



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : Matériaux et structures

Présenté par :

BOUCHAKOUR BOUCHRA  
MED SALEM OULD MED ELMOUSTAPHA

*Sujet du mémoire*

***Application d'une simple théorie de déformation de cisaillement du premier ordre pour l'étude des plaques composites stratifiées***

*Soutenu publiquement le 21 /06/2017 devant le jury composé de :*

Mr, ABDELAZIZ.H.H  
Mr, DRAICHE.K  
Mr, HADJI.H  
Mr, TLIDJI.Y  
Mme, KHELIFA.Z

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## *Remerciement*

Tout d'abord, je remercie le bon DIEU qui m'a doté de la volonté, du courage et surtout de la patience pour produire ce modeste travail et qui m'a aidé à faire face à toutes les difficultés rencontrées lors de son élaboration.

Je profite de cette occasion pour adresser mes sincères remerciements à **Dr. BOUAKAZ KHALED** chef de département de la faculté de génie civil de l'université Ibn khaldoun-Tiaret.

Je ne trouve pas les mots pour exprimer ma gratitude envers **Dr. Draïche Kada**, mon encadreur. Ses conseils et ses encouragements ont permis à ce travail d'aboutir. Ses capacités scientifiques et ses compétences étaient mon grand support. Faire mon mémoire sous sa direction était pour moi un grand honneur et un immense bonheur. La liberté qu'il m'a accordée et les responsabilités qu'il m'a confiées ont beaucoup contribué à la formation de ma personnalité et à mon autonomie de travail.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres du jury. Je les remercie pour le soutien et l'attention.

DRAICHE KADA  
HADJI LAZRAG  
THLIJI YUCEF  
KHELIFA ZOUBIDA  
HADJ HENNI

Enfin je ne peux pas oublier les gens de la faculté de génie civil de l'université **Ibn khaldoun-Tiaret**- où était le début de mon chemin scientifique. Je les remercie sincèrement pour m'avoir donné ce niveau d'ingénieur, ce niveau qui a constitué mon véritable appui et mon support durant ce travail et il le fera le long du mon chemin professionnel... .



Je dédie ce modeste travail

A mes parents,

A ma mère, qui à oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

A mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privation pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.

A mon frère BILLAL et sa femme RIMA .

A ma petite sœur BOUTHAINA qui je la souhaite beaucoup de réussite dans ses études.

A ma grand-mère maternelle , Ma tante SAMIA et son mari MAAMAR et ses enfants, Mon oncle RACHID , AHMED et BEN AISSA et leurs enfants.

A mes grands-parents paternelle et la princesse HALIMA BOUCHAKOUR et le prince MOHAMED ALI.

A toutes la famille BOUCHAKOUR, MOKHTARI, BELHAIDASS et BERIANE.

A mes chers ami(e)s,

HAKIMA, CHOUROUK,HADEEL, MARWA, HANANE«B», HANANE«A», NAWAL, SOUMIA«R», SOUMIA«B», TAOUS, KALTOUM, NESSRINE, MERIEM , AMEL et NOOR .

MOHAMED AMINE, ABDEL JAWAD, AISSA, SAMIR, LAKHDAR, CHERIF, NASSER .

A mon Encadreur Mr : DRAICHE KADA

A mon professeur AiSSA KIDOUD.

A mon binome MOHAMED SALEM et sa famille.

***BouChakour BouChra***



Je dédie ce modeste travail

A ma très chers parents qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, ma mère qui a été toujours a mes cotés et ma soutenu durant toute ma vie ,et mon père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis .

Que dieu me les garde en très bonne sante, Merci mes parents .

A mes chères frères

A mes Chères sœurs

A mes chères amis

A mon binome **BOUCHAKOUR BOUCHRA** et sa famille

A

Mon encadreur Mr.**DRAICHE KADA**

Aussi a mes chers professeurs qui m'ont soutenu durant mon cycle d'étude universitaire et dont je suis fier d'eux .

Enfin ,je vous dedie ce precieux travail en souhaitant de l'accepter en signe de mon appréciation de votre personne.

**Med Salem OULD**

**Med ELmoustapha**



## Sommaire

### Chapitre I: Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction.....	4
I.2. Définition .....	4
I.3. Les Constituants des matériaux composites .....	5
I.3.1. Matrice .....	5
I.3.1.1. Les différentes matrices .....	5
1. Matrices Organiques .....	6
1.1. Les résines thermodurcissables .....	6
1.1.1. Les résines polyesters.....	7
1.1.2. Les résines de condensation .....	7
1.1.3. Les résines phénoliques.....	7
1.1.4. Les résines époxydes.....	8
1.2. Les résines thermoplastiques.....	9
1.3. Les résines élastomères .....	9
2. Les matrices minérales .....	9
2.1. Les matrices métalliques .....	9
2.2. Les matrices céramiques .....	10
I.3.2. Renforts.....	10
I.3.2.1. Les fibres.....	11
I.3.2.1.1. Renfort en fibres discontinues .....	11
I.3.2.1.2. Renfort en fibres continu .....	11
I.3.2.2.1. Les classes des fibres .....	13
1. Les fibres de verre .....	13
2. Les fibres de carbone.....	13
3. Fibre d'aramide .....	13
3.1.La fibre basse module .....	14
3.2.La fibre haute module .....	14
4. Fibre de bore.....	14
5. Fibre de silice .....	14
I.3.2.2.2. Caractéristiques mécaniques des fibres .....	15
I.3.3.1 Charge.....	15

1. Charges renforcâtes .....	15
2. Charges non renforcâtes .....	15
I.3.3.2. Additifs .....	16
I.3.3.3. Interface .....	16
I.5. Les structures des matériaux composites .....	16
I.5.1. Les monocouches .....	17
I.5.2. Les stratifiées .....	17
I.5.3. Les sandwichs .....	18
I.5.3.1. Le noyau .....	18
I.5.3.2. La peau .....	19
I.6. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites .....	19
I.6.1. Au titre d'avantages .....	19
I.6.2. Au titre des inconvénients .....	19
I.7. Applications des matériaux composites .....	20
I.8. Conclusion .....	20

## **Chapitre II: Théorie des plaques composites stratifiées**

II.1. Introduction .....	21
II.2. Définition d'une plaque .....	21
II.3. Domaine d'utilisation .....	22
II.4. Les différents types des matériaux .....	22
II.4.1. Matériaux isotropes .....	23
II.4.2. Matériaux orthotropes .....	23
II.4.3. Matériaux transversalement isotropes .....	24
II.5. Modèles de structures multicouches .....	25
II.5.1. Modèles de stratifiés de type monocouche équivalente .....	26
II.5.1.1. Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT) .....	26
II.5.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) .....	27
II.5.1.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	28
II.5.2. Approche par couche .....	31
II.5.3. Approche développement asymptotique .....	32
II.6. Conclusion .....	34

**Chapitre III: Etude du comportement de flexion et vibratoire des plaques composites stratifiées**

III.1. Introduction .....	35
III.2. La théorie du premier ordre à quatre variables .....	35
III.2.1. Configuration géométrique .....	36
III.2.2. Hypothèses de base de la présente théorie.....	36
III.2.3. Champ de déplacement.....	37
III.2.4. Equations constitutives .....	37
III.2.5. Equations de mouvement.....	40
III.2.6. Solutions analytiques pour une plaque stratifiée simplement appuyée .....	42
III.3 : Conclusion .....	45

