail a été d'apporter une contribution à l'analyse de la réponse et le comportement mécanique au flambement thermique des plaques FGM sous divers condition d'appuis.

Pour ce faire, nous avons développé notre travail suivant deux axes :

Premièrement, nous avons proposé un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie d'ordre élevé à quatre variables pour l'analyse du comportement mécanique des plaques FGM soumises à un chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur sous divers conditions aux limites, pour valider ce modèle, nous l'avons comparé avec autres issus de la littérature.

La théorie proposée n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, toutes les études comparatives ont démontrées que les charges critiques de flambement obtenues en utilisant la présente théorie d'ordre élevé (avec quatre inconnus) et les autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (cinq inconnus) sont presque identiques, par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre les problèmes de flambement thermique des plaques FGM.

Deuxièmement, cette théorie a été utilisée pour déterminer les équations de base de la plaque FGM sous divers condition d'appuis, l'étude paramétrique menée a démontré que la géométrie de la plaque représentée par les rapports d'épaisseur, le type de la charge thermique, le paramètre du non linéarité thermique ont une très grande influence sur la charge critique de flambement.

Les conclusions tirées à travers cette étude sont :

- Les exemples numériques montrent que la présente théorie peut fournir des résultats précis pour les températures critiques des plaques FGM soumise à des distributions de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur.
- La différence de température critique de flambement pour les plaques FGM augmente par l'augmentation du rapport a/b .
- La différence de température critique de flambement des plaques FGM diminue lorsque le rapport coté sur épaisseur a/h augmente.
- La température critique de flambement des plaques FGM sont plus faibles que les valeurs des températures des plaques céramiques homogènes.

- La température critique de flambement de la plaque sous température non linéaire à travers l'épaisseur augmente comme l'indice de température augmente.
- La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé donne des charges de flambement inférieur par rapport à la théorie des plaques classique CPT.
- Les charges de flambement thermique dans le cas d'encastrement sont plus important que celle des appuis simple.

En perspective à ce travail, nous envisagerons d'étudier le problème de flambement thermique des plaques FGM, et d'utiliser de la nouvelle fonction raffinée pour les cas suivants :

- Pris en compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température.

-Utilisation de cette théorie pour résoudre le problème de flambement thermique des plaques sandwiches en FGM.

RÉFÉRENCE BIBLIOGRAPHIQUE

- Abdelkader. fekrar, « Conception des plaques FGM ayant un comportement similaire aux plaques homogènes »,Mémoire de magister de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes,
- A. Chabot(1997). Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multi paraculaires de matériaux multicouches. PHD thesis, ENPC.
- Afaq et al, 2003 K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffine pour les structures multicouches. In Comptes-rendus des 13 émes Journées Nationales sur les Composites, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- Bateni et al,2013 M. Bateni, Y. Kiani, and M. R. Eslami, A Comprehensive Study on Stability of FGM Plates, International Journal of Mechanical Sciences, vol. 75, pp. 134–144.
- ELOMARI « Analyse de la vibration libre des poutres en E-FGM à section transversale variable », mémoire de master ii de l'université Djilali liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.
- E. Reissner& Y. Stavsky (2010). Bending and stretching of certain types of heterogeneousa elotropic elastic plate. J. Appl. Mech., vol. 28, pages 402,408, 1961.
- HASSEN. Ait Atman, « Vibration des structures composites en tenant compte de l'effet du cisaillement », Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes ,2011.
- J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». J.Applied Mechanics, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- J.N. Reddy(1987). A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. Commun. Appl. Numer. Methods, vol. 3, pages 173,180.
- Kiani et al, 2011 Y. Kiani, E. Bagherizadeh, and M. R. Eslami, Thermal Buckling of Clamped Thin Rectangular FGM Plates Resting on Pasternak Elastic Foundation (Three Approximate Analytical Solutions), Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 91, no. 7, pp. 581–593.

- K,S Afaq développement d'un nouveau modèle pour les structures composites [multicouches et sandwichs] avec prise en compte du cisaillement transverse et des effet de bord, PHD thesis université Toulouse paul sabatier 2003.
- Lazreg. hadji, « contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwichs en FGM », Thèse de Doctorat de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes , 2012.
- M,Bouiaidjra, M, Houari, A..Tounsi(2012), thermal buckling of fonctionnely graded plate according to a four variables refined plate theory, journal of thermal stresser19.
- Metin Aydogdu,[vibration analysis of cross-ply laminated beam with generale boundary condition by ritz methode,international journal of mechanical science, 47.1740-1755.2005.
- M. Touratier(1991). An efficient standard plate theory. Engng Sci, vol. 29, no. 8, pages 901,916.
- Nguyen-Xuan et al, 2011 H. Nguyen-Xuan, L. V. Tran, T. Nguyen-Thoi, and H. C. Vu-Do,Analysis of Functionally Graded Plates Using an Edge-Based Smoothed Finite Element Method, Composite Structures, vol. 93, no. 11, pp. 3019–2039.
- Nora. kassimi, « étude des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcées par une plaque en matériaux composites », mémoire de master de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.
- Nora. kassimi, « étude des contraintes d'interface d'une poutre FGM renforcées par une plaque en matériaux composites », mémoire de master de l'université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, 2011.
- Reddy, 1984 J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752.
- S.A. Ambartsumyan. Theory of anisotropic plate.Technomic Publishing Co,1969.
- E Reissner(1945). The e_ect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69, 77.
- U. Icardi(2001). Higher-order zig-zag model for analysis of thickness composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. Composites: Part B, vol. 32, pages 343-354.

- Viet.Tung. Nguyen(2004). « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées.
- Zhao et al, 2009 X. Zhao, Y. Y. Lee, and K. M. Liew, Mechanical and Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Plates, Composite Structures, vol. 90, pp. 161–171, 2009.