

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun-Tiaret



Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie civil

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Travaux publics
Option : V.O.A

Présenté par :
BELGASMI Fatima
SEBIHI Amra

Sujet du mémoire

**Contribution à l'analyse du flambement des plaques
épaisses en utilisant une théorie raffinée de
déformation de cisaillement**

Soutenu publiquement le 26/06/2018 devant le jury composé de :

Mr. ABDELAZIZ H. H.	Président
Mr. DRAICHE. K.	Rapporteur
Mr. TLIDJI.Y.	Examineur
Mme. KHELIFA. Z.	Examineur

Promotion 2017/2018

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remercîments

Nous tenons à remercier Allah le tout puissant de nous avoir donné la foi, la force, et la patience pour réaliser ce travail.

Nous remercions nos chers parents, nos frères et sœurs, nos familles, qui ont rempli nos vies de joie, de motivation, et d'amour.

*Nous remercions aussi **Mr DRAICHE KADA** pour nous avoir encadré et soutenu au long de notre mémoire.*

Nous tenons à remercier surtout, nos collègues, ceux que nous avons croisés durant notre parcours d'études, qui nous ont donné le sentiment d'appartenance, qui nous ont offert de l'aide, du soutien, ou juste du sourire.

*Nous remercions grandement à **Mr. BOUAKKAZ KHALED** et la famille pédagogique du département Génie Civil de la faculté des sciences appliqués au niveau de l'université Ibn Khaldoun pour leur aide et leurs conseils au long de notre parcours universitaire, pour ses expériences, pour ses souvenirs...*

Enfin, nous remercions toute personne ayant cru en nous, ayant contribué de près ou de loin, avec beaucoup ou avec peu, à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail particulièrement à :

*Mon père (Mohamed): ma source de volonté et d'espoir, qui
toujours cru en moi et n'a pas cessé de m'inciter et de
m'encourager sans limites*

Un grand merci

*Ma mère, qui grâce é ses prières qui m'ont accompagnée toujours,
ses conseils valeureux qui m'ont donnée la puissance et le courage*

Un grand mérite

*A mon chère sœur Chahira, et son appareiller Hmammed
Hamza*

*A mes chères sœurs Nabila, Amel, Achwak, Kholoud et à mon
neveu (Mohamed islam)*

*Je profite de cette occasion pour remercier mes chère amie
Mokhtaría , Asma, Nasira , Zohra due j'ai passé des moments
uniques dans ma vie et qui aussi m'ont beaucoup aide surtout dans les
moments découragements*

A mon binôme Belgacemí Fatima

A mes oncles et mes tantes

Un grand mérite

*A tous les familles Sebíhí et Belmakhfí, et Belgacemí d'une
façon générale*

Ce travail modeste est dédié :

À Mon très cher Père Tayeb :

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour moi le long de ces années.

À ma chère et tendre mère,

Source d'affection de courage et d'inspiration et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

À mon très cher frère Mohammed et son épouse

À mon très cher frère Ahmed et son épouse

À ma chère sœur Hanane

Mon cher petit frère Faycel

« Mes neveux: Iyadh, Abd el wadoud, et le petit Abdnour »

À toute La famille Belgacemi et Mammeri pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

À mon binôme « Sebibi Amra » et sa famille pour lequel je souhaite une vie pleine de joie et de réussite.

À mes Chères amis : Houda, Nassira, Asma, Zohra, Braïka

À tous les membres de ma promotion de V.O.A

À tous ceux qui me sens chers et que j'ai omis de citer.

To those who despite the distance have always been present by their moral contributions

Fatima

ملخص :

في هذا العمل ، يتم تطبيق نظرية المكرر من تشوه القص المثلثية لتحليل التواءات من لوحات مستطيلة سميكة متناحرة. تشتمل النظرية فقط على مجهولين ، مقابل ثلاثة في نظرية تشوه القص الأول ونظريات النظام الأعلى الأخرى. ومع ذلك ، فإنه يأخذ في الاعتبار قوى القص العرضية والتوزيع المثلثي للضغط القص المستعرض عبر سمك اللوحة ، وكذلك تلبية الشروط في حدود بطلان الضغوط على الأسطح العلوية والسفلية للوحة. . . يتم الحصول على معادلات الحركة المرتبطة بالنظرية الحالية باستخدام مبدأ التشريد الظاهري. تم الحصول على الحل التحليلي لربط الألواح المستطيلة المدعومة ببساطة والمعروضة لتحميل ضغط أحادي المحور ومحوري ثنائي باستخدام طريقة Navier.

تُقارن نتائج حمل التواء الحرجة للصفائح المستطيلة السميكة المتساوية مع حلول نظرية الطبق التقليدية وحلول نظرية تشويه القص من الدرجة الأولى ونظريات أخرى دقيقة. المتاحة في الأدب. يمكننا أن نستنتج أن النظرية المقترحة فعالة في التنبؤ بسلوك تشوه الصفائح المتناحية السميكة.

كلمات مفتاحية : نظرية المكرر ، لوحة سميكة ، التواء ، التشريد الظاهري ، القص المستعرض.

Abstract:

In this work, a refined theory of trigonometric shear deformation is applied for the buckling analysis of thick isotropic rectangular plates. The theory involves only two unknowns, versus three in the first order shear deformation theory and the other higher order theories. However, it takes into account the transverse shear forces and the trigonometric distribution of the transverse shear stresses across the thickness of the plate, as well as satisfying the conditions at the limits of the nullity of the stresses on the upper and lower surfaces of the plate. . The equations of motion associated with the present theory are obtained using the principle of virtual displacements. The analytical solution of the buckling of simply supported rectangular plates subjected to uniaxial and bi-axial compression loading was obtained using the Navier method. The critical buckling load results for thick isotropic rectangular plates are compared with conventional plate theory (CPT) solutions, first order shear deformation theory (FSDT) solutions, and other refined theories. available in the literature. It can be concluded that the proposed theory is effective in predicting the deformation behavior of thick isotropic plates.

Keywords: Refined theory, Thick plate, Buckling, Virtual displacements, Transverse shear.

Résumé :

Dans ce présent travail, une théorie raffinée de déformation de cisaillement trigonométrique est appliquée pour l'analyse de flambement des plaques rectangulaires isotropes épaisses. La théorie implique seulement deux inconnues, contre trois dans la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre et les autres théories d'ordre supérieur. Toutefois elle tient en considération les efforts de cisaillement transversaux et la distribution trigonométrique des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la plaque, de même elle satisfait les conditions aux limites de la nullité des contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les équations du mouvement associées à la présente théorie sont obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels. La solution analytique du flambement des plaques rectangulaires simplement appuyées soumises à une charge de compression uniaxiale et bi-axiale a été obtenue en utilisant la méthode de Navier. Les résultats de la charge critique du flambement pour les plaques rectangulaires isotropes épaisses sont comparés avec des solutions de la théorie classique des plaques (CPT), des solutions de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), et les autres théories raffinées disponibles dans la littérature. On peut conclure que la théorie proposée est efficace pour prédire le comportement de déformation des plaques isotropes épaisses.

Mots clés : Théorie raffinée, Plaque épaisses, Flambement, Déplacements virtuels, Cisaillement transverse.

TABLE DES MATIERES

ملخص	I
Abstract	II
Résumé	III
Table des matières	IV
Liste des figures	VI
Liste des tableaux	VIII
Liste des notations	IX
Introduction générale.....	1

CHAPITRE I:

GÉNÉRALITÉ SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES ET CES COMPORTEMENT MÉCANIQUES

1. Introduction.....	3
2. Différents types de matériaux composites	4
3. Classification des matériaux composites.....	4
3.1. Composites à matrice polymérique.....	4
3.2. Composites à matrice métallique.....	4
3.3. Composites à matrice céramique.....	Erreur !
Signet non défini.	
3.4. Composites à renforts de fibres.....	5
3.5. Composites stratifiés.....	5
3.6. Composites à renforts de particules	5
3.7. Composites à renforts de paillettes.....	Erreur !
Signet non défini.	
4. Constituants des matériaux composites.....	6
4.1. La matrice.....	6
4.1.1. Différentes natures de la matrice.....	7
4.1.2. Caractéristiques mécaniques principales des résines.....	7
4.2. Les renforts.....	7
4.2.1. Différentes types de renfort.....	7
4.2.2. Différentes natures de renfort.....	8
4.3. Les charges.....	9
4.4. Les additifs.....	10
4.5. L'interface.....	10
5. La mise en œuvre des matériaux composites	11
1.1. Moulage par contact.....	13
1.2. Moulage par projection simultanée.....	13
6. Caractéristiques des matériaux composites.....	13
6.1. Les principales caractéristiques des pièces fabriquées en matériaux composites	
7. Etude de comportement mécanique des composites	14
8. Domaine d'application	16
9. Architecture des matériaux composites.....	16
9.1. Monocouche.....	Erreur ! Signet non défini.
9.2. Stratifié.....	17
9.3. Sandwichs	17
10. Influences environnementales	19
11. Avantages et inconvénients des matériaux composites.....	19
11.1. Les avantages.....	19
11.2. Les inconvénients.....	19
12. Loi de comportement.....	Erreur !
Signet non défini.	

12.1. Matériaux anisotropes.....	20
12.2. Matériau monoclinique.....	20
12.3. Matériaux orthotropiques.....	21
12.4. Matériau transversalement isotrope.....	21
12.5. Matériau isotrope.....	21
13. Conclusion.....	22
<u>CHAPITRE II:</u>	
<u>LES DIFFÉRENTES THÉORIES DES PLAQUES</u>	
1. Introduction	23
2. Historique	24
3. Différents types des plaques.....	24
4. Domaine d'utilisation.....	25
5. Modèles analytiques des plaques	25
5.1. Approche monocouche équivalente.....	26
5.1.1. La théorie classique des plaques minces de Love Kirchhoff (CPT).....	26
5.1.2. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT).....	27
5.1.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	28
5.1.4. Le champ de déplacement.....	29
5.1.5. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques.....	30
5.2. Approche par couche	32
5.2.1. Les modèles zig-zag.....	33
5.3. Approche de développement asymptotique	34
6. Flambement des plaques	36
7. Approche du Flambement	37
8. Plaque rectangulaire simplement appuyée sur les quatre cotes.....	37
9. Modes du flambement des plaques	38
9.1. Le flambement local.....	38
9.2. Le flambement distorsionnel.....	38
9.3. Le flambement global	39
10. L'interaction entre les modes de flambement	39
11. Quelques exemples sur le flambement et les dommages causés.....	40
11.1. Flambement d'une âme de poutre	40
11.2. Flambement d'une plaque raidie sous compression longitudinale et pression hydrostatique	40
12. Conclusion	40
<u>CHAPITRE III: ANALYSES DU COMPORTEMENT DE FLAMBEMENT DES PLAQUES ÉPAISSES</u>	
ERREUR ! SIGNET NON DÉFINI.	
12. Introduction	41
13. La théorie d'ordre élevé à deux variables	41
14. Formulation théorique	41
14.1. Configuration géométrique.....	41
14.2. Hypothèses de base de la présente théorie raffinée.....	42
14.3. Champ de déplacements et de déformations.....	43
14.4. Champ de contraintes.....	44
14.5. Analyse de stabilité des plaques isotropes épaisses par la solution de Navier.....	46
15. Conclusion	48
<u>CHAPITRE IV: RÉSULTATS ET DISCUSSIONS</u>	
16. Introduction	48
17. Résultats numériques et discussions	48
17.1. Flambement des plaques isotropes sous compression uniaxiale.....	50

Table des matières

17.2. Flambement des plaques isotropes sous compression bi-axiale.....	55
18. Conclusion	56
<u>CONCLUSION GÉNÉRAL</u>	57
Références	59

Liste des figures

Figure I.1. classification des matériaux composites.....	6
Figure I.2. un matériau composite.....	6
Figure I.3. Différentes familles de la matrice.	7
Figure I.4. Différents types de fibres de verre (documentation Ahlstrom).....	8
Figure I.5. Différentes familles du renfort	9
Figure I.6. Exemples de charges utilisées dans les CMO	Erreur ! Signet non défini.
Figure I.7. Concepts d'interphase et d'interface	Erreur ! Signet non défini.
Figure.I.8. Principe du moulage au contact.....	Erreur ! Signet non défini.
Figure.I.9. Principe du moulage par projection simultanée	Erreur ! Signet non défini.
Figure I.10. Micromécanique.....	Erreur ! Signet non défini.
Figure I.11. Macro mécanique	Erreur ! Signet non défini.
Figure.I.12. comportements mécaniques des composites	15
Figure I.13. couche d'un composite.....	16
Figure I.14. Stratifiée	17
Figure I.15. Matériaux sandwiches a âme pleine.....	18
Figure.I.16. Matériaux sandwiches a âme creuses.....	18
Figure II.1. Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire. Erreur ! Signet non défini.	
Figure II.2. Domaine de l'utilisation de plaque.....	Erreur ! Signet non défini.
Figure II.3. Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy 1997) Erreur ! Signet non défini.	
Figure II.4. Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 1997). Erreur ! Signet non défini.	
Figure II.5. déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques Erreur ! Signet non défini.	
Figure II.6. Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche Cinématique(Nguyen.2004)	Erreur ! Signet non défini.

Figure II.7. Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique (Nguyen.2004)	33
Figure II.8. Champ de déplacements des modèles zig- zag du premier ordre.[Nguyen 2004]	Erreur ! Signet non défini.
Figure II.9. Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé	34
Figure II.10. Modes de flambement pour un cylindre soumis à une charge axiale	36
Figure II.11. Flambement d'une plaque.....	37
Figure II.12. Flambage de la plaque sous une compression Uni axial	38
Figure II.13. Flambement d'une âme de poutre.....	Erreur ! Signet non défini.
Figure II.14. Flambement plaque homogène soumise à un chargement thermique	40
Figure III.1. Géométrie d'une plaque dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires soumise à des forces dans le plan.....	43
Figure IV.1 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport d'élanement (a/h) d'une plaque carrée en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression uniaxiale le long de la direction x	52
Figure IV.2 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport d'élanement (a/h) d'une plaque carrée en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression uniaxiale le long de la direction y	53
Figure IV.3 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport géométrique (a/b) d'une plaque en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression uniaxiale le long de la direction x avec $a/h=5$	54
Figure IV.4 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport géométrique (a/b) d'une plaque en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression uniaxiale le long de la direction y avec $a/h=5$	55
Figure IV.5 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport d'élanement (a/h) d'une plaque carrée en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression bi-axiale.....	57
Figure IV.6 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport géométrique (a/b) d'une plaque en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression bi-axiale avec $a/h=5$	58

Liste des tableaux :

Tableau IV.1 : Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambement \bar{N}_{cr} des plaques isotropes rectangulaires soumises à une compression uniaxiale le long de la direction x .
.....49

Tableau IV.2 : Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambement \bar{N}_{cr} des plaques isotropes rectangulaires soumises à une compression uniaxiale le long de la direction y 50

Tableau IV.3 : Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambement \bar{N}_{cr} des plaques isotropes rectangulaires soumises à une compression bi-axiale. 54

Liste des notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
a	longueur de la plaque
b	largeur de la plaque
h	l'épaisseur de la plaque
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
E_c	Module d'élasticité du composite.
E_f	Module d'élasticité des fibres.
E_m	Module d'élasticité de la matrice
G	module de cisaillement transverse
u, v, w	Les déplacements suivant les directions x, y et z
$u_0, v_0,$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$g(z)$	Dérivée de la fonction de cisaillement
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales suivant les directions x, y et z
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations dans les directions x et y
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux de membrane
M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b	Moments de flexion pure
M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s	Moments de flexion due au cisaillement transverse
V_{xz}, V_{yz}	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
m, n	Nombres de modes
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque

D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
A	La surface supérieure
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
∂	Dérivée partielle
i, j	Nombres naturels
$[C]$	Matrice symétrique des valeurs propres
s_{ij}	Valeurs propres
$\{A\}$	Le vecteur des déplacements