**Chapitre IV: Résultat et discussion**

IV.1. Introduction .....	46
IV.2. Les propriétés des stratifiés utilisés .....	46
IV.3. Résultats d'analyse de flexion des plaques stratifiées antisymétriques.....	47
IV.3.1. L'influence du rapport d'élancement .....	47
IV.3.2. L'influence du nombre de couches .....	50
IV.3.3. Flexion des plaques stratifiées à empilement équilibré sous l'effet des charges sinusoïdales et uniformes.....	54
IV.4. Résultats d'analyse de la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques .....	56
IV.4.1. Effet du rapport d'orthotropie .....	56
IV.4.2. L'influence du rapport d'élancement et de l'angle de stratification.....	57
IV.4.2. L'influence de la géométrie et le rapport de rigidité .....	58
IV. Conclusion.....	60

## Liste des tableaux

<b>Chapitre I</b>	<b>Généralité sur les matériaux composites</b>	
<b>Tableau I.1</b>	les caractéristiques des résines plystères	7
<b>Tableau I.2</b>	les caractéristiques des résines phénoliques	8
<b>Tableau I.3</b>	Caractéristiques mécaniques des fibres	15
<b>Chapitre IV</b>	<b>Résultats et discussion</b>	
<b>Tableau IV.1</b>	Modèles de déplacement	46
<b>Tableau IV.2</b>	Déflexion sans dimension des laminâtes carrés antisymétriques multicouches (0/90) à deux couches sous charges sinusoïdales (matériau 1)	48
<b>Tableau IV.3</b>	Déflexion sans dimension des stratifiés carrés antisymétriques (0/90) n carrés sous charges sinusoïdales (Matériau 1)	50
<b>Tableau IV.4</b>	Déplacement et contraintes sans dimension dans le plancher antisymétrique (0/90) n stratifiés carrés sous charges sinusoïdales (Matériau 1, a / h = 10)	51
<b>Tableau IV.5</b>	Déflexion sans dimension de la couche angulaire antisymétrique (45/-45) n stratifiés carrés (matériau 1)	54
<b>Tableau IV.6</b>	Fréquence fondamentale sans dimension des stratifiés carrés antisymétriques (0/90) n (matériau 2, a = 5h)	56
<b>Tableau IV.7</b>	Fréquence fondamentale sans dimension des stratifiés antisymétriques à 10 couches $(\theta / -\theta)_5$ stratifiés carrés (matériau 3)	58
<b>Tableau IV.8</b>	Fréquence fondamentale sans dimension de stratifié carré antisymétrique (45/45) n (matériau 2)	59

## Liste des figures

<b>Chapitre I</b>	<b>Généralité sur les matériaux composites</b>	
Figure I.1	Constituants d'un composite	5
Figure I.2	Différentes Matrice	6
Figure I.3	Principaux matériaux de renforts	10
Figure I.4	Différentes formes de renforts continus	11
Figure I.5	Observation micrographique de fibres	12
Figure I.6	Fibre de verre	13
Figure I.7	Fibre de carbone	14
Figure I.8	Fibre d'aramide	14
Figure I.9	Présentation de l'interface, matrice et fibre	16
Figure I.10	Composite monocouche	17
Figure I.11	Schéma d'un stratifié	18
Figure I.12	Composite sandwichs	18
<b>Chapitre II</b>	<b>Théorie des plaques composites stratifiés</b>	
Figure II.1	Géométrie d'une plaque	22
Figure II.2	Ouvrages d'arts pont et plaque circulaire.	22
Figure II.3	matériau orthotrope	23
Figure II.4	matériau transversalement isotropes	25
Figure II.5	illustration de la plaque de love-Kirchhoff	27
Figure II.6	illustration de la plaque de Reissner-Mindlin	28
Figure II.7	illustration de la plaque de théorie d'ordre élevé	30
Figure II.8	Système de coordonnées et numérotation de couche utilisé pour un stratifié typique	31
<b>Chapitre III</b>	<b>Etude du comportement de flexion et vibratoire des plaques composite</b>	
Figure III.1	Géométrie d'une plaque stratifiée	36

## Liste des notations

Notations	
$E$	Module de Young
$E_1$	Module de Young de la face supérieure
$E_2$	Module de Young de la face inférieure
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique local
$k$	Paramètre de matériau
$a, b, h$	Dimensions de la plaque
$\sigma_{ij}$	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_{ii}$	Déformations normales
$\epsilon_{ij}$	Déformations de cisaillement
$\gamma_{ij}$	Déformations angulaires (distorsions)
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux
$M_x, M_y, M_{xy}$	Moments de flexion
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion
$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$h$	L'épaisseur totale de la plaque
$L$	La longueur de la plaque
$u, v, w$	Les déplacements suivant les directions x, y et z
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
$(\phi_x, \phi_y)$	Les rotations autour des axes x, y
$\rho$	la densité massique
$\sigma_x, \sigma_y$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Déformations dans les directions x et y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distors

*Liste des notations*

---

$\delta$	Opérateur de variation
$\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s$	Champ virtuel de déplacement
$w_b$	Composante de la flèche due à la flexion
$w_s$	Composante de la flèche due au cisaillement
$N$	Efforts normaux de membrane
$M^b$	Moments de flexion pure
$M^s$	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
$S$	Effort de cisaillement pur
$m, n$	Nombres de mode
$A_{ij}$	Termes de rigidité en membrane de la plaque
$B_{ij}$	Termes de rigidité de couplage de la plaque
$D_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$E_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$F_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$H_{ij}$	Termes de rigidité de flexion de la plaque
$A_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$B_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$H_{ij}^s$	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$N$	Efforts normaux de membrane
$M^b$	Moments de flexion pure
$M^s$	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
$S$	Effort de cisaillement pur
$m, n$	Nombres de mode

## ***Résumé***

A travers cette étude, une simple théorie de la déformation du cisaillement du premier ordre est développée pour analyser le comportement statique et vibratoire des plaques composites stratifiées. Contrairement à la première théorie de déformation du cisaillement transversal du premier ordre FSDT à cinq inconnus, la présente nouvelle théorie ne contient que quatre inconnus et a de fortes similitudes avec la théorie classique de la plaque dans de nombreux aspects tels que les équations de mouvement, les conditions aux limites et les expressions des contraintes résultantes. Les équations de mouvement et les conditions aux limites sont dérivées du principe d'Hamilton. Des solutions analytiques des stratifiés antisymétriques simplement appuyés à plis croisés et équilibrés, sont obtenues et les résultats sont comparés avec les solutions exactes d'élasticité tridimensionnelle (3D) et celles prédites par les théories existantes dans la littérature. Les études de comparaison montrent que cette nouvelle théorie de la déformation du cisaillement de premier ordre peut atteindre la même précision de la théorie existante de déformation du cisaillement de premier ordre qui a plus de nombre d'inconnues.

**Mots clés:** Plaque composite stratifié, Théorie FSDT, Flexion, Vibration libre.

## ملخص

من خلال هذه الدراسة، تم تطوير نظرية بسيطة التي تتمثل في تشوه القص من الدرجة الأولى لتحليل سلوك ثابت واهتزازي لصفائح مركبة. و خلافا للنظرية الأولى من تشوه القص FSĐT ذات خمسة مجاهيل. النظرية الجديدة تحتوي فقط على أربعة مجاهيل وأوجه التشابه قوية مع النظرية الكلاسيكية في جوانب كثيرة مثل معادلات الحركة، شروط الحدود وشروط القيود الناتجة عن ذلك. وتستمد معادلات الحركة وشروط الحدود من مبدأ هاملتون. الحلول التحليلية شرائح غير متناظرة مدعمة ومتوازنة عبر طيات يتم الحصول عليها وتتم مقارنة النتائج مع بالضبط الحلول ثلاثية الأبعاد (D3) وتلك التي تنبأ بها النظريات الموجودة. وتظهر الدراسات المقارنة أن هذه النظرية الجديدة للتشوه أول القص يحقق نفس دقة النظرية الحالية للتشوه أول القص التي لديها أكثر عدد من المجاهيل.

**كلمات البحث:** الصفائح المغلفة المركبة، نظرية FSĐT، الانحناء، الاهتزاز الحر.

***Abstract***

Through this study, a simple theory of first order shear deformation is developed to analyze the static and vibrational behavior of composite laminated plates. In contrast to the first five-unknown FSDT first-order transverse shear deformation theory, this new theory contains only four unknowns and has strong similarities to classical plate theory in many aspects such as motion equations, The boundary conditions and the expressions of the resulting stresses. The equations of motion and the boundary conditions are derived from the Hamilton principle. Analytical solutions of simple antisymmetric laminates with crossed and balanced folds are obtained and the results are compared with the exact three-dimensional (3D) elasticity solutions and those predicted by existing theories in the literature. Comparison studies show that this new theory of first-order shear deformation can reach the same accuracy of the existing theory of first-order shear deformation that has more number of unknowns.

**Key words:** Laminated composite plate, FSDT theory, bedding, Free vibration.

# Introduction générale

## ***Introduction générale***

Les plaques composites stratifiées sont largement utilisées dans les applications aérospatiales, automobiles, marines et autres applications structurelles en raison de caractéristiques avantageuses telles que le rapport élevé de la rigidité et de la résistance par rapport au poids et un faible coût de maintenance. En collaboration avec l'augmentation de l'application du stratifié dans les structures d'ingénierie, une variété de théories des plaques stratifiées ont été développées pour prédire son comportement. Plusieurs travaux plus récents sur le développement de théories des stratifiés ont été proposés par Ghugal et al. [1] et Khandan et al. [2]. Ces théories peuvent être classées comme des théories à approche monocouche équivalente « Equivalent Single Layer ESL » et à approche par couche « Layer-wise LW ». Les théories de l'ESL peuvent être divisées en trois catégories principales: la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de la déformation du cisaillement de premier ordre (FSDT) et les théories de déformation du cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

La théorie classique ignore les effets de déformation du cisaillement et fournit des résultats raisonnables pour les plaques stratifiées minces. Cependant, il sous-estime la flèche et surestime la charge de flambement et la fréquence des plaques stratifiées moyennement épaisses ou épaisses où les effets de déformation du cisaillement sont plus prononcés [3-5]. La FSDT proposé par Reissner [6] et Mindlin [7] explique les effets de déformation du cisaillement par la variation linéaire des déplacements dans le plan médian à travers l'épaisseur. Étant donné que la FSDT viole les conditions d'équilibre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire pour compenser la différence entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constant supposé [8-14]. Les théories d'ordre élevé HSDT tiennent compte les effets de déformation du cisaillement par des variations d'ordre supérieur des déplacements dans le plan ou à la fois des déplacements dans le plan et transversal à travers l'épaisseur et remplissent les conditions d'équilibre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans exigence d'un facteur de correction de cisaillement. Par exemple, Reddy [15] a développé une théorie de la déformation du cisaillement du troisième ordre (TSDT) avec des variations cubiques des déplacements dans le plan. Xiang et al. [16] a proposé une théorie de déformation du cisaillement d'ordre élevé dans laquelle la théorie de Reddy apparaît comme un cas spécifique. Kant et Pandya [17], Kant et Mallikarjuna [18] et Kant et Khare [19] ont présenté

des théories HSDT avec des variations cubiques des déplacements dans le plan comme dans le cas du TSDT de Reddy [20], mais contiennent plus de nombre d'inconnus que le TSDT. Pour tenir compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur, c'est-à-dire ( $\epsilon_z \neq 0$ ), Lo et al. [21] et Kant et al. [22] ont présenté des théories HSDT dans lesquels les déplacements dans le plan et transversal sont considérés comme des variations cubiques et paraboliques, respectivement à travers l'épaisseur. Dans le cadre de l'utilisation des fonctions polynomiales dans les travaux susmentionnés, les fonctions trigonométriques sont également utilisées dans le développement de la théorie d'ordre élevé. Par exemple, Touratier [23], Zenkour [24] et Ferreira et al. [25] ont utilisé des fonctions sinusoïdales pour les déplacements dans le plan, tandis que Ferreira et al. [26] ont utilisé des fonctions sinusoïdales pour les déplacements dans le plan et transversal. L'utilisation de fonctions hyperboliques pour les déplacements dans le plan est d'abord proposée par Soldatos [27] et plus tard adoptée par Xiang et al. [28], Akavci [29], et Grover et al. [30]. Karama et al. [31] et Aydogdu [32] ont adopté des fonctions exponentielles pour les déplacements dans le plan. Plus récemment, Mantari et al. [33-35] a proposé l'utilisation de fonctions trigonométriques. Il convient de noter que certaines théories HSDT mentionnées nécessitent plus du temps de calcul en raison d'inconnues supplémentaires introduites dans la théorie, comme par exemple, les théories citées aux références [17, 18] avec sept inconnues, référence [19] avec neuf inconnues et les références [21, 22] avec 11 inconnus. Bien que certaines HSDT connus emploient cinq inconnus comme dans le cas de la FSDT, par exemple les théories proposées par Touratier [23], Ferreira [26] et Soldatos [27], leurs équations de mouvement sont beaucoup plus compliquées que celles de FSDT. Ainsi, il existe des besoins pour le développement de la théorie de déformation du cisaillement, qui est simple à utiliser.

Dans ce présent travail, une simple théorie de déformation du cisaillement du premier ordre, récemment développé par Thai et Choi [36] pour les plaques en matériaux à gradient de propriétés, est évalué dans cette étude pour analyse le comportement des plaques composites stratifiées. Contrairement à la FSDT existante, celle présentée par Thai et Choi [36] ne contient que quatre inconnus et a de fortes similitudes avec la théorie classique CPT dans de nombreux aspects tels que les équations de mouvement, les conditions aux limites et les expressions des contraintes résultantes. La partition du déplacement transversal dans les parties de flexion et de cisaillement conduit à une réduction du nombre d'inconnues et d'équations, ce qui rend la théorie simple à utiliser. Les équations de mouvement et les conditions aux limites sont dérivées du principe d'Hamilton. On obtient les solutions des

plaques stratifiées antisymétriques simplement appuyées à séquences d'empilement croisé et équilibré, néanmoins les résultats obtenus sont comparés aux solutions existantes dans la littérature.

D'une manière générale, la démarche suivie dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'une étude et analyse du comportement statique et vibratoire des plaques en matériaux composites stratifiés en utilisant une nouvelle théorie de déformation du cisaillement du premier ordre.

Après une introduction générale sur le sujet, vient la première partie composée de quatre chapitres, dans le premier nous présentons **Généralités sur les matériaux composites**. Quand on deuxième chapitre est consacré au **Théorie des plaques composites stratifiées**. Dans le chapitre trois, nous avons mis **Etude du comportement de flexion et vibratoire des plaques composites stratifiées**. Et en fin dans le quatrième et le dernier chapitre nous terminerons **Résultats et discussions**.