Introduction générale

Introduction générale

Les plaques rectangulaires utilisées dans les structures d'ingénierie sont souvent soumises à des charges normales, de compression et de cisaillement agissant dans le plan médian de la plaque. Dans certaines conditions, de telles charges peuvent entraîner un flambement de la plaque. L'instabilité de flambage de la plaque est une importance pratique de la grille. Dans de nombreux cas, la défaillance des éléments de la plaque peut être attribuée à l'instabilité de flambage et non à l'absence de résistance. Par conséquent, l'analyse du flambement des plaques fait partie intégrante de l'analyse générale de la structure. L'importance du flambage est l'initiation de schémas de déflexion qui, si les charges augmentent encore au-dessus de leurs valeurs critiques, conduit rapidement à une grande déviation latérale. Il conduit à de fortes contraintes de flexion et éventuellement à la rupture complète de la plaque. La théorie des plaques classique bien connue due à Kirchhoff [1] prédit de bons résultats pour le flambement des plaques minces seulement, parce que la déformation transversale de cisaillement est négligée. L'effet de déformation transversale par cisaillement est plus prononcé dans les plaques épaisses. La théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre basée sur le déplacement, prenant en compte l'effet de la déformation transversale par cisaillement, est développée par Mindlin [2] qui nécessite un facteur de correction de cisaillement. Les limites de la théorie classique des plaques et de la théorie de la déformation au cisaillement du premier ordre ont conduit au développement de théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. La théorie de Reddy [3] fait partie de la théorie bien connue de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Shimpi et Patel [4] ont développé deux théories de la plaque variable pour l'analyse statique et dynamique de la plaque épaisse. Kim et al. [5] ont étendu cette théorie pour l'analyse de flambement des plaques isotropes et orthotropes en utilisant la technique de la solution de Navier alors que Thai et Kim [6] ont utilisé la solution de Levy pour l'analyse de flambement de la plaque épaisse. Ghugal et Pawar [7] ont appliqué la théorie de déformation de cisaillement hyperbolique pour l'analyse de flambement et de vibration des plaques orthotropes. Sayyad [8] et Sayyad et Ghugal [9] ont appliqué une théorie de déformation exponentielle par cisaillement pour l'analyse de flambement de plaques isotropes et orthotropes épaisses. Récemment Sayyad et Ghugal [10] ont développé une théorie de cisaillement trigonométrique et de déformation normale pour l'analyse de flambement uniaxiale et bi-axiale de plaques composites isotropes et stratifiées. Sayyad et al. [11] ont appliqué la théorie de la déformation de cisaillement du nième ordre pour la flexion cylindrique des plaques orthotropes. Une

théorie de déformation de cisaillement trigonométrique utilisée dans la présente étude a été développée par Thai et Vo [12], qui a été étendue par Shinde et al. [13] pour l'analyse en flexion des plaques isotropes et orthotropes. La théorie implique seulement deux variables inconnues qui sont trois dans le cas de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre et d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur citées dans la littérature. La théorie est uniformément variable et ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement. Les équations directrices et les conditions aux limites sont obtenues en utilisant le principe du travail virtuel. La solution analytique pour les conditions aux limites simplement supportées est obtenue en utilisant la technique de la solution de Navier. Les résultats numériques des charges critiques de flambement sont comparés à la littérature existante.

La rédaction de ce mémoire débute par une introduction générale, s'articule ensuite autour de quatre chapitres et s'achève par une conclusion et des perspectives.

Dans le premier chapitre : Nous essayons de présenter une étude bibliographique sur les matériaux composites, en discutons sur la recherche scientifique pour le développement de ces derniers ainsi que les différents procédés de fabrication et leurs intérêts à travers les secteurs de l'industrie moderne

Dans le 2^{ème} chapitre : Ce chapitre, est également à forte dominante bibliographique, nous présenterons la théorie classique des plaques, permettant de mettre leur champ de déplacement, de déformation et leur comportement, ensuite nous décrivons selon une synthèse historique récente, les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories des plaques correspondantes.

Dans le 3^{ème} chapitre : Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé qui tient en considération les effets des déformations de cisaillement transversal à travers l'épaisseur des plaques a été utilisée. A partir d'un développement analytique sur la base des formulations théoriques des lois de comportement on arrive à une solution analytique qui décrive le flambement des plaques isotropes épaisses.

Dans le 4^{ème} chapitre : on a commenté les résultats numériques obtenus par la validation du présent modèle analytique en faisant la comparaison avec d'autres théories.

Conclusion générale

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites et ces comportements mécaniques

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites et ces comportements mécaniques

1. Introduction

Les matériaux composites sont des matériaux à hautes performances mécaniques, façonnables à volonté au gré du concepteur et donc doué d'un potentiel illimité. ces matériaux se développent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines et sont à l'origine de formidables challenges dans diverses réalisations de haute technologie.

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure. Nous étudions plus particulièrement les matériaux composites à renfort fibre longue continue utilisés dans l'industrie nautique, automobile, aéronautique et spatiale. Les pièces structurelles sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée.

Ainsi, le développement de l'utilisation des matériaux composites dans les structures nécessite de mettre en place les outils nécessaires à la modélisation du comportement mécanique des matériaux composites et à l'analyse des structures stratifiées ou sandwiches.

L'objet de ce travail est de valider la présente théorie raffinée pour analyser le comportement mécanique en flambement des plaques en matériaux isotropes sous compression uniaxiale et bi-axiale.

2. Différents types de matériaux composites

Selon leur taux d'utilisation, On distingue deux types de composites: les composites grandes diffusions et les composites hautes performances.

2.1. Grande diffusion

Les matériaux composites à grande diffusion offrent des avantages essentiels, qui sont : optimisation des coûts par diminution des prix de revient, sa composition de polyester avec des fibres de verre longues ou courtes (sous forme de mat ou tissu) et la simplicité du principe d'élaboration des matériaux (moulage par contact, SMC et injection).

2.2. Hautes performances

Les matériaux composites à hautes performances sont utilisés dans le domaine d'aéronautique où le besoin d'une grande performance déduite des hautes valeurs ajoutées. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%. Ces composites sont élaborés par les procédures suivantes :

- Drapage autoclave, enroulement filamentaire, RTM,
- Beaucoup de procédés encore manuels, CMM, CMC.

3. Classification des matériaux composites

La classification des matériaux composites peut être effectuée selon plusieurs façons. En fonction de la nature de la matrice, les matériaux composites peuvent se classer selon les trois familles suivantes:

3.1. Composites à matrice polymérique

Ce type de composites a été développé surtout pour les applications aéronautiques où la réduction de masse est essentielle. Les polymères sont donc caractérisés par une faible densité, une résistance mécanique relativement faible, et une grande déformation à rupture.

3.2. Composites à matrice métallique

Dans ces composites, la matrice est métallique comme l'aluminium ou le titane qui sont renforcés par des renforts généralement non-métalliques, souvent des céramiques. Leurs propriétés mécaniques sont donc meilleures ou plus adaptables au chargement que leurs matrices polymériques. Ils sont largement appliqués dans les fabrications des moteurs d'automobile.

3.3. Composites à matrice céramique

Les matériaux céramiques tels que le verre et le carbure de silicium (SiC) sont utilisés pour la matrice de ce type de composite. La matrice peut être associée aux renforts comme

des métaux, le carbone, et des céramiques. Ce type de composite est développé dans le but d'améliorer les propriétés mécaniques telles que la ténacité, et la résistance au choc thermique. Une manière plus utilisée consiste à les classer selon les types des renforts. Les composites sont donc divisés en quatre catégories suivantes:

3.3.1. Composites à renforts de fibres

Les renforts de ce type de composites sont sous forme de fibres. La longueur des fibres est bien supérieure aux dimensions de sa section transversale. Selon leurs applications, les fibres utilisées prennent la longueur de la pièce (fibres continues) ou soit coupées en petite longueur (fibres courtes).

3.3.2. Composites stratifiés

Le composite est constitué par au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être composées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification.

3.3.3. Composites à renforts de particules

Le renfort est considéré comme une particule si toutes ses dimensions sont approximativement égales et petites devant les autres dimensions du matériau. Les particules dures sont dispersées aléatoirement dans la matrice moins rigide.

3.3.4. Composites à renforts de paillettes

Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces "particules minces" est généralement aléatoire.

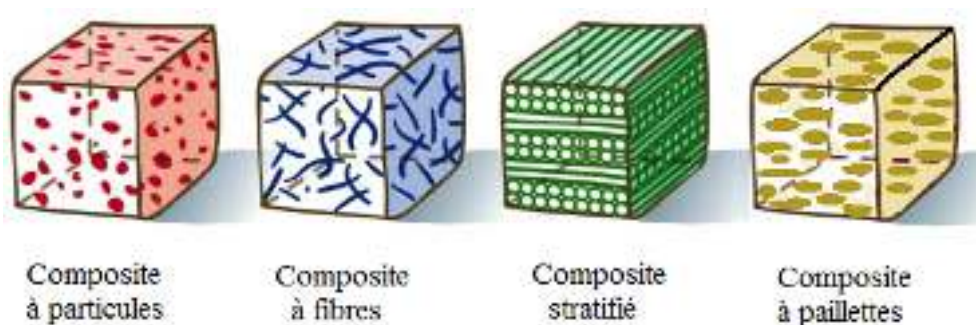


Figure I.1 : classification des matériaux composites

4. Constituants des matériaux composites

En général les constituants principaux d'un matériau composite sont : la matrice, le renfort et l'interface (figure I.2). Dans certains cas des charges et des additifs peuvent être utilisés.

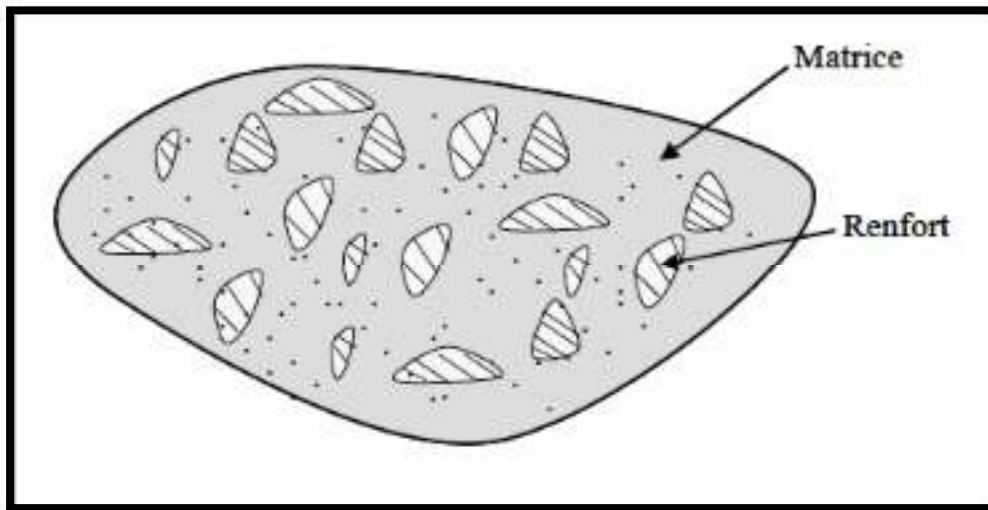


Figure I.2 : un matériau composite

4.1. La matrice

La matrice est l'élément qui lie et maintient les fibres. Elle répartie les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assure la protection chimique des fibres.

4.1.1. Différentes natures de la matrice

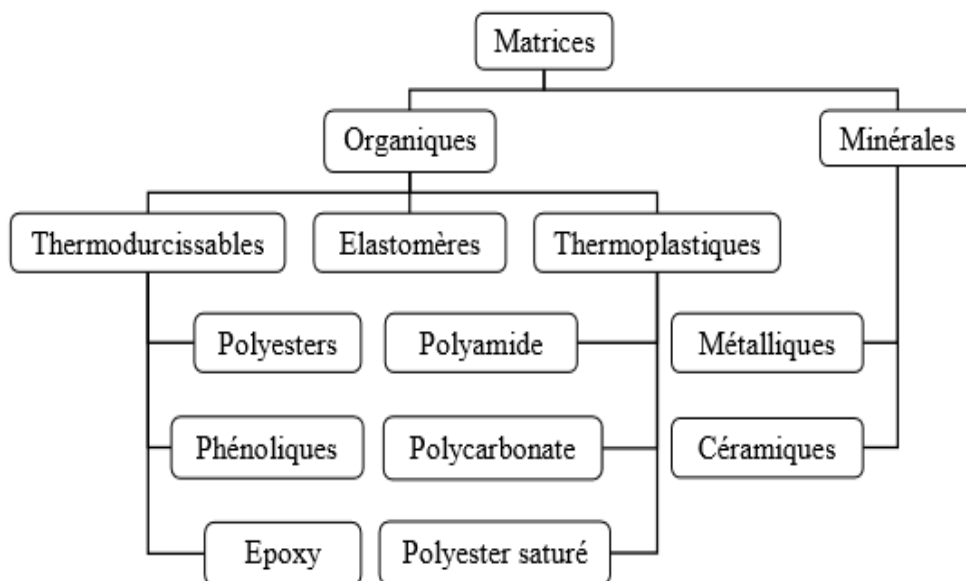


Figure I.3 : Différentes familles de la matrice

4.1.2. Caractéristiques mécaniques principales des résines

- Résine thermodurcissable: sont mis en forme et se polymérisent selon la forme souhaitée. La transformation irréversible.

- Résine thermoplastique: mis en forme par chauffage, durcissent au cours du refroidissement. La transformation est réversible.

4.2. Les renforts

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique à la traction et la rigidité des matériaux composites et se présentent sous forme filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques).

4.2.1. Différentes types de renfort

Les renforts les plus utilisés se présentent sous forme de fibres ou formes dérivées et constituent une fraction volumique de matériau composite généralement comprise entre 0.3 et 0.7. Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales.

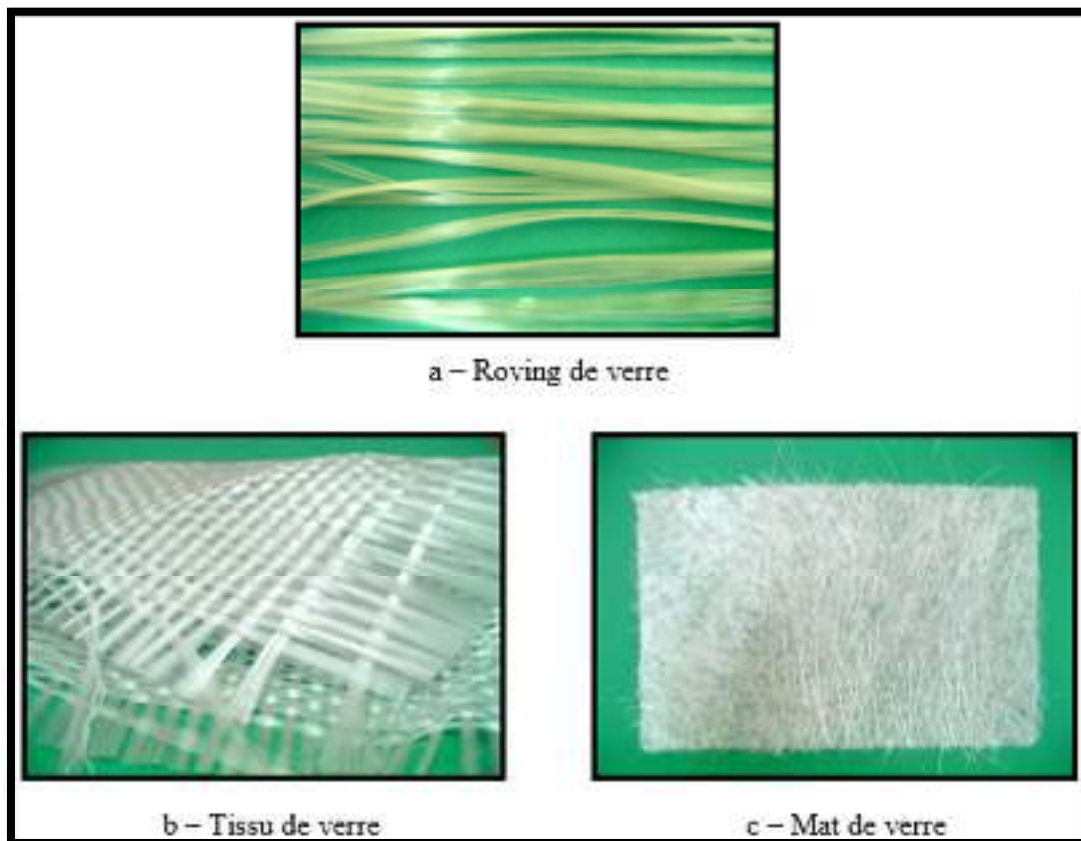


Figure I.4 : Différents types de fibres de verre (documentation Ahlstrom)

- Sous forme de roving (fils, mèches, etc. ...) : le roving est un assemblage de fils de bases parallèles groupés sans torsion.
- Sous forme de tissus (tissus taffetas, toiles, serge, etc. ...) : le tissu est forme par l'entrecroisement perpendiculaire des roving. Les tissus de roving peuvent peser jusqu'à 800 g/m².
- Sous forme de mat (a fil coupé, a fil continu) : le mat est un matelas de fils coupés ou continu à ensimage plastique, agglomérés par un liant à solubilité rapide ou lente dans la résine.