Nous terminerons avec une conclusion générale qui débouchera sur des recommandations futures de ce thème de travail.

**Chapitre I :**  
**Généralités sur les matériaux**  
**composites**

## Chapitre I

### *Généralités sur les matériaux composites*

#### I.1. Introduction

Dans ce chapitre on va définir les matériaux composites par leurs constitutions, leurs propriétés et de leurs structures. Vue la variété de ces matériaux, Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

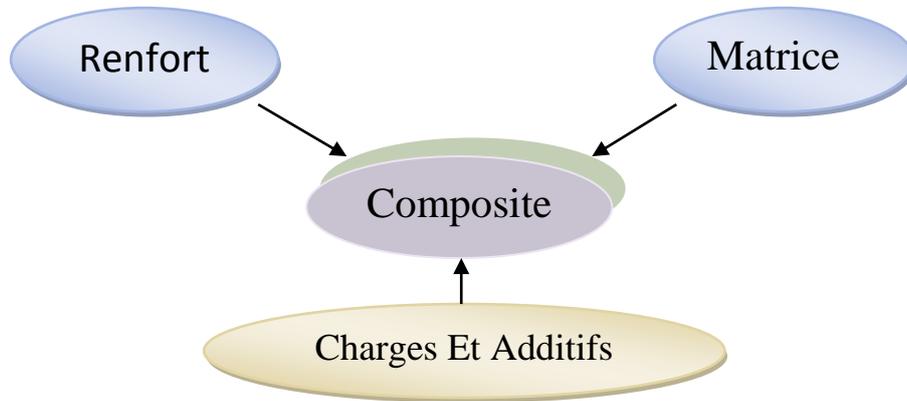
#### I.2. Définition

D'après (Berthelot) « un matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins des matériaux non miscibles et de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément ».

Un matériau composite est constitué d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase continue est appelée la matrice qui est généralement une matière polymère (résine thermoplastique ou thermodurcissable) qui assure la cohésion de la structure et la retransmission des efforts vers la phase discontinue qui présente usuellement des propriétés des matériaux mécanique (rigidités et résistance) supérieures a celle de la matrice et est notée renfort. Les propriétés des matériaux le constituant, de la distribution géométrique des renforts, du taux volumique de renfort, de la nature des interfaces renforts/matrice, du procédé de fabrication.

### I.3. Les Constituants des matériaux composites

Dans cette section les différents matériaux utilisés pour les matrices et les renforts sont présentés dans les ouvrages de Bahia et les Berthelot il convient de noter que tous les types de matériaux ne peuvent être associés et que la qualité de l'adhésion entre la matrice et les renforts est un point essentiel dans le choix des constituants.



**Figure I.1 :** Constituants d'un composite.

#### I.3.1. Matrice

Dans un composite, la matrice représente la matière solide qui sert principalement à lier les renforts pour former une masse compacte, répartir les efforts et protéger les fibres contre la dégradation mécanique et les environnements défavorables comme les produits chimiques et l'humidité. Les matrices à base polymère peuvent être décomposées en deux grandes catégories : les matrices thermoplastiques et les matrices thermodurcissables. La résine thermodurcissable est à la base un polymère transformé en un produit infusible et insoluble après un traitement thermique ou un traitement physico-chimique. Par contre, les résines thermoplastiques sont transformées sans réaction chimique mais en les ramollissant alternativement par chauffage et ensuite elles durcissent par refroidissement dans un intervalle de température spécifique. Les résines thermodurcissables sont les plus utilisées dans l'industrie des composites hautes performances grâce à leurs propriétés mécaniques élevées et leur viscosité qui est inférieure à celle des thermoplastiques ce qui favorise mieux de combler les espaces vides entre les fibres.

##### I.3.1.1. Les différentes matrices

Les matrices peuvent être décomposées en quatre catégories en fonction du besoin industriel :

- Les matrices thermodurcissables;
- La matrice thermoplastique;
- Les matrices thermostables;
- Les matrices métalliques et céramiques.

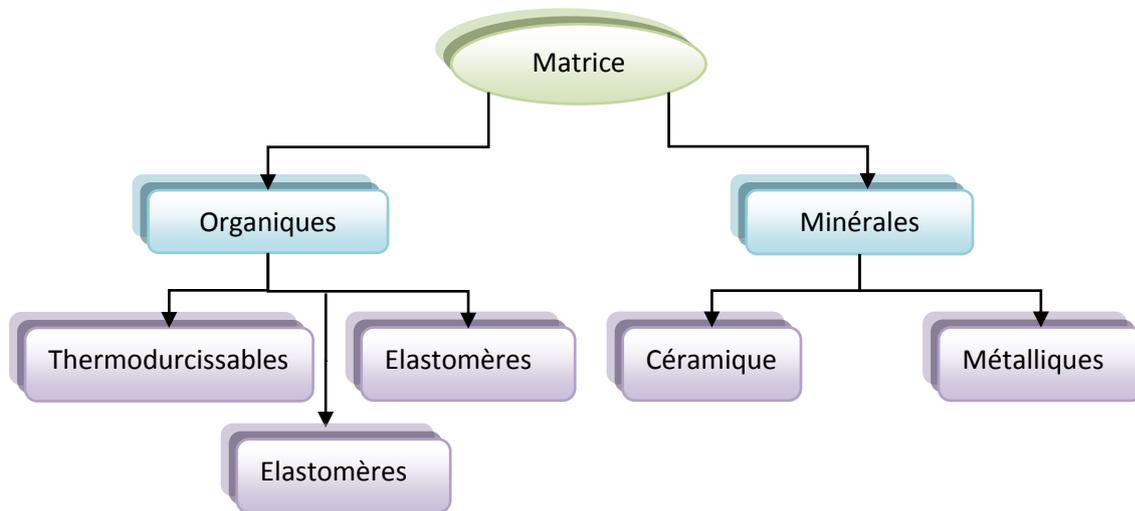


Figure I.2 : Différentes Matrices.

## 1. Matrices Organiques

Un très grand nombre, de matériau plastique peut être utilisé comme matrice dans les matériaux composites. Elles peuvent aussi bien appartenir à la famille des résines « Thermodurcissables » qu'à celles des résines « Thermoplastiques ».

Parmi ces familles de résines, on distingue deux types de résines qui sont, actuellement, les plus utilisées:

### 1.1. Les résines thermodurcissables

Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage :

- les résines polyesters insaturés : polyesters condensés, vinylesters, dérivés allyliques, etc.
- les résines de condensation : phénoliques, aminoplastes, furaniques (peu utilisées en France), etc.
- les résines époxydes.

### 1.1.1. Les résines polyesters

Les résines polyesters insaturées viennent de très loin en tête dans la mise en œuvre des matériaux composites. Leur développement est le résultat :

- d'un faible coût de production,
- de leur diversité offrant de multiples possibilités,
- d'une adaptation à des procédés de fabrication faciles à mettre en œuvre et à automatiser.

D'où un développement industriel sans cesse croissant.

Suivant leur module d'élasticité, les résines polyesters sont classées en : résines souples, résines semi-rigides et résines rigides. Les résines habituellement utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont du type rigide, et nous retiendrons pour ces résines durcies les caractéristiques suivantes :

Caractéristiques mécaniques	valeurs
Masse volumique	1 200Kg/m <sup>3</sup>
Module d'élasticité en traction	2.8 à 3.5 Gpa
Module d'élasticité en flexion	3 à 4.5 Gpa
Contrainte à la rupture en traction	50 à 80 Gpa
Contrainte à la rupture en flexion	90 à 130 Gpa
Allongement à la rupture en traction	2 à 5%
Allongement à la rupture en flexion	7 à 9%
Résistance en compression	90 à 200 Mpa
Résistance au cisaillement	10 à 20 Mpa
Température de fléchissement sous charge (1.8 MPa)	60 à 100 °C

**Tableau I.1** : Les caractéristiques des résines polyesters.

### 1.1.2. Les résines de condensation

Les résines de condensation comportent les résines phénoliques, les aminoplastes et les résines furaniques.

### 1.1.3. Les résines phénoliques

Sont les plus anciennes des résines thermodurcissables utilisées dans les applications nécessitent des propriétés de tenue au feu imposées par les normes dans les transports civils. Elles présentent l'inconvénient d'être peu résistant aux sollicitations. Les caractéristiques de ces résines sont résumées dans le tableau ci-après :

Caractéristiques mécaniques	valeurs
Masse volumique	1 200Kg/m <sup>3</sup>
Module d'élasticité en traction	3Gpa
Contrainte à la rupture en traction	40 80 Mpa
Allongement à la rupture en traction	5.5%
Résistance en compression	250 Mpa
Température de fléchissement sous charge	120 °C

**Tableau I.2 :** Les caractéristiques des résines phénoliques.

#### 1.1.4. Les résines époxydes

Les résines les plus utilisées après les résines polyesters insaturées sont les résines époxydes. Elles ne représentent cependant que de l'ordre de 5 % du marché composite, à cause de leur prix élevé (de l'ordre de cinq fois plus que celui des résines polyesters).

Les résines époxydes conduisent donc à un ensemble de performances élevées. Toutefois, pour bénéficier réellement de ces performances, il est nécessaire d'avoir des durées de transformation et surtout de recuisons très longues (de plusieurs heures à plusieurs dizaines d'heures), à des températures relativement élevées (50 à 100 °C).

Parmi les avantages des résines époxydes, nous retiendrons :

- de bonnes propriétés mécaniques (en traction, flexion, compression, choc, fluage, etc.) supérieures à celles des polyesters,
- une bonne tenue aux températures élevées : jusqu'à 150 °C à 190 °C en continu,
- une excellente résistance chimique,
- un faible retrait au moulage (de 0,5 à 1 %),
- une très bonne mouillabilité des renforts,
- une excellente adhérence aux matériaux métalliques.

Parmi les inconvénients, nous citerons :

- un temps de polymérisation long,
- un coût élevé,
- la nécessité de prendre des précautions lors de la mise en œuvre,
- une sensibilité à la fissuration.

## **1.2. Les résines thermoplastiques**

La famille des résines thermoplastiques (on parle de plastiques) est très vaste, et peut être séparée en plastiques de grande diffusion et plastiques techniques(ou techno polymères).

Les plastiques de grande diffusion sont mis en œuvre soit par injection pour obtenir des objets moulés, soit par extrusion pour obtenir des films, des plaques, des tubes, des profilés, etc. Les plastiques techniques sont généralement mis en œuvre par injection.

Parmi les résines thermoplastiques, nous citerons : le polychlorure de vinyle (PVC), le polyéthylène, le polypropylène, le polystyrène, le polyamide, le polycarbonate, etc. L'intérêt des thermoplastiques réside dans leur faible coût, résultant à la fois de matières premières disponibles et des procédés de fabrication (injection, extrusion). Toutefois, ce faible coût est lié à des propriétés mécaniques et thermomécaniques faibles.

## **1.3. Les résines élastomères**

Les résines élastomère se distinguent des autres résines, précédemment considérées, essentiellement par leurs performances thermiques qui conservent leurs propriétés mécaniques pour des températures plus élevées que 200°C. Dans la pratique nous retrouvons pour ces résines les deux grandes familles des résines thermoplastiques et thermodurcissables.

Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace, où les laboratoires cherchent à mettre au point de nouvelles résines. Parmi les résines thermostables, les résines bismaléimides et polyamides sont les plus utilisées. Les résines bismaléimides sont des résines dont le réseau est élaboré à des températures de 180 à 200°C. Les procédés de moulage sont identiques à ceux des composites à matrice thermodurcissable de type polyester ou époxyde. Les résines polyamides sont apparues sur le marché vers 1970. Ce sont des résines à haute résistance thermique, mais de prix très élevé. Ces résines permettent d'obtenir des composites de résistance supérieure, à 250 °C, à la résistance de l'aluminium.

## **2. Les matrices minérales**

### **2.1. Les matrices métalliques**

L'utilisation de matériaux composites à des températures supérieures à 3000°C interdit pratiquement l'usage des matrices organiques et suppose donc que l'élément de renforcement soit noyé au sien d'une matrice métallique. Les plus employées sont les métaux légers et leurs alliages en particulier l'aluminium, le titane et le nickel.

## 2.2. Les matrices céramiques

Sont particulièrement intéressantes en raison de leur caractère réfractaire. Elles sont utilisées dans des pièces qui doivent subir sans dommage de très hautes températures (tuiles de protection thermique, brûleurs). Le point faible des céramiques, à savoir leur très faible résistance à la rupture en traction, est partiellement masquée par l'insertion de fibres dans la matrice. Les techniques de fabrication les plus courantes sont l'imprégnation en phase liquide (SiC-SiC par exemple) ou le dépôt plasma (par exemple dépôt de silicium puis nitruration à l'aide d'un traitement sous azote à 1450°C, qui produit une augmentation de volume et favorise la densification).

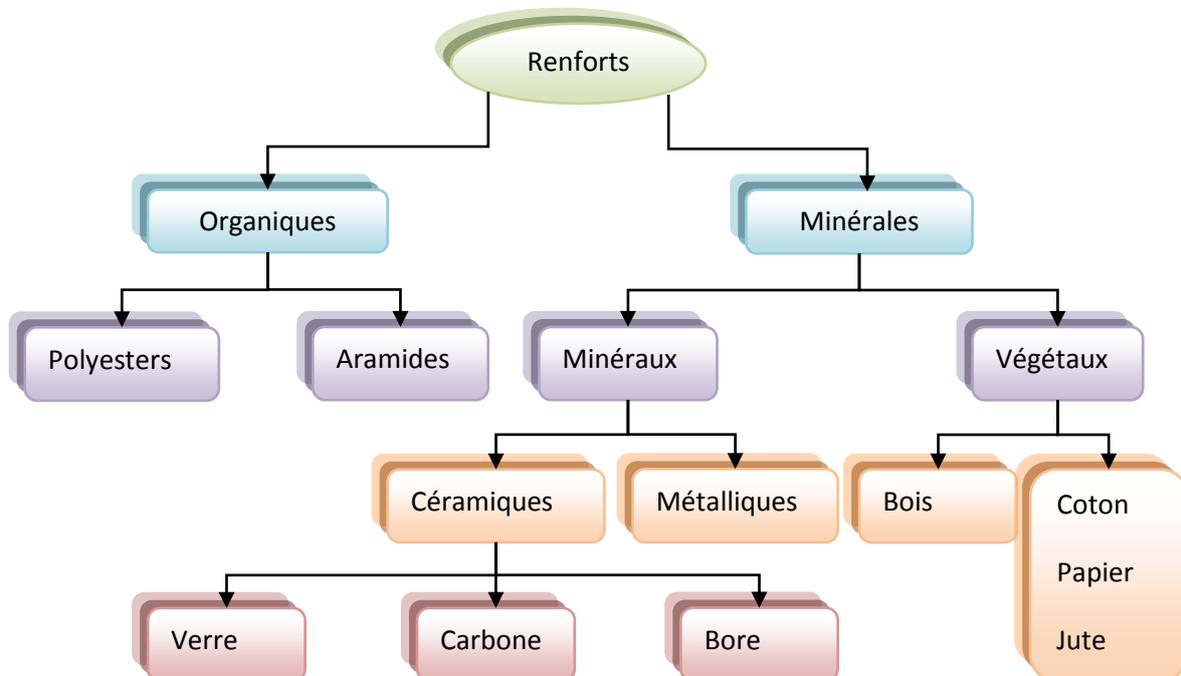
### I.3.2. Renforts

Les renforts contribuent à améliorer la résistance mécanique et la rigidité des matériaux Composites et se présentent sous forme filamentaire, allant de la particule de forme allongée la fibre continue qui donne au matériau un effet directif.