4.2.2. Différentes natures de renfort

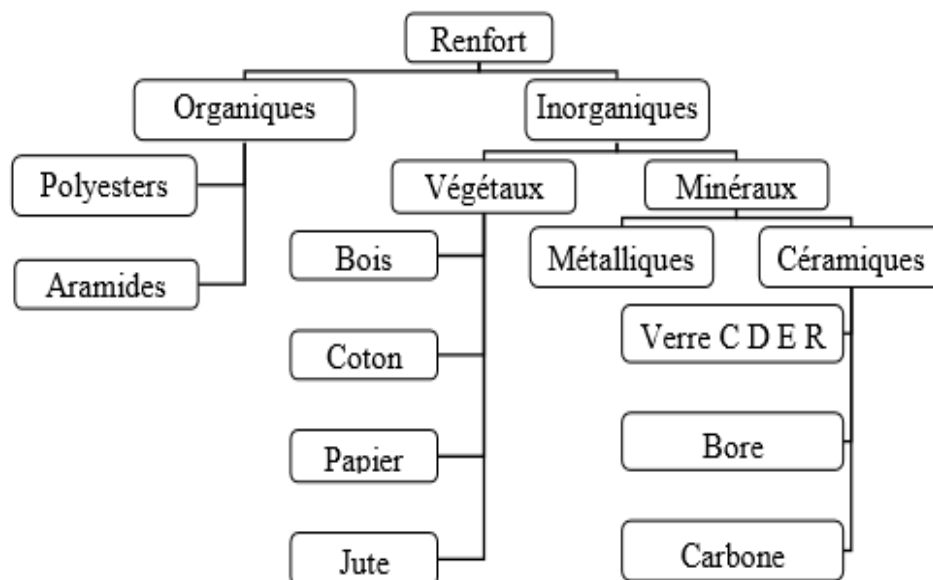


Figure I.5 : Différentes familles du renfort

4.3. Les charges

L'objet de la charge renforçant est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine, ou diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines. En générales ces charges sont des microbilles ou des particules (poudre). Les principales charges utilisées sont:

- ✚ **Charges renforçantes** : Sphériques ($10 < \Phi < 150 \mu\text{m}$) : microbilles de verre creusées ou pleines, microbilles de carbone. Non sphériques : mica sous forme d'écailles (environ $300 \times 10 \mu\text{m}$).

🧩 **Charges non renforçantes** : Ces matériaux sont ajoutés à la résine afin de réduire le coût de la résine. Ils sont extraits de roches ou de minerais (carbonate de calcium, talc, kaolin, silices etc.). L'incorporation de ces charges à la matrice a pour effet d'augmenter certaines propriétés, entre autres, la masse volumique, le module d'élasticité, la dureté, la viscosité et la stabilité dimensionnelle. Par contre, on obtient une réduction du prix, de la résistance à la traction et de la résistance à la flexion du composite.

🧩 **Charges ignifugeantes** : hydrate d'alumine, oxyde d'antimoine.



Figure I.6 : Exemples de charges utilisées dans les CMO

(a) microbilles de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.

4.4. Les additifs

Les additifs [1] sont nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre le renfort fibreux et la matrice et de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés. Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- Lubrifiants et agents de démoulage,
- Pigments et colorants,
- Agents anti-retraits,
- Agents anti-ultraviolets,
- Accélérateur,
- Catalyseur.

4.5. L'interface

Est un terme utilisé dans le domaine des matériaux composites, pour décrire la surface ou la zone qui sépare la fibre et la matrice (discontinuité macroscopique)

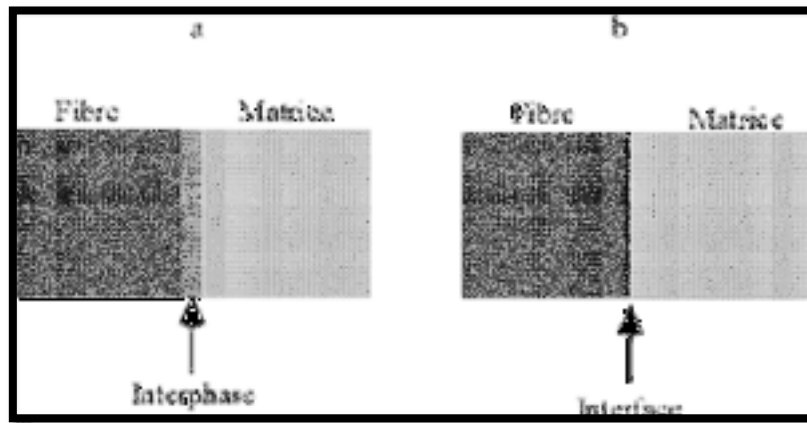


Figure I.7 : Concepts d'interphase et d'interface

C'est dans cette zone que s'effectue précisément le transfert de charge de la matrice vers le renfort (ou vice vers) et elle est également le siège de concentration de contraintes résiduelles lors de la préparation du composite.

Pour que le transfert de charge ait lieu, un certain contact ou adhérence à l'interface entre les constituants est nécessaire. Comme caractéristiques de cette adhérence (caractéristiques de l'interface) il ya : la contrainte de décohésion (T_d), la contrainte de frottement (T), le coefficient de frottement ($j.t$), la microstructure, l'énergie d'adhésion et d'autres grandeurs physico-chimiques. Suivant ces caractéristiques, le comportement du composite est déterminé.

5. La mise en œuvre des matériaux composites

Généralement le choix d'un procédé de moulage se fait en fonction de certains paramètres à savoir:

- Imprégnation du renfort par le système résineux,
- Mise en forme à la géométrie de la pièce,
- Durcissement du système :
 - soit par polycondensation et réticulation pour les matrices thermodurcissables,
 - soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques.

Les procédés les plus importants sont :

- Moulage par contact,
- Moulage par projection simultanée,
- Injection thermodurcissable BMC,
- Compression thermodurcissable SMC,
- Enroulement filamentaire (ou bobinage)

5.1. Moulage au contact

Avant moulage, le moule est revêtu d'un agent de démoulage, puis généralement d'une fine couche de résine de surface, souvent colorée, dénommée « gel coat ».

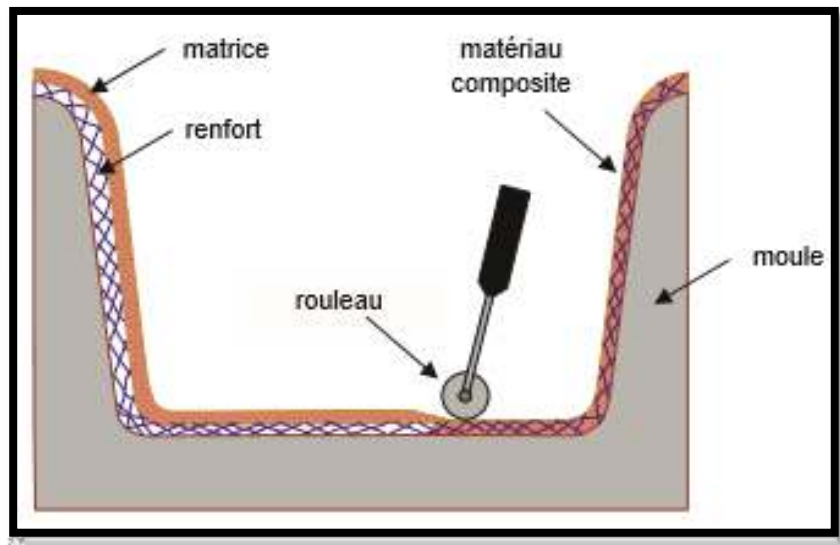


Figure I.8 : Principe du moulage au contact.

5.2. Moulage par projection simultanée

Le moulage est effectué par projection simultanée de fibres coupées et résine catalysée sur un moule. L'équipement à projeter est constitué d'une machine à couper le stratif et d'un pistolet projetant les résines et les fibres coupées, l'ensemble fonctionnant par air comprimé. La couche de fibres imprégnées de résine est ensuite compactée et débarrassée des bulles au rouleau cannelé.

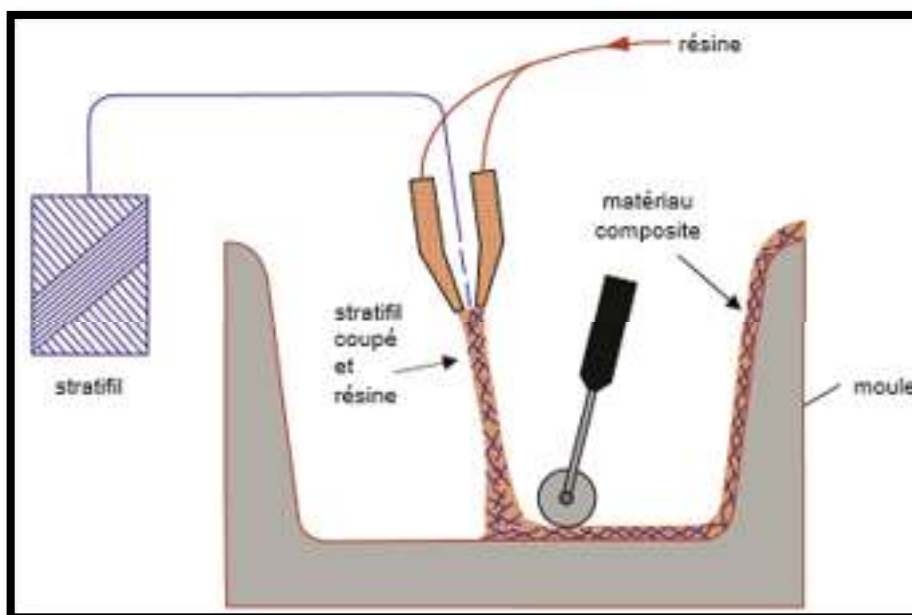


Figure I.9 : Principe du moulage par Projection simultanée

6. Caractéristiques des matériaux composites

Les propriétés des matériaux composites dépendent de beaucoup de facteurs et sont différentes selon les divers types de matériaux composites. Ces propriétés résultent :

- Des propriétés, de la nature et de la quantité des matériaux constitutifs,
- Des constituants, de la géométrie et de la distribution du renfort,
- De leurs interactions, de la nature de l'interface matrice-renfort, etc.

6.1. Les principales caractéristiques des pièces fabriquées en matériaux composites sont

- Le gain de masse,
- La bonne tenue en fatigue (durée de vie augmentée),
- L'absence de corrosion,
- L'absence de plasticité (leur limite élastique correspond à la limite de rupture),
- Le vieillissement sous l'action de l'humidité et de la chaleur,
- L'insensibilité à certains produits chimiques courants (solvants, peinture, huiles, pétroles,...),
- Tenue aux impacts et aux chocs très moyenne,
- Très forte anisotropie [3].

7. Étude de comportements mécaniques des composites

7.1. Micromécanique

Le comportement de la couche élémentaire (pli ou monocouche) à partir des propriétés mécaniques intrinsèques des matériaux constitutifs ainsi que leur proportion volumique constituent l'objectif principal de la micromécanique.

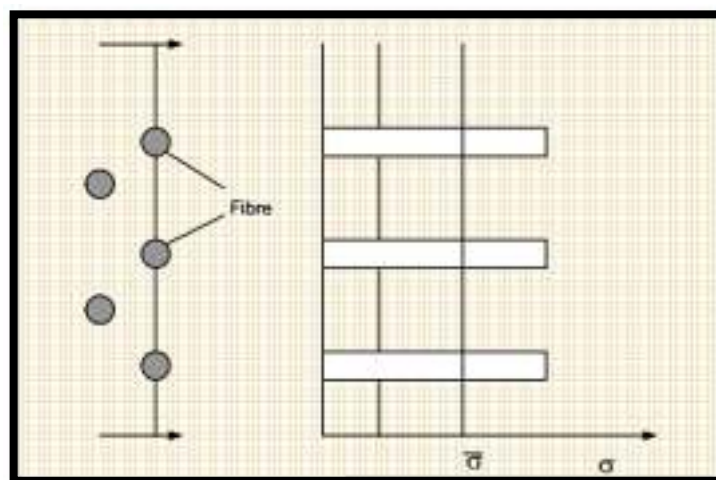


Figure I.10 : Micromécanique

7.2. Macro mécanique

Cette discipline vise à établir les relations entre les contraintes et les déformations d'abord au niveau du pli élémentaire et extrapoler à des composites comportant plusieurs plis élémentaires disposés de façon quelconque les uns par rapport aux autres (stratifié ou multicouche).

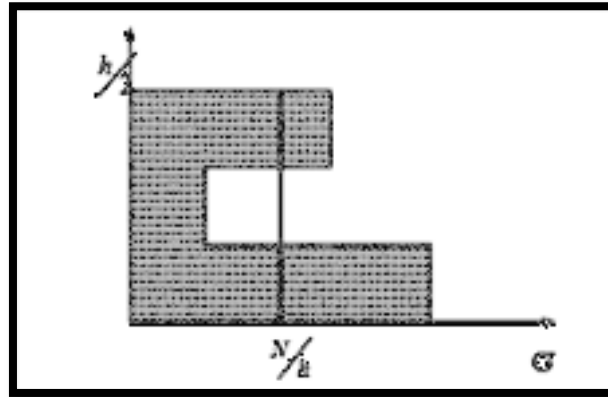


Figure I.11 : Macro mécanique

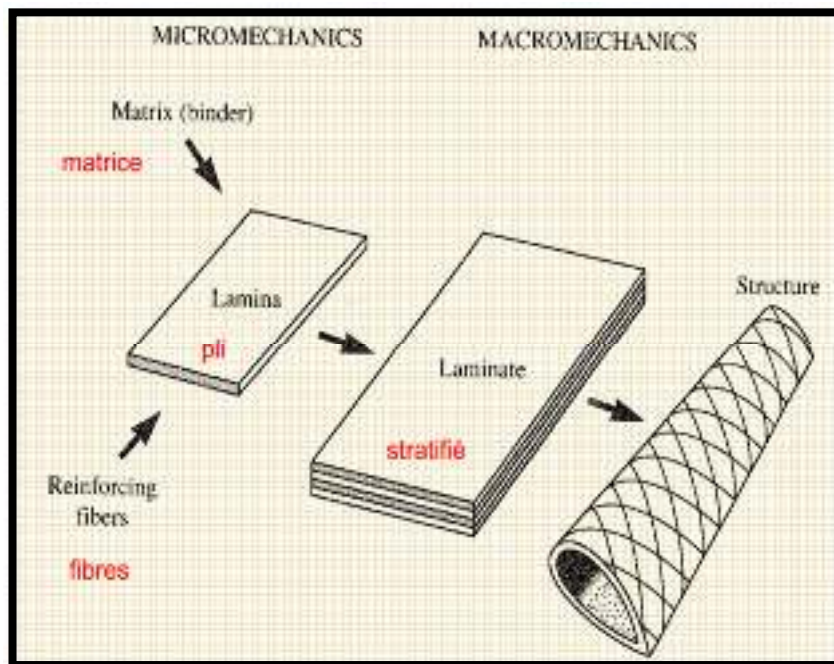


Figure I.12 : comportements mécaniques des composites

8. Domaines d'application

Les excellentes performances mécaniques des matériaux composites fibres résine en terme de caractéristiques spécifiques en font des matériaux attrayants pour l'utilisation dans les structures. En outre, l'intérêt de ces matériaux réside dans leur anisotropie aisément

contrôlable par le concepteur qui peut ainsi ajuster la rigidité et la résistance en fonction des sollicitations extérieures. Ainsi l'immense avantage des matériaux composites est de pouvoir être optimisé pour chaque application : on peut placer le renfort exactement où il est nécessaire. Cette optimisation résulte en une grande performance de ces matériaux, qui sont souvent de loin les plus légers pour une résistance mécanique spécifiée. Cependant ils restent très chers à fabriquer, d'où leurs domaines d'application sont les suivants:

- Electricité et électronique,
- Bâtiment et travaux publics,
- Transports routiers, ferroviaires, maritimes, aériens et spatiaux (notamment militaire),
- Santé (instrumentation médicale),
- Sports et loisirs (skis, raquette de tennis, planche à voile, surf, club de golf, aviron,...)

Ainsi on note que les matériaux composites sont surtout utilisés pour des applications où une haute performance est recherchée et où le prix n'est pas le facteur primordial.

9. Architecture des matériaux composites

9.1. Monocouche

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres continue, à fibres courtes, fibres tissus et mat.

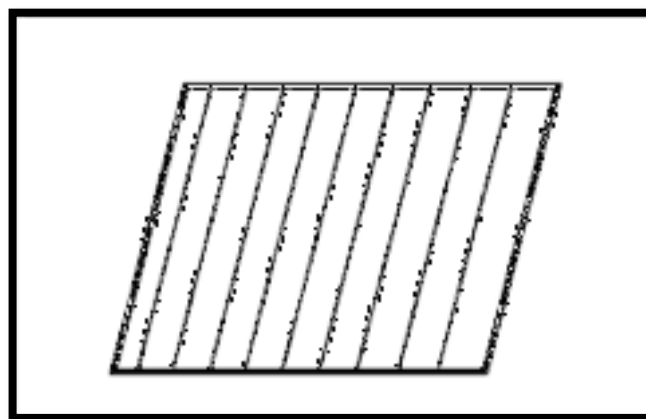


Figure I.13 : couche d'un composite.

9.2. Stratifié

Les stratifiés sont constitués de couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, stratifiés, mat, tissus, etc.) imprégnés de résines.

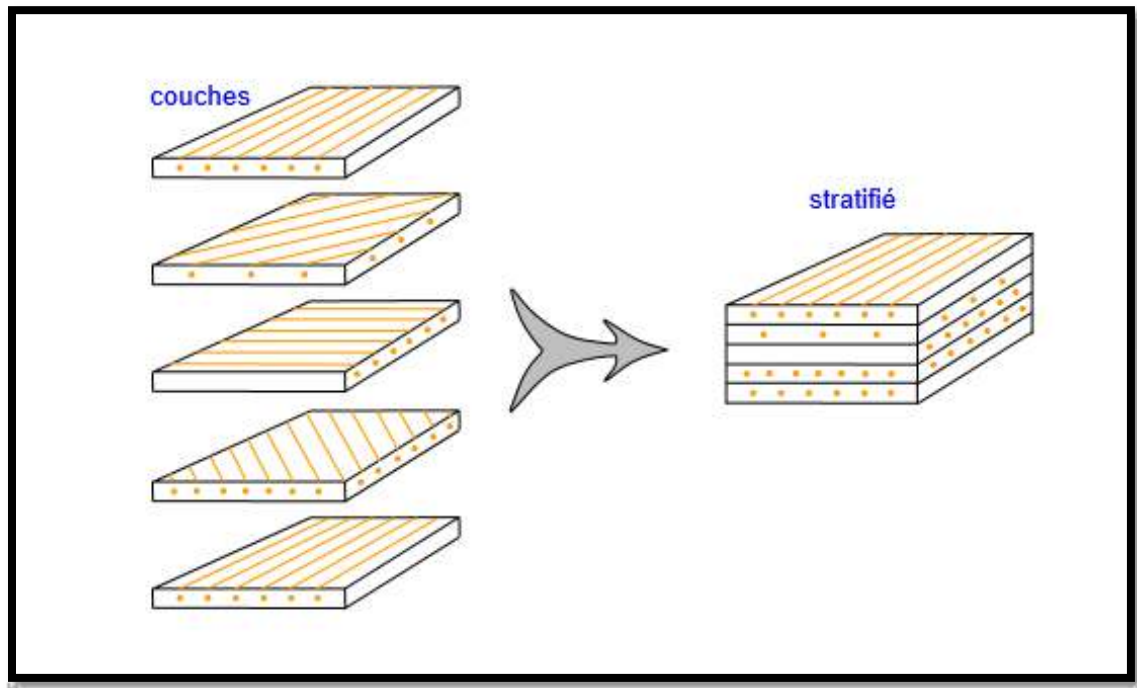


Figure I.14 : Stratifié

9.3. Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande rigidité en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

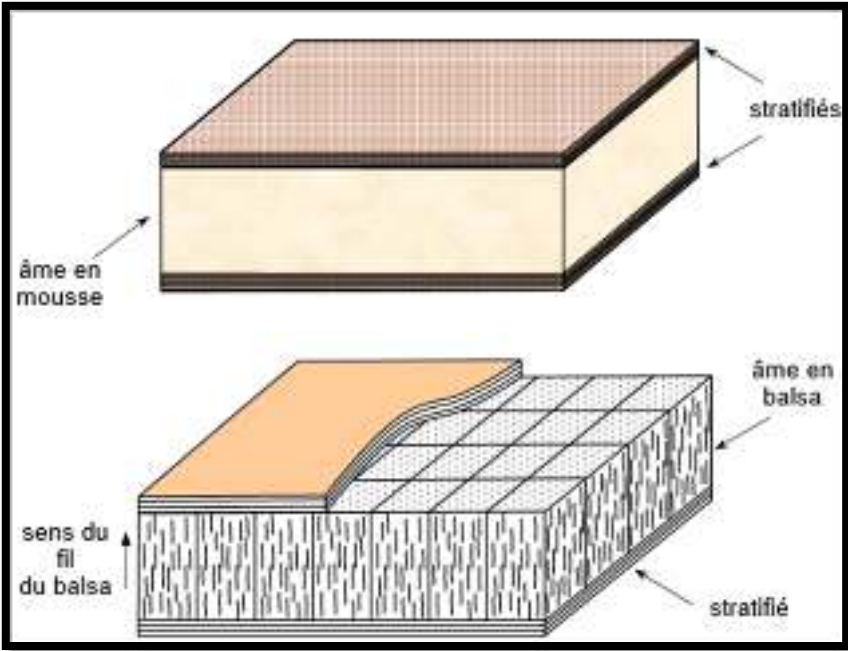


Figure I.15 : Matériaux sandwiches a âme pleine

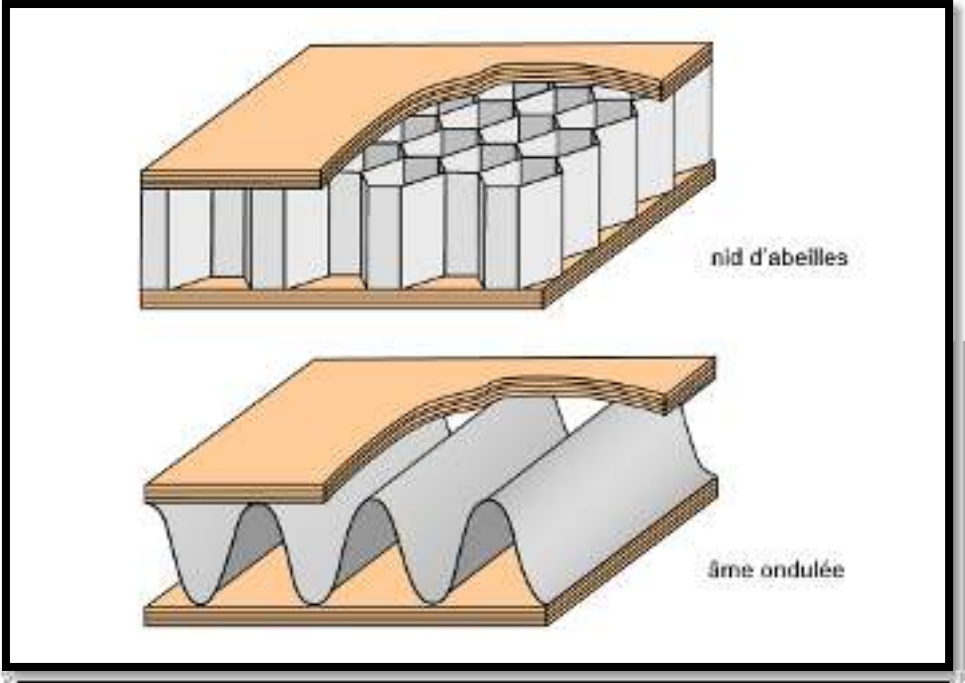


Figure I.16 : Matériaux sandwiches a âme creuses

10. Influences environnementales

- ✚ Les composites sont affectés par la chaleur et par l'humidité.
- ✚ Ils ne se corrodent pas sauf en cas de contact entre l'aluminium et les fibres de carbone.
- ✚ Ils sont insensibles aux produits chimiques (graisses, huiles, etc.) et ont une tenue aux impacts et aux chocs inférieure à celle des métaux.

11. Avantages et les inconvénients des matériaux composites

11.1. Les avantages des matériaux composites

- ✚ Gain de masse,
- ✚ Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interfaces (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques),
- ✚ En général, par leur caractère organique, les MC ont un excellent comportement vis à vis de la corrosion,
- ✚ Excellent comportement en fatigue et leur structure fibreuse fait qu'une rupture brutale de pièce en service est quasiment impossible,
- ✚ Très bon comportement aux chocs ; par exemple, ils participent à l'amélioration de la sécurité des véhicules grâce à leur endommagement progressif et donc à leur capacité d'absorption progressive d'énergie tout au long du choc,
- ✚ Conception du composite en fonction du type d'application et du chargement à l'inverse des matériaux classiques où on adapte la conception en fonction du matériau.

11.2. Les inconvénients des matériaux composites

- ✚ Vieillesse sous l'action de l'eau et de la température ;
- ✚ Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques ;
- ✚ Emission de fumées parfois toxiques pour certaines matrices ;
- ✚ Coût parfois élevé.

12. Loi de comportement

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\sigma_{ij} = C_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (I.1)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.2})$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité C , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité C_{ij} .

12.1. Matériaux anisotropes

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

12.2. Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. Supposons le plan (e_1, e_2) plan de symétrie du matériau. Cette matrice de rigidité se résume :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.3})$$

La matrice de souplesse a la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduite à 13.

12.3. Matériaux orthotropes

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotropie.

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.4})$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

12.4. Matériau transversalement isotrope

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe e_1 . C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie le matériau unidirectionnel est orthotrope, Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotrope, la matrice s'écrit :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{I.5})$$

La matrice de rigidité d'un matériau transversalement isotrope à 5 constantes d'élasticité indépendantes.

12.5. Matériaux isotropes

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope, dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux (02).

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \quad (\text{I.6})$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.7})$$

13. Conclusion

Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre une brève introduction aux matériaux composites, car nous avons présenté et défini les éléments constituant du matériau composite; les principales propriétés mécaniques et leurs compositions matérielles les différents types de matrices et renforts et domaines d'application de ces matériaux, Ainsi les lois élastiques qui régissent le matériau composite en tenant compte des différentes hypothèses (matériau isotrope, orthotrope, anisotrope, etc.).

Chapitre II
Les différentes théories des plaques

Chapitre II

II. Les différentes théories des plaques

II.1. Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie sous-marine, aérospatial, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...etc.), dans le domaine de l'énergie, et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture,... etc.), et même dans le monde du vivant (artères, bronches). Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle.

Une plaque est un solide délimitée par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces (Fig. II.1). On définit :

- Le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- Le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan (O, x, y) , d'équation ; $z = 0$;
- Une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .

On appelle h l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

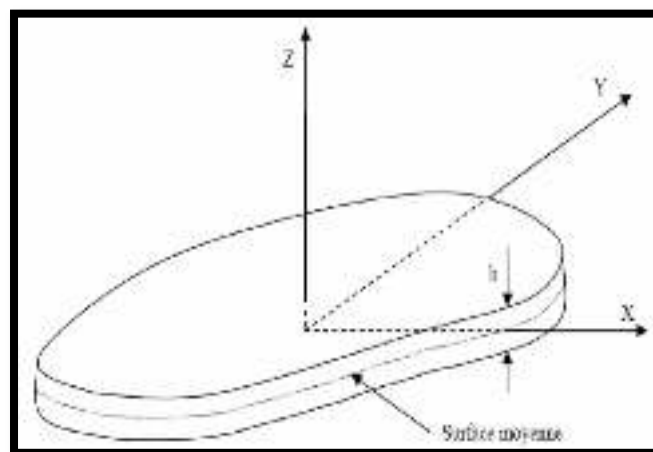


Figure II.1 : Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.

II.2. Historique

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lors que l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie 3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque. Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

II.3. Différents types de plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section Transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories.

II.3.1. Les plaques isotropes

Généralement elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (E et ν) : respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...etc.).

II.3.2. Les plaques orthotropes

Les propriétés élastiques des plaques orthotropes sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art [20].

II.3.3. Les plaques anisotropes

Les propriétés élastiques de ce type des plaques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

II.4. Domaine d'utilisation

Le domaine de l'utilisation de plaque est très répandue dans tous les domaines (voir figure II.2), en particulier dans le domaine du génie civil où, on les utilise dans les constructions simples (habitation) où les ouvrages d'art et elle existe sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaires et d'autre formes selon la qualité de l'ouvrage, Comme celle-ci est représenté dans les photos ci-dessous.



Ouvrages d'arts (plaques circulaires)



Ouvrages d'arts ponts



Ouvrages souterrains



Ouvrages d'arts ponts (tabliers)

Figure II.2. Domaine de l'utilisation des plaques

II.5. Modèles analytiques des plaques

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- ❖ Approche monocouche équivalente
- ❖ Approche par couche
- ❖ Approche développement asymptotique

II.5.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

II.5.1.1. La théorie classique des plaques minces de Love Kirchhoff (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff [25], selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse [19]. Ce modèle de plaque peut être référé à [42].

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Avec $(u_0, v_0$ et $w_0)$ sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque $z = 0$.

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats non précis pour les plaques épaisses.

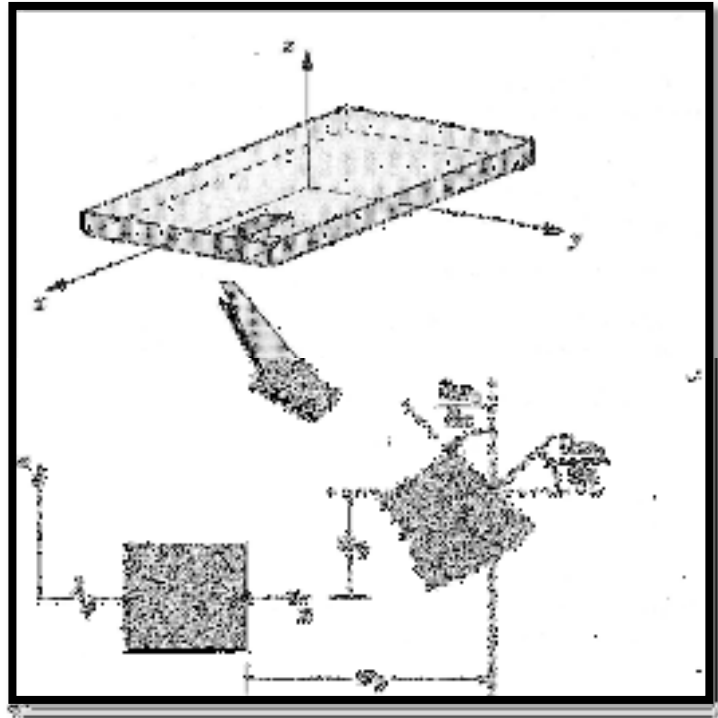


Figure II.3 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [43]

II.5.1.2. La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a prolongée la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui nécessite l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement.

Les études sur de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être trouve dans les références [44].