Ils sont caractérisés par:

- la nature de la fibre, minérale ou organique,
- l'architecture du renfort, Unidirectionnel (UD) ou Tissu.

Les différents types de renforts sont cités dans l'organigramme ci-dessous.

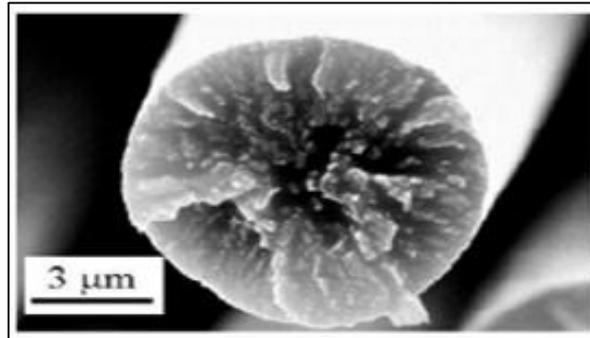


**Figure I.3:** Principaux matériaux de renforts

Les propriétés physiques et mécaniques sont fortement influencées par la nature des fibres. La forme du renfort est fonction de l'application et du volume de pièces à réaliser, elle permet de distinguer deux grandes familles.

### I.3.2.1. Les fibres

Les fibres utilisées se présentent soit sous forme continues (fibres longues), soit sous forme discontinues (fibres courtes).



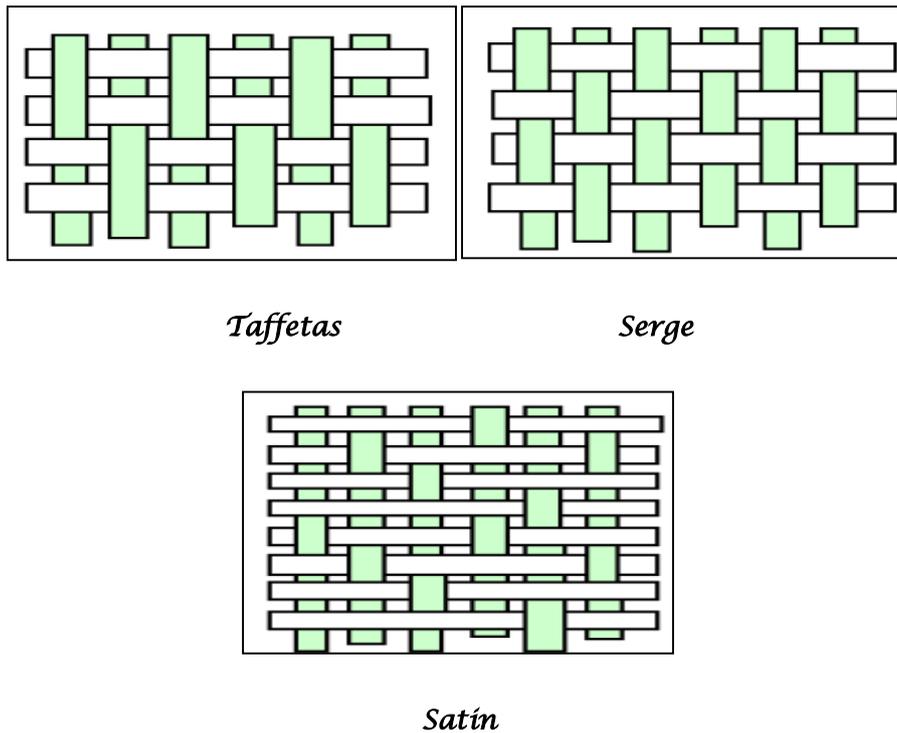
**Figure I.4:** Observation micrographique de fibres.

#### I.3.2.1.1. Renfort en fibres discontinues

Des fibres courtes, ou particules (charges sous forme de microbilles, de fibres broyées, d'écaillés ou de poudre), permettent d'améliorer certaines propriétés de la matrice (résistance à l'usure, propriétés thermiques, poids). Celle-ci reste l'élément de base et on obtient alors un « polymère renforcé ».

#### I.3.2.1.2. Renfort en fibres continu

Sous forme de fibres longues qui sont généralement utilisées pour des composites HP. Cette forme fibreuse offre une résistance à la rupture et souvent un module d'élasticité beaucoup plus élevée que ceux du même matériau massif, avec une augmentation de la longueur de 10000 fois, ou bien pour le même volume, la surface est multiplié par 100 dans le cas des fibres de verre, ces renforts ont le rôle d'assurer la bonne tenue mécanique des composites et sont disposés au sein du matériau en fonction des propriétés recherchées. Pour créer une structure résistante adaptée aux contraintes mécaniques, il existe plusieurs architectures de renforts : unidirectionnelle (nappes ou rowing), bidirectionnelle (tissus ou complexes 2D), tridimensionnelle (fibres orientées suivant trois directions).



**Figure I.5:** Différentes formes de renforts continus.

Cas des renforts tissés, les tissus sont réalisés sur des métiers à tisser. Ils sont obtenus par entrecroisement des mèches selon deux directions perpendiculaires, chaîne et trame. Ils peuvent avoir différentes armures ; on distingue: la toile ou le taffetas, le serge et le satin.

- Unidirectionnels (1D) : Dans une nappe 1D, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Les tissus se composent de fils de chaîne et de trame perpendiculaires entres eux. Le mode d'entrecroisement ou armure les caractérise.
- Toile ou taffetas : Chaque fil de chaîne passe dessus puis chaque fil de trame, et réciproquement. Le tissu présente une bonne planéité et une relative rigidité, mais est peu déformable pour la mise en œuvre. Les nombreux entrecroisements successifs génèrent un embuvage important et réduisent les propriétés mécaniques.
- Serge : Chaque fil de chaîne flotte au-dessus de plusieurs (n) fils de trame et chaque fil de trame flotte au-dessus de (m) fils de chaîne. Armure de plus grande souplesse que le taffetas ayant une bonne densité de fils. Ci-dessous, un sergé 2/2.
- Satin : Chaque fil de chaîne flotte au-dessus de plusieurs (n-1) fils de trame et réciproquement. Ces tissus ont des aspects différents de chaque côté. Ces tissus sont assez souples et adaptés à la mise en forme de pièces à surfaces complexes. Ce type de tissus