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Avec ϕ_x , ϕ_y , représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes x et y , respectivement (figure II.4). Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrites dans la derrière section par le remplacement, de tel sorte que :

$$\phi_x = \gamma_{xz} + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = \gamma_{yz} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.3})$$

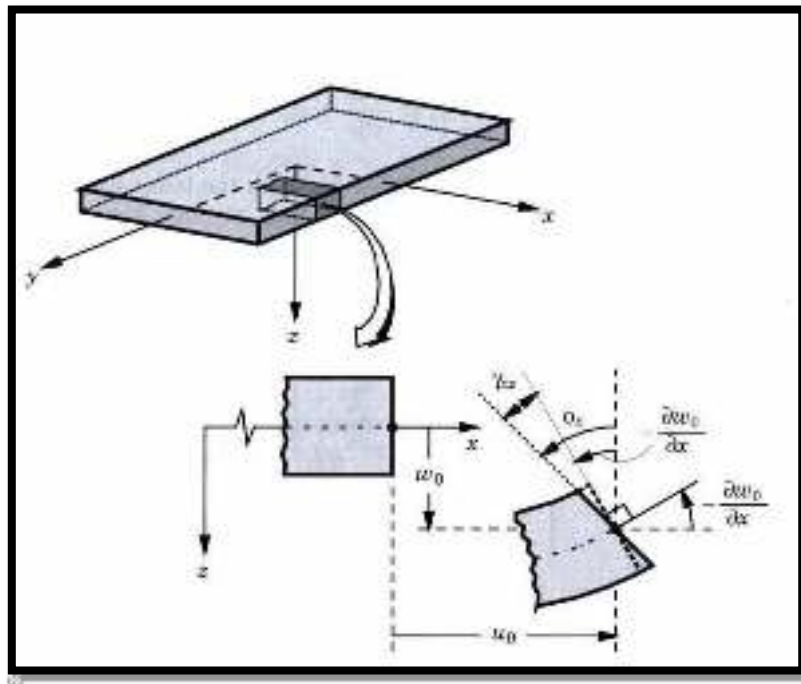


Figure II.4 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

Pour éviter l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.5.1.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

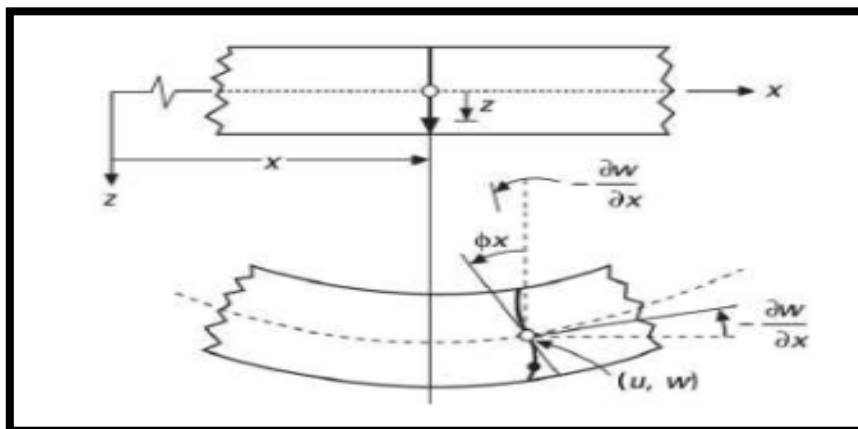


Figure II.5: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre élevé.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans [45]

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, y, z) &= u_0(\mathbf{x}, y) - z \frac{\partial w_0(\mathbf{x}, y)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(\mathbf{x}, y), \\ v(\mathbf{x}, y, z) &= v_0(\mathbf{x}, y) - z \frac{\partial w_0(\mathbf{x}, y)}{\partial y} + f(z) \varphi_y(\mathbf{x}, y), \\ w(\mathbf{x}, y, z) &= w_0(\mathbf{x}, y) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y , respectivement. $(\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y)$, $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérise les théories correspondante.

En effet, les déplacements de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenue en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$

5.1.4. Nouvelle théorie raffinée de déformation des plaques

Shimpi (2002) a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : Refined Plate Theory). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq dans le cas classique. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Ait Atmane *et al.* (2010) ont adaptée cette théorie pour la flexion des plaques FGM. Récemment Thai et Kim (2010, 2011) et Hadji *et al.* (2011) ont adapté la RPT, avec succès, au flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des plaques.

L'approche d'Ambartsumy an [4] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

L'approche de Reissner[30], Panc et Kaczkowski avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

L'approche de Levinson, Murthy[23]et([17] et [18]) avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant [18]. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène [31].

La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier [27] avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy[15].

Récemment, Afaq et al, proposent un modèle exponentiel (ESDPT) avec une cinématique plus riche [21]. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme suivante:

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) [27] ne permet qu'un développement en puissance impair.

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh(\frac{\pi}{h} z)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{II.11})$$

5.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (Reddy 1984).

Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan. D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zig où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches (Figure II.6).

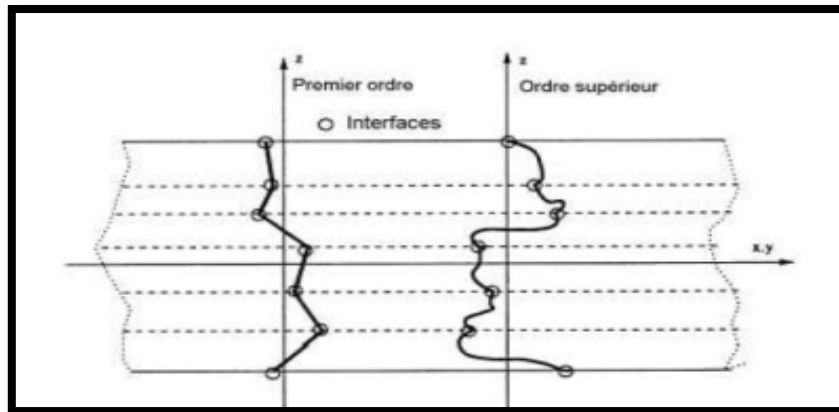


Figure. II.6 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche Cinématique(Nguyen.2004)

5.2.1. Les modèles zig-zag

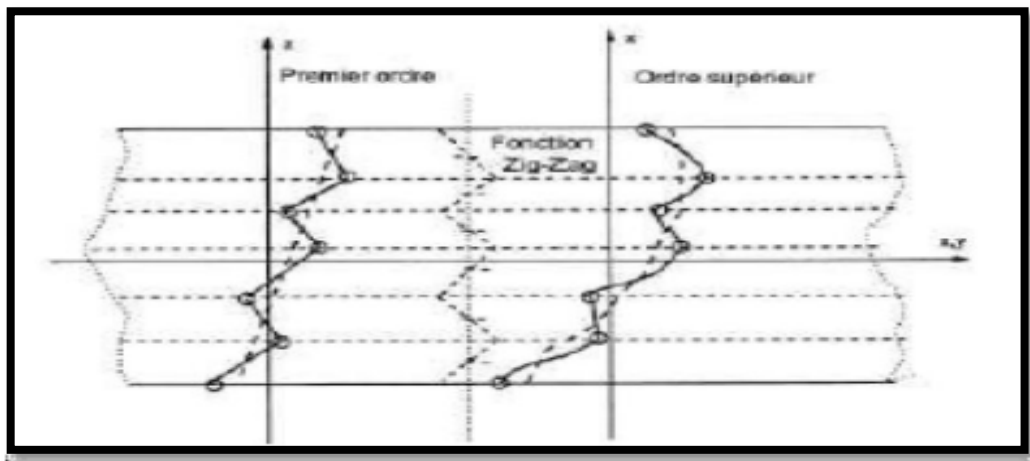


Figure II. 7 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique (Nguyen.2004)

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [Di Sciuva, 1984], [Di Sciuva, 1986], [Di Sciuva, 1987].

Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en X_3 mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (Figure II.6). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

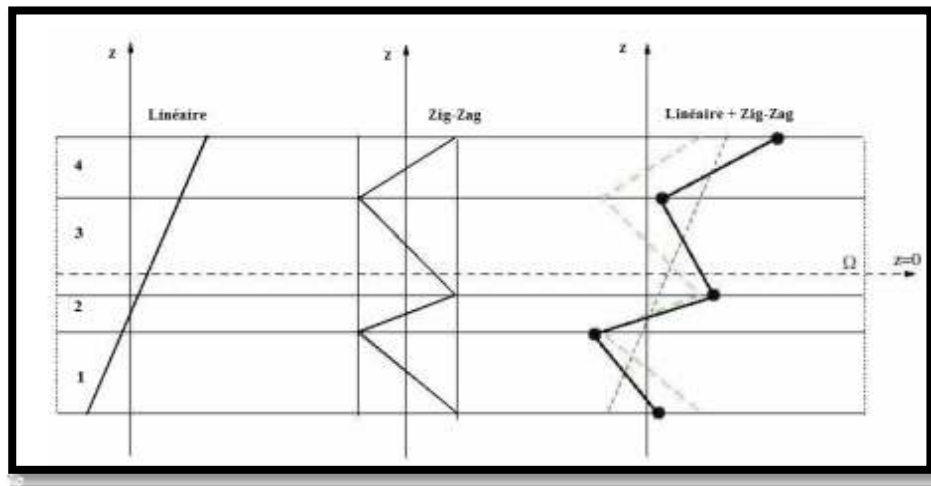


Figure II.8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.[Nguyen 2004]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de DI SCIUVA [41], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag, [42, 43, 44].

L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) (figure II-7). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres de TAFLA [45].

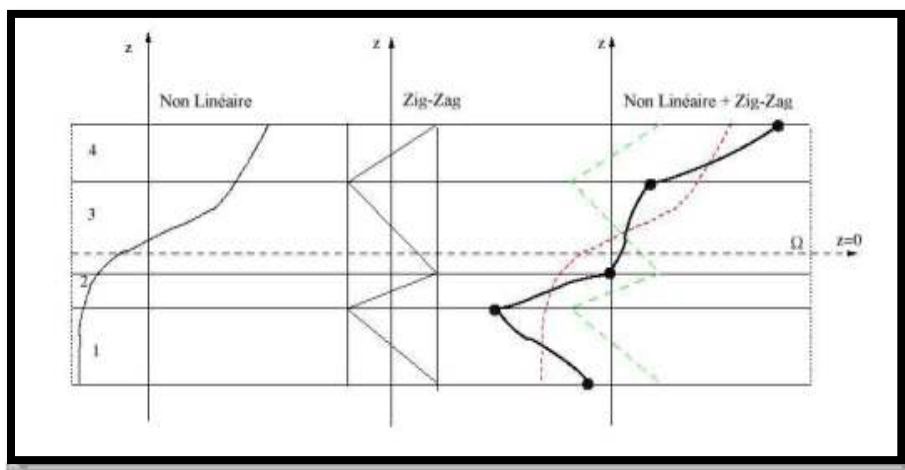


Figure II.9 : Champ de déplacements du modèle zig-zag d'ordre élevé

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

5.3. Approche développement asymptotique

Le développement asymptotique est appliqué à des structures à priori peu épaisses où le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite). Un deuxième type d'intégrales, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords (couche limite) est également construit [50, 51, 52]. Le travail le plus complet et intéressant semble celui de Ladeveze et Allix [53, 55]. Dans un premier temps, ils utilisent les résultats de la théorie classique des plaques. Puis, au voisinage du bord, ils posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs (contraintes et déplacements) correcteurs. Ce problème est décomposé en problème bidimensionnels (couches limites perpendiculaires au bord). Ensuite, on fait une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par exemple, par des développements en séries de Fourier. L'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces sont pris en compte [54].

Les approches développement asymptotique ont la même caractéristique à savoir qu'il faut pour calculer un effet de bord, effectuer deux calculs : un de plaque, l'autre de correction d'effet de bord. Ce deuxième calcul résolu de façon semi-analytique est limité à certains types de conditions limites et est donc difficile à appliquer pour les cas généraux [54].

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre élevé, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en termes de formulations.

Etude et analyse du flambement d'une plaque homogène soumise à un chargement thermique.

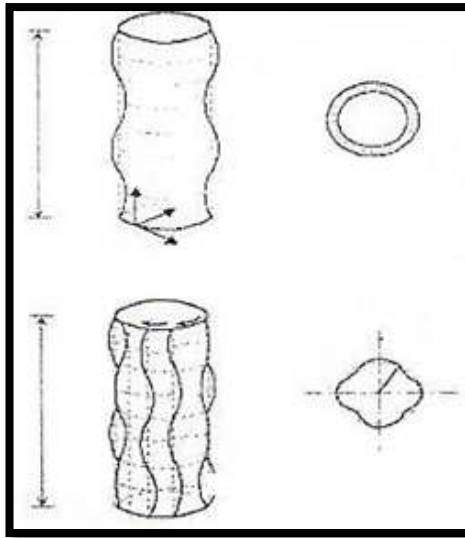


Figure II.10: Modes de flambement pour un cylindre soumis à une charge axiale

Selon la théorie classique du flambement des coques, la coque cylindrique parfaite peut flamber soit de manière axisymétrique - avec une succession d'anneaux - ou sous la forme d'un damier ; en fonction des circonstances du flambement, la coque peut prendre une configuration post flambement en forme de diamant. Afin de prendre en compte les imperfections, les règles de conception utilisent traditionnellement un facteur γ réduction, γ qui s'applique à la contrainte de flambement de coque critique élastique ; les valeurs de γ proviennent de tests réalisés sur des modèles à grande échelle.

6. Flambement des plaques

Dans le génie civil les plaques sont largement utilisées ; dans le (bâtiment, les ponts,...). Contrairement aux poutres et les colonnes, qui ont des longueurs plus grandes que les deux autres dimensions, et ils sont donc modélisés en tant que éléments linéaires, les plaques d'acier ont des largeurs comparables à leur longueur et ainsi sont modélisées comme des éléments non- linéaires (surface plane). Tout comme les longues colonnes qui subissent des instabilités (forme de flambement), les plaques en compression ont aussi tendance à se déformer dans leur surface plane. La forme dépend de l'appui et les conditions de chargement dans les deux directions de la longueur et la largeur.

Etude et analyse du flambement d'une plaque homogène soumise à un chargement thermique.

Toutefois, contrairement aux colonnes, les plaques continuent à porter des charges, même après un flambage. Cette propriété suscite d'un grand intérêt pour l'ingénierie en structure, puisque sa peu jouer dans l'intérêt de la stabilité.

7. Approche du Flambement

Soumettons une plaque rectangulaire à une compression simple à variable, appliquée sur 2 cotes parallèles. Lorsque la contrainte a atteint la valeur critique $k a$, la plaque ondule dans la direction orthogonale à la direction de $k a$. C'est un phénomène d'instabilité comme le flambement pour les poutres (solides à une dimension), on le nomme voilement. Le voilement est une sorte de flambement de plaques (solides à 2 dimensions).

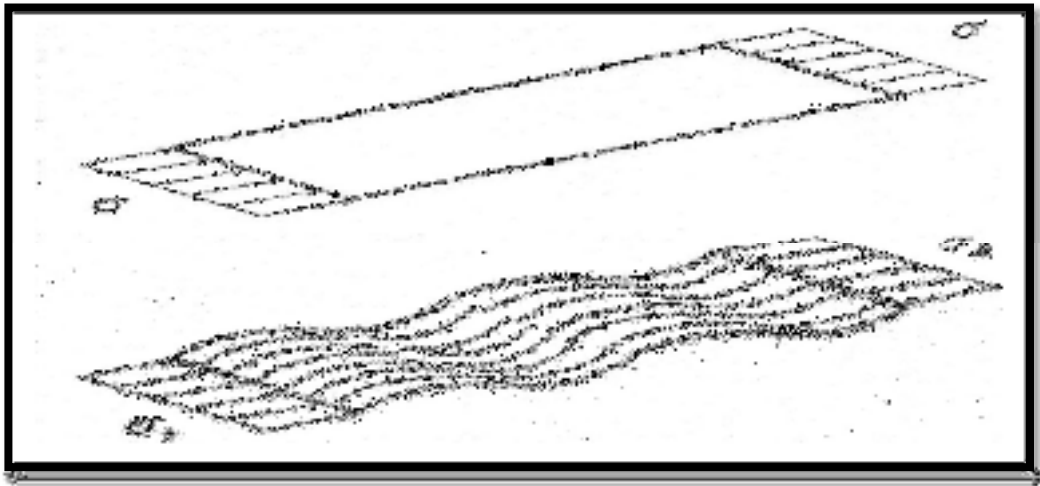


Figure II.11 : Flambement d'une plaque.

8. Plaque rectangulaire simplement appuyée sur les quatre cotes

Considérons une plaque rectangulaire parfaitement plate, simplement appuyée sur les quatre cotes et soumise à une force de compression uniforme N_x par unité de longueur dans la direction x (figure 1). L'équation d'équilibre pour une telle plaque est donnée par :

Etude et analyse du flambement d'une plaque homogène soumise à un chargement thermique Ou w désigne la déviation dans la direction z de tout point (x, y)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} \left(-N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.12})$$

Où w désigne la déviation dans la direction z de tout point (x,y)

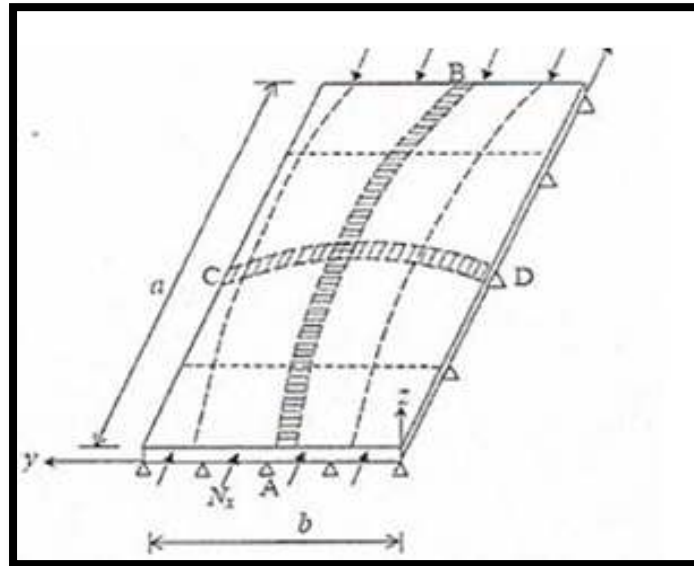


Figure II.12.: Flambage de la plaque sous une compression Uni axial

9. Modes du flambement des plaques

En abordant les structures à parois minces, (Plaques, coques, profilées,...) on doit immédiatement considérer les phénomènes de flambement qui y sont inhérents. Les structures à parois minces peuvent être soumises aux flambements local, distorsionnel et global.

9.1. Le flambement local

C'est un mode impliquant seulement la flexion hors-plan de plaque sans déformation des lignes à la jonction des plaques et il est caractérisé par l'onde de flambement relativement courte des plaques individuelles.

9.2. Le flambement distorsionnel

Etude et analyse du flambement d'une plaque homogène soumise à un chargement thermique Comme suggère le terme, est un mode de flambement impliquant le changement de forme de la section transversale ; les lignes d'intersection des plaques se déplacent relativement. L'onde du flambement distorsionnel est de valeur moyenne.

9.3. Le flambement global

Comprend les phénomènes de flambement d'Euler et flexion-torsionnelle du poteau et latéral de la poutre ; les sections dans le flambement global se déplacent comme des corps rigides sans aucune distorsion et l'onde de flambement global est la plus longue par rapport aux deux autres modes de flambement précédents.

10. L'interaction entre les modes de flambement

Sa peut se produire, pour le calcul, on examine souvent les interactions entre les flambements local et distorsionnel, local et global ou distorsionnel et global.

Les modèles d'éléments finis de plaque et de coque surbaissée déformable en cisaillement avec la rotation dans le plan ont été appliqués avec succès à l'analyse linéaire des structures à parois minces. On peut déterminer la contrainte de flambement élastique en considérant l'influence du cisaillement à travers l'épaisseur des parois. Les résultats s'accordent bien avec la théorie classique des plaques lorsque le rapport

largeur-épaisseur est grand. Bien que l'analyse linéaire du flambement soit suffisante dans la plupart des cas pratiques et utile pour la conception des barres à parois minces, quelques structures qui sont très sensibles à l'imperfection, ne sont pas proprement traitées par celle-ci. Dans ces cas, il faut recourir à l'analyse non-linéaire. La modélisation des structures à parois minces par éléments de plaque et de coque permet de tenir compte de la distorsion de la section transversale et de l'interaction entre les modes de flambement.

La méthode des éléments finis est depuis longtemps connue comme une méthode puissante pour l'analyse structurelle. De nombreux types de coques sont utilisés pour l'analyse non-linéaire des structures composées de plaques ; ce qui permet la simulation de la distorsion de la section transversale et des phénomènes de flambement de la structure.

11. Quelques exemples sur le flambement et les dommages causés

11.1. Flambement d'une âme de poutre



Figure II. 13: Flambement d'une âme de poutre

La semelle supérieure (comprimée) de cette poutre d'essai a été délibérément fabriquée avec un défaut à mi- portée. Les contraintes de compression localisées dans l'âme créent le flambement de cette dernière. Le but de l'essai était de déterminer les limites dans le changement de direction de la semelle pour lesquelles l'âme peut ne pas être raidie.

11.2. Flambement d'une plaque raidie sous compression longitudinale et pression hydrostatique

Etude et analyse du flambement plaque homogène soumise à un chargement thermique



Figure II.14. Flambement plaque homogène soumise à un chargement thermique

12. Conclusion

Dans cette partie on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique. Nous concluons que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux composites ou bien pour les plaques épaisses et les poutres courtes en utilisant différentes théories d'ordre élevé ou la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

Chapitre III
Analyse du comportement de
flambement des plaques épaisses

Chapitre III

Analyse du comportement de flambement des plaques épaisses

III.1. Introduction

Dans ce chapitre on va présenter une modèle analytique pour étudier la réponse de flambement des plaques épaisses en matériaux isotropes, simplement appuyées soumises au plan à des charges mécaniques de compression axiales et bi-axiales. A cet effet on utilise une simple théorie raffinée d'ordre élevé qui tient en considération les effets des déformations de cisaillement transversal à travers l'épaisseur des plaques. Le champ de déplacement de la présente théorie est composé par deux variables seulement, au lieu de trois ou plus dans les autres théories d'ordre élevé. A l'aide d'un développement analytique sur la base des formulations théoriques des lois de comportement, et en employant le principe des travaux virtuels on peut déterminer les équations de mouvement, par suite en utilisant une méthodologie de solution de type Navier on arrive à une solution analytique qui décrit le flambement des plaques isotropes épaisses. Des exemples numériques sont proposés pour démontrer l'exactitude de la présente théorie.

III.2. La théorie d'ordre élevé à deux variables

Contrairement aux autres théories, le nombre de variables inconnues impliquées dans la présente théorie de déformation de cisaillement est seulement deux (w_b et w_s), contre cinq (u_0, v_0, w_0, θ_x et θ_y) dans le cas d'autres théories de déformation de cisaillement [36, 40, 44] sont employées. La théorie présentée n'exige pas de facteur de correction de cisaillement pour corriger la distribution linéaire des contraintes de cisaillement transverse constatée au niveau de la théorie FSDT, par contre elle assure une distribution trigonométrique des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la plaque.

III.3. Formulation théorique

III.3.1. Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire de dimensions a et b et d'épaisseur h en matériau isotrope. Les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à $z = \pm h/2$, et les bords de la plaque sont parallèles aux axes x et y . La plaque est soumise à des forces de compression dans le plan (N_x^0, N_y^0) et représentées dans la figure III.1. Le système de coordonnées choisies occupe les intervalles donnés par l'équation (III.1).

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2. \quad (\text{III.1})$$

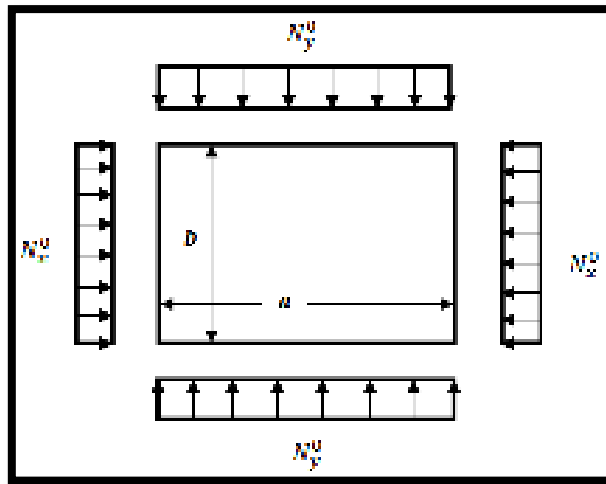


Figure III.1 : Géométrie d'une plaque dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires soumise à des forces dans le plan.

III.3.2. Hypothèses de base de la présente théorie raffinée

La présente théorie d'ordre élevé est fondée sur quelques hypothèses bien connues :

1. Avant le chargement, une plaque est idéalement plane et toutes les charges externes appliquées agissent strictement dans le plan médian de la plaque ;
2. L'état de contrainte est décrit par l'équation d'élasticité linéaire plane. Tout changement dans la dimension de la plaque est négligé avant le flambement ;
3. Toutes les charges appliquées aux plaques sont des charges permanentes, elles ne sont pas modifiées en amplitude ou en direction lorsque la plaque se déforme ;
4. la contrainte normale σ_z dans la direction transversale est négligeable en comparaison avec les autres contraintes σ_x et σ_y ;

5. La flexion de la plaque est décrite par la théorie raffinée de déformation de cisaillement trigonométrique ;
6. La composante du déplacement transversale w peut être dissociée en deux termes, le premier terme w_b peut signifier la partie de la flèche pure de la plaque, le second terme w_s représente la flèche induit par l'effet de la déformation de cisaillement de la section transversale.

III.3.3. Champ de déplacements et de déformations

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement en un point quelconque de coordonnées (x, y, z) dans la plaque peut être obtenu sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

Où $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ et $w(x, y, z)$ désignent les déplacements dans les directions x , y et z , respectivement. w_b et w_s sont les composantes de déplacement dû à la flexion et de cisaillement transversal, respectivement. La fonction trigonométrique $f(z)$ est assignée en fonction de la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Les déformations associées à la présente théorie sont obtenues en utilisant la relation de la théorie de l'élasticité déformation-déplacement.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial y},
 \end{aligned} \tag{III.3}$$

$$\text{Avec la fonction de cisaillement : } f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (\text{III.4})$$

$$\text{Et } g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} = \cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{III.5})$$

III.3.4. Champ de contraintes

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour un matériau isotrope peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces dernières et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Où : $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. Cependant les coefficients de rigidités Q_{ij} d'une plaque isotrope peuvent être exprimés en fonction des constantes d'ingénieur comme :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.7})$$

En substituant les équations (III.3) et (III.7) dans l'équation (III.6), Les contraintes correspondant aux déformations sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = \frac{-E}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) + f(z) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{-E}{1-\nu^2} \left[z \left(\nu \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) + f(z) \left(\nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{-E}{1+\nu} \left[z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} + f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right], \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)} g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)} g(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Où E , G et ν sont respectivement le module de Young, le module de cisaillement transversal et le coefficient de Poisson. Le principe des travaux virtuels est utilisé pour obtenir les équations d'équilibre et les conditions aux limites associées à la présente théorie. Celui-ci indique que, pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme de travail des efforts internes et le travail des efforts externes est nulle pour tout champ virtuel. La version analytique de ce principe dans le cas présent est donnée sous la forme suivante :

$$\int_{dV} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV - \int_A \left[N_{xx} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right] (\delta w_b + \delta w_s) dA = 0 \quad (\text{III.9})$$

Où (δ) est l'opérateur variationnel. En remplaçant les valeurs des déformations virtuelles par leurs expressions définies par les équations (III.3) dans l'équation (III.9), ensuite en faisant l'intégration à travers l'épaisseur de la plaque, on obtient :

$$\int_0^a \int_0^b \left(-M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + V_{xz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + V_{yz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} - N_{xx} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} - N_{yy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right) dx dy = 0 \quad (\text{III.10})$$

Où les résultantes des contraintes (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) , (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) et (V_{xz}, V_{yz}) sont définis comme :

$$\begin{aligned} (M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz, \\ (M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f(z) dz, \\ (V_{xz}, V_{yz}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

Nous intégrons l'équation (III.10) par parties et ensuite on fait la collection des coefficients ou bien des termes δw_b et δw_s égaux à zéro séparément. On peut ainsi obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation de cisaillement.

$$\begin{aligned}
\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - N_{xx} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} - N_{yy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} &= 0 \\
\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial V_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}}{\partial y} - N_{xx} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \\
- N_{yy} \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} &= 0
\end{aligned} \tag{III.12}$$

III.3.5. Analyse de stabilité des plaques isotropes épaisses par la solution de Navier

L'analyse de flambage d'une plaque isotrope rectangulaire simplement appuyée est obtenue en utilisant la technique de la solution de Navier. La plaque est soumise à des forces de compression dans le plan qui sont uniformément réparties le long des bords. La plaque soumise à une compression uniaxiale et bi-axiale est représentée sur la figure III.1 ci-dessous. Toutes les autres charges agissant sur la plaque sont supposées égales à zéro.

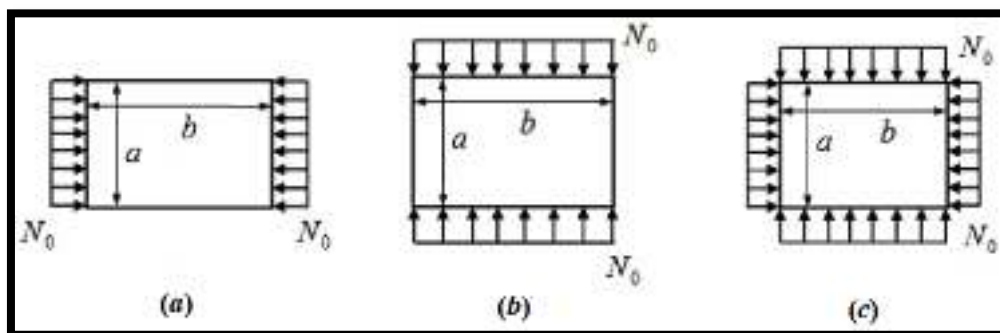


Figure III.1 : Plaque isotrope rectangulaire simplement appuyée soumise à des forces de compression dans le plan: (a) compression uniaxiale le long de la direction x , (b) compression uniaxiale le long de la direction y , (c) compression bi-axiale.

Généralement les forces de compression dans le plan (N_{xx} , N_{yy} et N_{xy}) représentent maintenant les charges au lieu des forces de réaction, car il n'y a pas de charge transversale. Les valeurs des forces de compression dans le plan sont prises comme :

$$N_{xx} = k_1 N_0, N_{yy} = k_2 N_0, N_{xy} = 0 \tag{III.13}$$

Les équations précédentes (III.12) régissant le flambement statique des plaques peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& -D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - F_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2D_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 2F_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - F_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
& - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4F_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - N_0 \left(k_1 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (III.14) \\
& -F_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2F_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 2H_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - F_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\
& - 4F_{66} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4H_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + As_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + As_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - N_0 \left(k_1 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right) = 0
\end{aligned}$$

Où les coefficients de rigidité de la plaque D_{ij} , F_{ij} , H_{ij} et As_{ij} sont définis comme suit :

$$(D_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z^2, zf(z), f^2(z)) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (III.15)$$

$$As_{44} = As_{55} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz$$

Les variables de déplacement w_b et w_s peuvent être exprimées sous forme d'une doubles séries trigonométriques de Fourier, satisfaisant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} w_b \\ w_s \end{cases} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{cases} \quad (III.17)$$

Avec les constantes $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$ et en cas de la charge répartie sinusoïdalement, les entiers positifs sont égaux à l'unité ($m=1$, $n=1$). W_{bmn} et W_{smn} sont les paramètres arbitraires représentent l'amplitude de chacun des termes dans les séries pour la solution de Navier déterminés sous la condition que la solution de l'équation (III.17) doit vérifier l'équation (III.12). La substitution des équations (III.15, III.16 et III.17) aux équations (III.14) mène à une équation pour laquelle on peut étudier la réponse de flambement des plaques épaisses en matériaux isotropes :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} - N_0 \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} W_{bmn} \\ W_{smn} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad (III.18)$$

Où les éléments de la matrice de rigidité $[K]$ et la matrice $[N]$ se réfère à la charge de flambement correspondante, les éléments des deux matrices sont définis selon les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} K_{11} &= D_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22}\beta^4 \\ K_{12} &= F_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(F_{12} + 2F_{66}) + F_{22}\beta^4 \\ K_{22} &= H_{11}\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2(H_{12} + 2H_{66}) + H_{22}\beta^4 + As_{44}\beta^2 + As_{55}\alpha^2 \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$$\text{Et } N_{11} = N_{12} = N_{22} = k_1\alpha^2 + k_2\beta^2 \quad (\text{III.20})$$

III.4. Conclusion

Cette partie du manuscrit a été consacré à l'analyse de flambement des plaques en matériaux composites simplement appuyées. Où on a utilisé une théorie raffinée de cisaillement à ordre élevé à deux variables. Cette théorie satisfait les conditions de nullité des contraintes de cisaillement dans les faces supérieur et inférieur de la plaque sans l'aide des facteurs correcteurs de cisaillement.