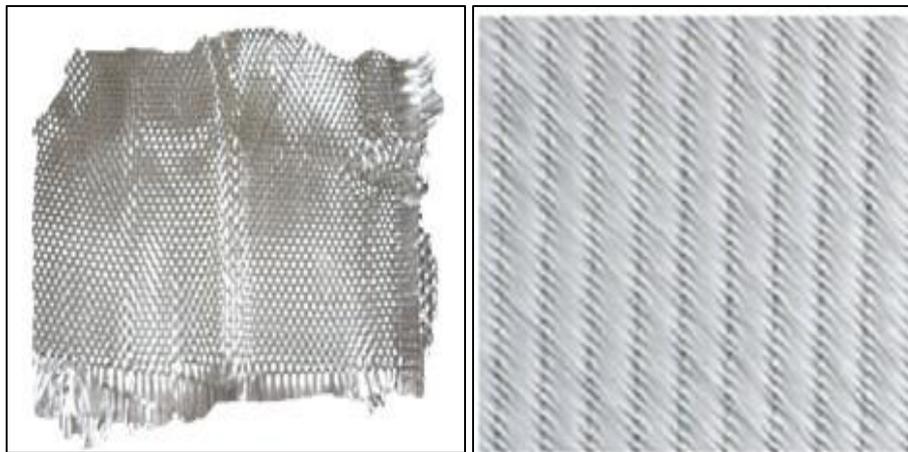
présente une forte masse spécifique. L'armure contrôle la rigidité du tissu ; on obtient respectivement un tissu relativement rigide, souple et dense et très souple et déformable. Il est important de souligner la grande variété des renforts tissés. Par ailleurs, il est possible de construire des tissus mixtes en utilisant des matériaux différents dans les directions chaîne et trame, ou des tissus hybrides en employant des fils de natures différentes dans la même direction, ce qui permet d'obtenir des tissus aux caractéristiques spécifiques dans chaque direction. Un tissu est dit équilibré lorsque les fils de chaîne et de trame sont identiques ou très semblables et que le motif du tissage est symétrique.

### I.3.2.2.1. Les classes des fibres

On peut Distinguer cinq classes de fibre :

#### 1. Les fibres de verre

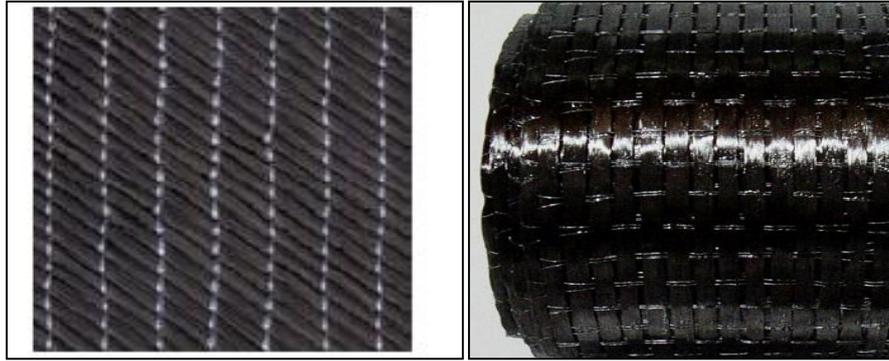
Le terme fibres de verre désigne à la fois les fibres utilisées comme isolant thermique et celles utilisées comme renforts associées à des matrices organiques pour donner des composites. La principale application des fibres de verre textile est le renforcement des plastiques. Cependant leur champ d'applications s'est élargi à d'autres matrices (ciment, plâtre, bitume...) et à d'autres utilisations.



**Figure I.6** : Fibre de verre.

#### 2. Les fibres de carbone

La fibre de carbone est obtenue à partir de la pyrolyse d'une fibre organique appelée précurseur. Les fibres de carbone se différencient par le taux de carbone plus ou moins élevé. Ces fibres sont utilisées en tant que carbone pour les propriétés de cet élément et en tant que fibre flexible et qui convient à toutes les formes de produits finis.



**Figure I.7 :** Fibre de carbone.

### 3. Fibre d'aramide

La fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

**3.1. La fibre basse module :** utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles.

**3.2. La fibre haute module :** employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.



**Figure I.8 :** Fibre d'aramide.

### 4. Fibre de bore

Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.

### 5. Fibre de silice

Elles sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée. Sont actuellement les plus utilisées dans la construction de structures composites grâce à un excellent rapport performance-prix, une haute résistance aux agressions de produits chimiques, une bonne résistance en tension et excellentes propriétés d'isolation.

### I.3.2.2.2. Caractéristiques mécaniques des fibres

Il existe différents types de fibres. Elles peuvent être scindées en deux groupes, les fibres à haut module et les fibres à haute résistance. Les fibres à haut module ont une résistance faible et celles à forte résistance ont un module faible.

Renforts	$\rho$ (Kg / m <sup>3</sup> )	$\sigma_t^R$ (MPa)	$\sigma_c^R$ (MPa)	E (GPa)
AS <sub>4</sub>	1800		3599	235
T <sub>300</sub>	1700	1.2	3654	231
IM <sub>6</sub>		0.88	1460	
IM <sub>8</sub>	1800		5171	310
Kevlar 49	1440	2.5	3620	124
Verre E	2580	3.5	3450	69

Tableau I.3 : Caractéristiques mécaniques des fibres.

### I.3.3.1 Charge

#### 1. Charges renforcâtes

L'objet de l'incorporation de charges renforcâtes est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine. Ces charge peuvent être classées suivant leur forme géométrique en :

- charges sphériques,
- Charges non sphériques.

#### 2. Charges non renforcâtes

Les charges non renforcâtes ont pour rôle soit de démineur le cout des résines en conservant les performances des résines, soit d'améliorer certaines propriétés des résines.

Parmi ces classes on trouve :

- Charges de faible cout,
- Charges ignifugeantes,
- Charges conductrices et antistatiques.

Les principales charges utilisées sont :

- microbille en (verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc. ...);
- des poudres ou paillettes métalliques : (cuivre, fer, aluminium, etc. ...);
- des particules de carbone (noir de carbone).

### I.3.3.2. Additifs

Les additifs se trouvent en faibles quantités (quelques % et moins) et interviennent comme :

- Lubrifiants et agents de démoulage,
- Pigments et colorants,
- Agents anti-retrait,
- Agents anti-ultraviolets.

### I.3.3.3. Interface

L'interface renfort-matrice est souvent considérée comme une surface de contact, mais ce n'est pas une surface au sens géométrique du terme. Elle assure la compatibilité renfort-matrice et l'adhésion, en transmettant les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif (interface). A cause de sa structure, l'interface peut être considérée d'un point de vue mécanique, comme un point faible du composite. Dans le transfert d'effort orienté dans le sens de l'axe de la fibre, l'interface est considérée comme une couche de cisaillement. Lorsqu'il n'y a pas de décohésion interraciale, le comportement est élastique: le cisaillement interracial est linéairement proportionnel à la différence de déplacement entre la matrice et la fibre au niveau de leurs parois.