Nous avons procédé à l'établissement des équations d'équilibre par le principe des travaux virtuels, d'où la solution de Navier est utilisée pour résoudre le système d'équations et déterminer les charges critiques de flambement. À travers cette étude analytique, nous pouvons conclure que la présente théorie est non seulement précise, mais elle est aussi très simple et efficace pour étudier la stabilité au flambement mécanique des plaques isotropes.

Résultats et discussions

Chapitre IV

Résultats et discussions

IV.1. Introduction

Les charges critiques de flambement d'une structure dépendent des rigidités du matériau constitutif. Toutefois, l'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse du comportement en flambement des plaques isotopes épaisses, simplement appuyées en utilisant une théorie raffinée d'ordre élevé développé sur la base d'un champ de déplacement modifié à deux variables. Afin de vérifier l'exactitude de la théorie proposée, les résultats obtenus sont comparés et discutés avec les autres théories connus dans la littérature scientifique. En principe la présente étude est paramétrique, car elle peut déterminer les différents paramètres qui influent sur la stabilité vis-à-vis le flambement des plaques rectangulaires simplement appuyées en matériaux isotopes soumises à des conditions de chargements différentes (compression uniaxiale et bi-axiale).

Durant cette étude, on tient en compte l'effet de déformation de cisaillement transversal à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque, on discute aussi sur les effets des rapports d'élancement ou bien la longueur de la plaque sur l'épaisseur (a/h), les effets des rapports géométriques et les conditions de chargements sur la charge critique de flambement des plaques isotopes. Dans tous les exemples examinés, on prend en considération que le facteur de correction de cisaillement utilisé dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est de $5/6$.

IV.2. Résultats numériques et discussions

On considère dans cette application numérique des plaques carrées et rectangulaires simplement appuyées de dimensions a et b et de l'épaisseur h en matériaux isotropes est considérée pour l'étude numérique détaillée. Les faces (supérieure et inférieure) de la plaque sont à position $z = \pm h/2$ et les bords de la plaque sont parallèles aux axes x et y . La charge critique de flambement est obtenue pour la compression uniaxiale le long de la direction x , la compression uniaxiale le long de la direction y et la compression bi-axiale.

Les propriétés matérielles adimensionnelles de la plaque isotrope sont les suivantes :

$$E = 210\text{GPa}, \nu = 0.3, G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV. 1})$$

Pour plus de commodité, la charge critique de flambement adimensionnelle employée dans cette étude sous les différentes conditions de chargement est obtenue par la relation suivante:

$$\bar{N}_{cr} = \frac{a^2 N_0}{Eh^3} \quad (\text{IV. 2})$$

Où a et h représentent la longueur et l'épaisseur d'une plaque carrée, respectivement.

IV.2.1. Flambement des plaques isotropes sous compression uniaxiale

Les résultats de la charge critique adimensionnelle de flambement des plaques isotropes rectangulaires épaisses, simplement appuyées sont obtenus en utilisant la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement transversal à deux variables et quatre équations de mouvement. Les résultats numériques sont comparés et discutés avec ceux obtenus par la théorie classique des plaques (CPT) de Kirchhoff [1], la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) de Mindlin [2] avec un facteur de correction de cisaillement ($k=5/6$), la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) proposée par Reddy [3] et enfin la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique (TSDT) présentée par Sayyad et Ghugal [10].

La charge critique adimensionnelle de flambement dans le cas d'une compression uniaxiale le long de la direction x ($k_1=1, k_2=0$) est montrée dans le tableau IV.1 et dans le cas d'une compression uniaxiale le long de la direction y ($k_1=0, k_2=1$) dans le tableau IV.2 pour les différents rapports d'élancement ($a/h=5, 10, 20, 50, 100$) et les rapports géométriques ($a/b= 1, 1.5, 2.5, 3, 3.5, 4$) des plaques isotropes. Les résultats numériques obtenus par le modèle proposé et ceux données par la théorie d'ordre élevé de Reddy [3] sont en excellent accords. On peut constater également que, dans cette condition de chargement, la charge critique de flambement diminue avec l'augmentation du rapport géométrique exprimé par la longueur sur la largeur (a/b).

Tableau IV.1 : Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambement \bar{N}_{cr} des plaques isotropes rectangulaires soumises à une compression uniaxiale le long de la direction x .

k_1, k_2	$\frac{a}{h}$	Theories	b/a						
			1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
(1,0)	5	Présente	2.951	1.621	1.237	1.075	1.075	0.942	0.911
		Sayyad and Ghugal[10]	3.026	1.654	1.259	1.093	1.007	0.957	0.925
		Reddy [3]	2.951	1.621	1.237	1.075	0.991	0.942	0.911
		Mindlin [2]	2.949	1.621	1.237	1.075	0.991	0.942	0.911
		Kirchhoff [1]	3.615	1.885	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020
	10	Présente	3.422	1.812	1.364	1.177	1.081	1.026	0.990
		Sayyad and Ghugal [10]	3.454	1.825	1.373	1.185	1.089	1.032	0.997
		Reddy [3]	3.422	1.812	1.364	1.177	1.081	1.026	0.990
		Mindlin [2]	3.422	1.811	1.364	1.177	1.081	1.026	0.990
		Kirchhoff [1]	3.615	1.885	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020
	20	Présente	3.564	1.866	1.399	1.206	1.107	1.049	1.012
		Sayyad and Ghugal [10]	3.582	1.874	1.405	1.211	1.111	1.053	1.016
		Reddy [3]	3.564	1.866	1.399	1.206	1.107	1.049	1.012
		Mindlin [2]	3.564	1.866	1.399	1.206	1.107	1.049	1.012
		Kirchhoff [1]	3.615	1.885	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020
	50	Présente	3.606	1.882	1.410	1.124	1.114	1.055	1.018
		Sayyad and Ghugal [10]	3.621	1.889	1.415	1.219	1.118	1.059	1.022
		Reddy [3]	3.606	1.882	1.410	1.124	1.114	1.055	1.018
		Mindlin [2]	3.607	1.882	1.410	1.214	1.114	1.056	1.019
		Kirchhoff [1]	3.615	1.885	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020
100	Présente	3.613	1.884	1.411	1.215	1.115	1.056	1.019	
	Sayyad and Ghugal [10]	3.625	1.891	1.416	1.219	1.119	1.060	1.023	
	Reddy [3]	3.613	1.884	1.411	1.215	1.115	1.056	1.019	
	Mindlin [2]	3.613	1.885	1.411	1.215	1.115	1.057	1.020	
	Kirchhoff [1]	3.615	1.558	1.412	1.216	1.115	1.057	1.020	

Tableau IV.2 : Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambement \bar{N}_{cr} des plaques isotropes rectangulaires soumises à une compression uniaxiale le long de la direction y .

k_1, k_2	$\frac{a}{h}$	Theory	b/a						
			1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
(0,1)	5	Présente	2.951	3.649	4.951	6.722	8.925	11.546	14.580
		Sayyad and Ghugal[10]	3.026	3.721	5.039	6.835	9.069	11.729	16.269
		Reddy [3]	2.951	3.649	4.951	6.722	8.925	11.546	14.580
		Mindlin [2]	2.949	3.648	4.950	6.721	8.923	11.545	14.578
		Kirchhoff [1]	3.615	4.242	5.648	7.601	10.042	12.953	16.325
	10	Présente	3.422	4.076	5.456	7.360	9.737	12.570	15.850
		Sayyad and Ghugal[10]	3.454	4.108	5.495	7.410	9.802	12.652	15.953
		Reddy [3]	3.422	4.076	5.456	7.360	9.737	12.570	15.850
		Mindlin [2]	3.422	4.076	5.456	7.360	9.737	12.570	15.850
		Kirchhoff [1]	3.615	4.242	5.648	7.601	10.042	12.953	16.325
	20	Présente	3.564	4.200	5.599	7.539	9.964	12.855	16.204
		Sayyad and Ghugal[10]	3.582	4.218	5.623	7.570	10.005	12.907	16.269
		Reddy [3]	3.564	4.200	5.599	7.539	9.964	12.855	16.204
		Mindlin [2]	3.564	4.200	5.599	7.539	9.964	12.855	16.204
		Kirchhoff [1]	3.615	4.242	5.648	7.601	10.042	12.953	16.325
	50	Présente	3.606	4.235	5.640	7.590	10.028	12.935	16.303
		Sayyad and Ghugal[10]	3.621	4.251	5.660	7.618	10.066	12.984	16.365
		Reddy [3]	3.606	4.235	5.640	7.590	10.028	12.935	16.303
		Mindlin [2]	3.607	4.236	5.641	7.591	10.030	12.937	16.305
		Kirchhoff [1]	3.615	4.242	5.648	7.601	10.042	12.953	16.325
100	Présente	3.613	4.240	5.646	7.595	10.037	12.944	16.312	
	Sayyad and Ghugal[10]	3.625	4.255	5.665	7.624	10.073	12.992	16.375	
	Reddy [3]	3.613	4.240	5.646	7.595	10.037	12.944	16.312	
	Mindlin [2]	3.613	4.241	5.646	7.598	10.037	12.950	16.321	
	Kirchhoff [1]	3.615	4.242	5.648	7.601	10.042	12.953	16.325	

La variation de la charge critique de flambement des plaques isotropes carrées simplement appuyées est également présentée sur les figures IV.1 et IV.2 dans le cas d'une compression uniaxiale le long de la direction x ($k_1=1, k_2=0$) et dans le cas d'une compression uniaxiale le long de la direction y ($k_1=0, k_2=1$), respectivement. Les résultats obtenus par la théorie raffinée (RPT) à deux variables et la théorie HSDT de Reddy [3] sont en excellent accord même si la plaque est très épaisse en raison de l'inclusion de l'effet de déformation de cisaillement transversal.

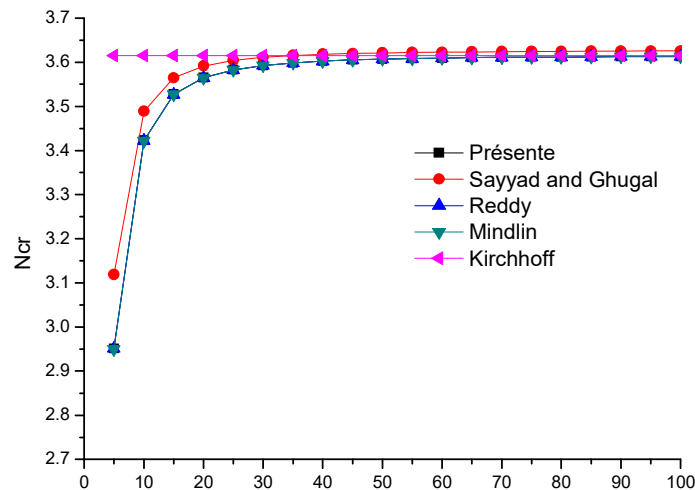


Figure IV.1 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport d'élancement (a/h) d'une plaque carrée en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression uniaxiale le long de la direction x .

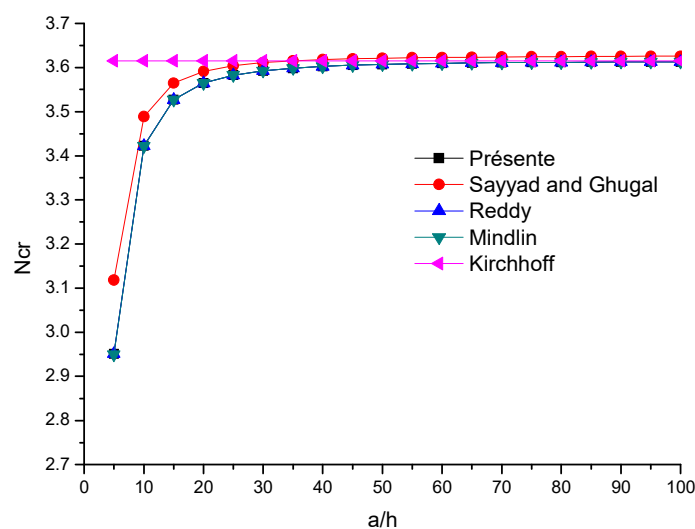


Figure IV.2 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport d'élancement (a/h) d'une plaque carrée en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression uniaxiale le long de la direction y .

En outre, lorsque la plaque isotrope simplement appuyée est utilisée dans le cas d'un chargement uniaxiale (figures IV.1 et IV.2), on observe clairement que la valeur de la charge critique adimensionnelle de flambement est diminuée d'une manière significative avec la diminution du rapport d'élanement, généralement (a/h) inférieur à 20 pour les différentes théories de déformation de cisaillement, cela est due à l'effet de la déformation de cisaillement transversal. Toutefois la théorie classique (CPT) surestime les charges critiques de flambement des plaques épaisses en raison de la négligence de l'effet de cisaillement.

Pour vérifier l'exactitude et la précision de la présente théorie raffinée, la variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonctions de la variation des rapports géométriques (a/b) des plaques isotropes épaisses simplement appuyées, soumises à une compression uniaxiale le long de la direction x et le long de la direction y est illustrée sur les figures (IV.3) et (IV.4), respectivement. Les résultats obtenus sont comparés à ceux présentés par CPT, FSDT, TSDT et HSDT. Il a indiqué très clairement que l'augmentation du rapport géométrique à un effet significatif sur la diminution de la charge critique adimensionnelle de flambement des plaques isotropes sous compression uniaxiale le long de la direction x , par contre l'augmentation de ce rapport dans le cas d'une compression uniaxiale le long de la direction y à un effet significatif sur la l'augmentation de la charge critique adimensionnelle de flambement.

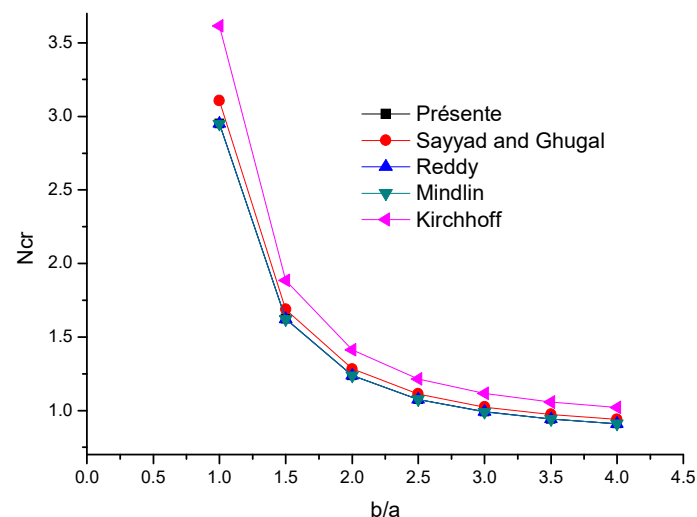


Figure IV.3 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport géométrique (a/b) d'une plaque en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression uniaxiale le long de la direction x avec $a/h=5$.

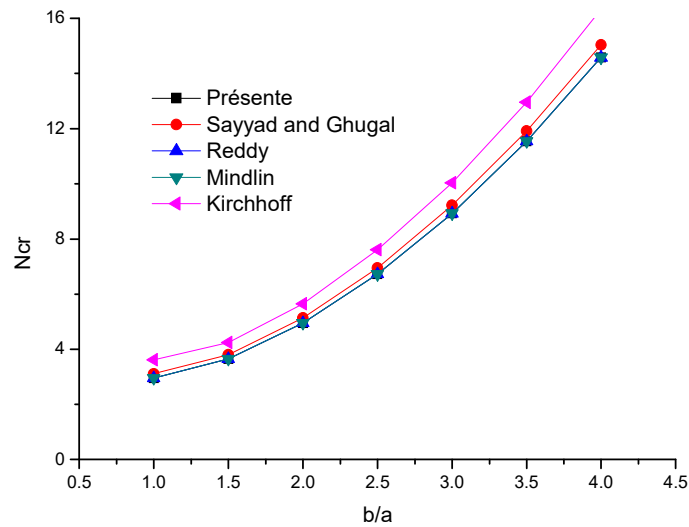


Figure IV.4 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport géométrique (a/b) d'une plaque en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression uniaxiale le long de la direction y avec $a/h=5$.

IV.2.2. Flambement des plaques isotropes sous compression bi-axiale

A partir des résultats obtenus dans le tableau (IV.3), on peut constater aussi que la variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en utilisant la présente théorie de déformation de cisaillement et les autres théories disponibles dans la littérature dépend non seulement du rapport d'élancement (longueur/épaisseur) et des rapports géométriques (longueur/largeur), mais aussi aux conditions de chargement dans le plan. Ceci peut être observé lorsque la plaque en matériau isotrope rectangulaire, simplement appuyée est soumise à une compression bi-axiale le long des deux dimensions x et y ($k_1=1, k_2=1$) avec les valeurs du rapport ($a/h=5, 10, 20, 50, 100$).

Tableau IV.3 : Comparaison de la charge critique adimensionnelle de flambement \bar{N}_{cr} des plaques isotropes rectangulaires soumises à une compression bi-axiale.

k_1, k_2	$\frac{a}{h}$	Theories	b/a						
			1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
(1,1)	5	Présente	1.475	1.122	0.990	0.927	0.892	0.871	0.857
		Sayyad and Ghugal[10]	1.513	1.145	1.007	0.942	0.907	0.885	0.871
		Reddy [3]	1.475	1.122	0.990	0.927	0.892	0.871	0.857
		Mindlin [2]	1.474	1.122	0.990	0.927	0.892	0.871	0.857
		Kirchhoff [1]	1.807	1.305	1.129	1.048	1.004	0.977	0.960
	10	Présente	1.711	1.254	1.091	1.015	0.973	0.948	0.932
		Sayyad and Ghugal[10]	1.727	1.264	1.099	1.022	0.980	0.954	0.938
		Reddy [3]	1.711	1.254	1.091	1.015	0.973	0.948	0.932
		Mindlin [2]	1.711	1.254	1.091	1.015	0.973	0.948	0.932
		Kirchhoff [1]	1.807	1.305	1.129	1.044	1.004	0.977	0.960
	20	Présente	1.782	1.292	1.119	1.039	0.996	0.970	0.953
		Sayyad and Ghugal[10]	1.791	1.298	1.124	1.045	1.000	0.974	0.957
		Reddy [3]	1.782	1.292	1.119	1.039	0.996	0.970	0.953
		Mindlin [2]	1.782	1.292	1.119	1.039	0.996	0.970	0.953
		Kirchhoff [1]	1.807	1.305	1.129	1.048	1.004	0.977	0.960
	50	Présente	1.803	1.303	1.128	1.046	1.002	0.976	0.959
		Sayyad and Ghugal[10]	1.810	1.308	1.132	1.050	1.006	0.979	0.962
		Reddy [3]	1.803	1.303	1.128	1.046	1.002	0.976	0.959
		Mindlin [2]	1.803	1.303	1.128	1.046	1.002	0.976	0.959
		Kirchhoff [1]	1.807	1.305	1.129	1.048	1.004	0.977	0.960
	100	Présente	1.806	1.304	1.129	1.047	1.003	0.976	0.959
		Sayyad and Ghugal[10]	1.812	1.309	1.133	1.051	1.007	0.980	0.963
		Reddy [3]	1.806	1.304	1.129	1.047	1.003	0.976	0.959
		Mindlin [2]	1.806	1.305	1.129	1.048	1.003	0.977	0.960
Kirchhoff [1]		1.807	1.305	1.129	1.048	1.004	0.977	0.960	

Selon les résultats montrés dans le tableau (IV.3), on observe que lorsque la plaque isotrope est soumise à une charge de compression bi-axiale ($k_1 = 1, k_2 = 1$) avec les rapports géométriques ($a/b = 1, 1.5, 2.5, 3, 3.5, 4$), la charge critique adimensionnelle de flambement peut atteindre des valeurs minimales pour les conditions de chargement où les sollicitations de compression sont appliquées suivant les deux directions par rapport à une seule direction de sollicitation ($k_1 = 1, k_2 = 0$ ou $k_1 = 0, k_2 = 1$). On peut dire d'une manière ou autre que la charge de flambage critique correspond exactement à la moitié de la compression uniaxiale pour la plaque isotrope carrée ($b/a = 1$).

En cas de la théorie classique CPT, la charge critique de flambement est indépendante du rapport d'élanement (a/h). La figure (IV.5) ci-dessous montre que, pour la valeur la plus élevée de ce rapport, généralement ($a/h > 25$), on peut dire d'une manière ou autre que les résultats obtenus par la présente théorie et les différentes théories TSDT, FSDT, FSDT et CPT sont plus ou moins identiques.

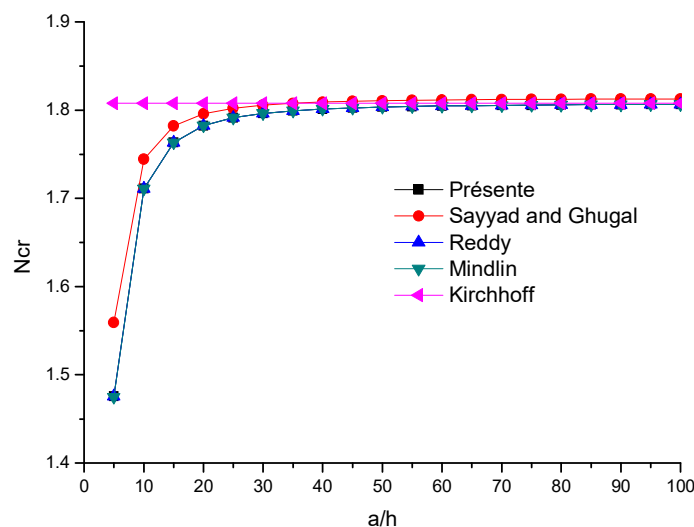


Figure IV.5 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport d'élanement (a/h) d'une plaque carrée en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression bi-axiale.

L'effet du longueur/largeur (a/b) sur la charge critique de flambement pour une plaque en matériau isotrope, simplement appuyée sous compression bi-axiale est représenté sur la figure IV.6. La même chose peut être adoptée que dans le cas de la compression uniaxiale. Il

est important d'observer que, les charges critiques de flambement sont plus grandes en compression uniaxiale et plus petite en compression bi-axiale. La figure IV.6 montre aussi la charge critique de flambement diminue avec l'augmentation du rapport géométrique (a/b).

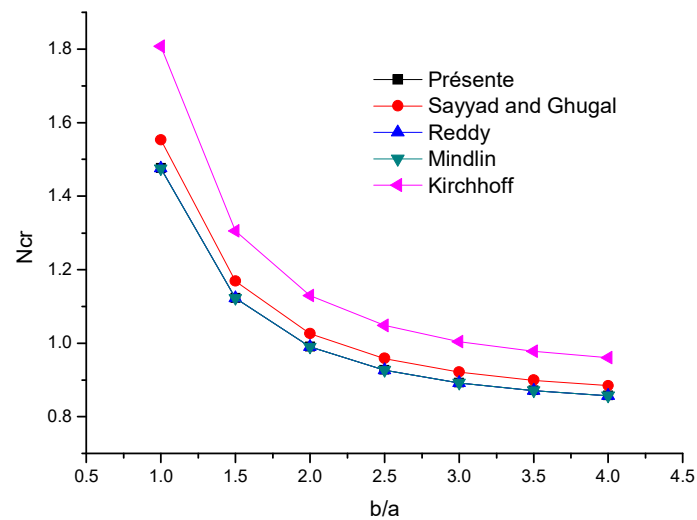


Figure IV.6 : Variation de la charge critique adimensionnelle de flambement en fonction du rapport géométrique (a/b) d'une plaque en matériau isotrope simplement appuyée sous une compression bi-axiale avec $a/h=5$.

IV.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du comportement en flambement des plaques rectangulaires épaisses en matériau isotrope sous chargement uniaxiale et bi-axiale, en utilisant la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique d'ordre élevé à deux variables.

La présente formulation de cette théorie raffinée a été appliquée avec succès pour étudier le comportement en flambement des plaques en matériau isotrope. Les résultats obtenus de la charge critique en tenant comptes plusieurs paramètres adimensionnels, sont comparés et discutés avec différentes théories évaluées par d'autres chercheurs. et s'est avéré très précise que la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé à cinq variables proposée par Reddy [3] on peut conclure que la théorie actuelle est précise et efficace dans la prédiction de la déformation critique.

Conclusion générale

Conclusion générale

Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement trigonométrique raffinée a été développée et appliquée avec succès pour étudier le comportement en flambement des plaques rectangulaires en matériaux isotropes, simplement appuyées sous conditions de chargement uniaxial et bi-axial. La théorie implique deux inconnues contre trois ou plus dans le cas des autres théories d'ordre élevé en satisfaisant les conditions des contraintes de cisaillement transversal nulles sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement. En proposant d'autres hypothèses simplifiantes aux théories HSDT classiques, en considérant le terme de déplacement transversal, le nombre des variables inconnues et les équations de mouvement de la présente théorie proposée sont réduits, et donc, rendre cette théorie simple et efficace à utiliser. En utilisant le principe des travaux virtuels, les équations différentielles d'équilibre sont obtenues et les solutions analytiques basées sur la procédure de la solution Navier sont également déterminées. Les résultats obtenus sont comparés et discutés aux résultats trouvés dans la littérature scientifique, ces théories ont montré leur efficacité comme les autres théories à ordre élevé pour l'étude analytique des plaques isotropes épaisses. Les résultats actuels seront des références utiles pour évaluer les autres futures théories de la plaque et les méthodes numériques telles que l'élément fini, on peut conclure que la théorie actuelle est précise et efficace dans la prédiction de la charge critique de flambement.

Il est conclu de cette étude que, la présente théorie est en excellent accord tout en prédisant le comportement de flambement des plaques rectangulaires épaisses. Toutefois la charge de flambement critique pour une plaque carrée soumise à une compression bi-axiale est exactement la moitié de celle soumise à une compression uniaxiale. On observe également que la charge de flambement critique pour la plaque carrée est la même en cas de la compression uniaxiale.

En perspective, il est prévu d'appliquer le modèle à deux variables pour le calcul de différentes formes de structures minces et épaisses en matériaux composites sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, vibratoire,

hygrothermique) et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives.

Finalement, ce modeste travail s'inscrit dans le cadre de la contribution de notre université dans la thématique du développement de nouvelles théories de plaques et poutres pour le calcul des structures en matériaux composites soumis à des différents types de chargements.

Références bibliographiques

Références bibliographiques :

- [1]-G.R. Kirchhoff, Uber das gleichgewicht und die bewegungeinerelastischenscheibe, J. ReineAngew. Math. 40(1850) 51-88.
- [2]- R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, ASME J. App.Mech. 18 (1951) 31-38.
- [3]- J.N. Reddy, A simple higher order theory for laminated composite plates, ASME J. Appl. Mech. 51 (1984) 745–752.
- [4]- R.P. Shimpi, H.G. Patel, A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis, Int. J. Solids Struct.43(22) (2006) 6783–6799.
- [5]- S.E. Kim, H.T. Thai, J. Lee, Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory, Thin WalledStruct. 47 (2009) 455–462.
- [6]- H.T. Thai, S.E. Kim, Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variables refinedplate theory, Composite Struct. 93 (2011) 1738–1746.
- [7]- Y.M. Ghugal, M.D. Pawar, Buckling and vibration of plates by hyperbolic shear deformation theory, J. Aero.Eng.Tech. 1(1) (2011) 1–12.
- [8]- A.S. Sayyad, Flexure of thick orthotropic plates by exponential shear deformation theory, Lat. Am. J. SolidsStruct. 10(2013) 473 – 490.
- [9]- A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponentialshear deformation theory. Appl. Comput. Mech. 6 (2012) 65–82.
- [10]- A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, On the buckling of isotropic, transversely isotropic and laminated compositerectangular plates. Int. J. Struct. Stab. Dyn. 14(7) (2014) 1-32
- [11]- A.S. Sayyad, S.M. Ghumare, S.T. Sasane, Cylindrical bending of orthotropic plate strip based on nth-order platetheory, J. Mater. Eng. Struct. 1(2) (2014) 47-57
- [12]- H.T. Thai, T.P. Vo, A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling and vibration of functionallygraded plates, Appl. Math. Model. 37(5) (2013) 3269-3281.
- [13]- B.M. Shinde, A.S. Sayyad, S.M. Ghumare, A refined shear deformation theory for bending analysis of isotropicand orthotropic plates under various loading conditions, J. Mater. Eng. Struct. 2(1) (2015) 3-15.
- [14] Hull d. et clyne T.W An introduction to composite materials 2nd edition

Edition cambridge university press, Uk, 1997

[15] Barrau j.-j. et Larose S. Calcul des structures en matériaux composites
Collection résistance des matériaux et structures. Edition Masson, Paris, 1987.

[16] Harris B. Fatigue in composites : science and technology of the fatigue response
of fibre-reinforced plastics . Edition B. Harris, University of Bath, UK, 1983.

[17]: GAY, D., *Matériaux composites, 3ème édition. Paris : Hermès, 1991. 569p.*

[18] Jean-Marie Berthlot *Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des
structures édition, Ed TEC&DOC, Lavoisier, 2005*

[19] K.J. Bathe, D. Chapelle, and P.S. Lee « A shell problem 'highly
sensitive' to thickness changes. Internat ». J. Numer. Methods Engrg, 2003

[20] Ambartsumyan. S.A. Theory of anisotropic plate.. Technomic Publishing Co,
1969

[21] Reddy. J. N., Wang. C. M., Lee. K. H. Relationships between bending
solutions of classical and shear deformation beam theories. International Journal of
Solids and Structures 34 (26), 3373-338, 1997.

[22] J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic plates. Taylor & Francis,
Philadelphia, 1999

[23] M.V.V. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for
laminated anisotropic plate. Rapport technique, NASA, 1981.

[24] Reissner. E., The effect of transverse shear deformation on the bending of
elastic plates. J. Appl. Mech; 12 (2): 69-77, 1945.

[25] Van Anh DUONG Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec
interfaces imparfaites Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées,
2008. M. Tourati, An efficient standard plate theory, EngngSci, Vol.29, no 8, page 901-916,
1991.

[26] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of
Applied Mechanics, vol. 51, pages 745-752, 1984.

[27] K.S. Afaq. Développement d'un nouveau modèle pour les structures Composites
multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de
bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.

[28] A. Naderi, A.R. Saidi, On pre-buckling configuration of functionally graded Mindlin
rectangular plates, Mech. Res. Commun. 37 (6) (2010) 535–538.

[29] I. Shufrin, M. Eisenberger, Stability and vibration of shear deformable plates-first
order and higher order analyses, Int. J. Solids Struct. 42 (3–4) (2005) 1225–1251.

- [30] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour, Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure, *Compos. Struct.* 93 (2) (2011) 722–735.
- [31] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee, S.R. Atashipour, A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates, *Int. J. Mech. Sci.* 53 (1) (2011) 11–22.
- [32] J.N. Reddy, Analysis of functionally graded plates, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 47 (1–3) (2000) 663–684.
- [33] Fredrichs K.O. Dressler R.F., A boundary layer theory for elastic plates. *Comm. on Pure Applied Mathematics*, vol. 14, p. 1–33, 1961.
- [34] Goldenveizer A.L., Derivation of an approximate theory of bending of plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity. *Prikl. Mat. Mech.*, vol. 26, no. 4, p. 668–686, 1962.
- [35] Widera O.E., An asymptotic theory for the motion of elastic plates. *Acta. Mech.*, vol. 9, p. 54–66, 1970.
- [36] Ladeveze P., Les modèles classiques et leurs extension pour le calcul des plaques, volume 2 of *Calcul de Structures et Intelligence Artificielle*. Pluralis, 1988.
- [37] Nguyen V. T., Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.
- [38] Allix O., Modélisation du comportement des composites stratifié : application à analyse du délaminage. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [39] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Jornal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [40] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *EngngSci*, vol. 29, no 8, pages 901-916, 1991.
- [41] K.S. Afaq. Développement d'un nouveau modèle pour les structures Composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier,
- [42] Timoshenko et Woinowsky-Krieger, (1959) et Reddy (1997, 1999).
- [43] Reddy 1997.
- [44] Reissner 1945; Mindlin 1951.
- [45] (Hildebrand et al. 1949; Naghdi 1957; Reissner, 1975; Reddy1984; Kant et Swaminathan 2002).