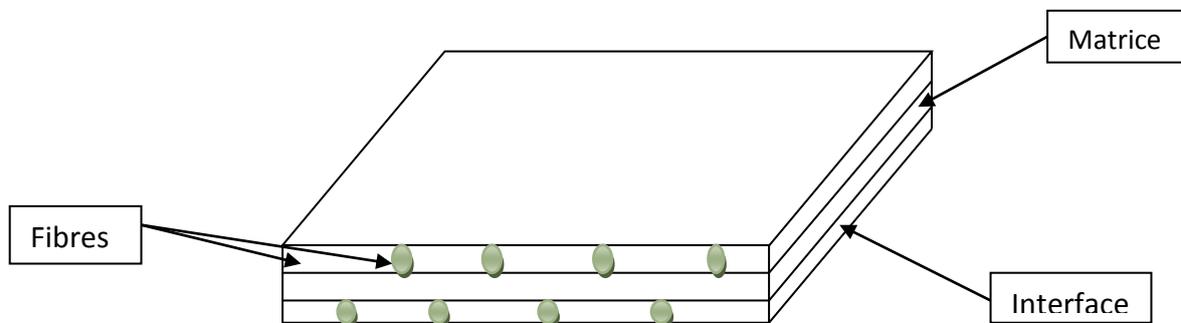


Figure I.9 : Présentation de l'interface, matrice et fibre.

## I.5. Les structures des matériaux composites

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature et leur séquence d'empilement. Ils sont généralement sous forme de :

- Les monocouches,
- Les stratifiées,
- Les sandwichs.

### I.5.1. Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles 1D, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

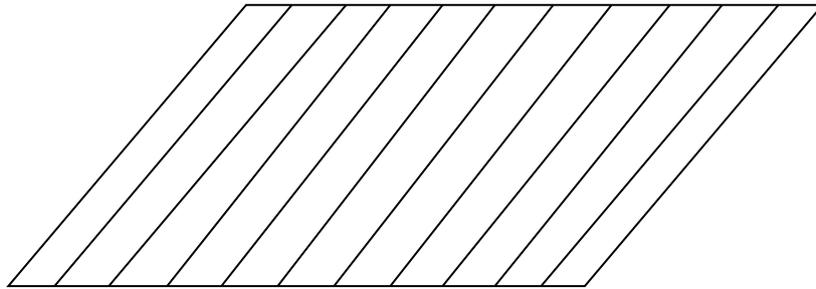


Figure I.10 : Composite monocouche.

### I.5.2. Les stratifiées

Un stratifié est constitué de l'empilement de deux ou plusieurs couches (appelées également plis) entreposées successivement, et se comportant comme une seule entité structurale. Chaque couche est formée de fibres de faible section imprégnées de résine, et est désignée par son orientation, qui est l'angle que fait la direction des fibres avec la direction de référence (qui est généralement la direction des fibres unidirectionnelles orientées à  $0^\circ$ ). La séquence d'empilement du stratifié, désigne le nombre et l'orientation des couches successives en parcourant le stratifié d'une face à l'autre. Ainsi, un stratifié est dit unidirectionnel si, l'angle entre deux couches consécutives est nul, c'est-à-dire, toutes les fibres sont alignées selon une seule direction. Par contre, un stratifié est multidirectionnel si les couches successives, sont orientées les unes par rapport aux autres à des angles autres que  $0^\circ$  tel, les multidirectionnels  $[0/ +45/ -45/ 90/ 90/ +45/ -45/ 0]$ . On pourra avoir des stratifiés de type :

**Équilibré** : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientées suivant la direction  $-\theta$ .

**Symétrique** : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen, ayant la même orientation des fibres.

**Antisymétrique** : stratifié comportant des couches ayant des orientations de fibres opposées

**Orthogonal** : stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .

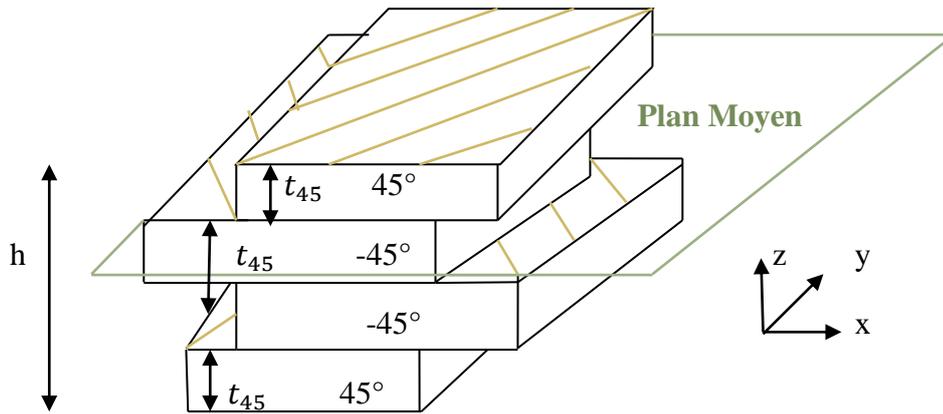


Figure I.11 : Schéma d'un stratifié.

### I.5.3. Les sandwichs

Les matériaux composites de types sandwichs sont principalement constitués de deux composants nommés :

- Peau ;
- Noyau.

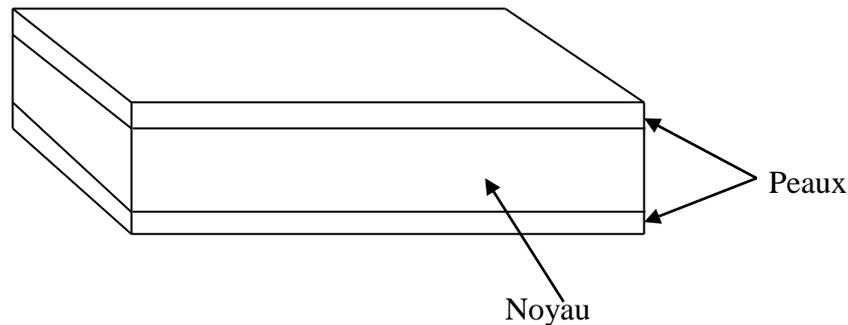


Figure I.12 : Composite sandwichs.

Les propriétés de ce type de matériaux dépendent de celles du noyau et des peaux, de leurs épaisseurs et des caractéristiques de liaison entre elles.

#### I.5.3.1. Le noyau

Il existe un grand nombre de matériaux qui peuvent être utilisés comme noyau. Ces matériaux sont divisés en trois classes :

- Matériaux solide à faible densité : balsa et d'autres types de bois ;
- Matériaux à haute densité augmentés en forme cellulaire : nid d'abeilles ;
- Matériaux à haute densité augmentés sous la forme ondulée : feuilles ondulées.

**I.5.3.2. La peau**

Une large variété de matériaux est utilisée comme peau, par exemple : les feuilles de métaux comme l'aluminium, le titane,...etc. Le choix des matériaux utilisés comme peau est important du point de vue de l'environnement de travail, car la présente partie entre en contact direct avec ce dernier.

**I.6. Les avantages et les inconvénients des matériaux composites**

Les matériaux composites sont aujourd'hui principalement utilisés industriellement pour différentes raisons dont voici une liste non exhaustive des avantages et inconvénients des matériaux composites.

**I.6.1. Au titre d'avantages**

- la légèreté ;
- la rigidité ;
- une meilleure résistance à la fatigue ;
- liberté de formes ;
- maintenance réduite ;
- faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf alu carbone) ;
- insensibles aux produits chimiques sauf les décapants de peinture qui attaquent les résines ;
- une bonne isolation électrique ;
- leur faible taux d'utilisation vient de leur coût ;
- la facilité de mise en œuvre ;
- ainsi ils permettent de répondre à des besoins parfois contradictoires que les matériaux classiques ne peuvent satisfaire.

**I.6.2. Au titre des inconvénients**

- plus sensibles à tous les impacts ;
- une petite faille peut engendrer de grosses déformations ;
- la détection de ces problèmes est difficile, ce qui entraîne une rigueur extrême dans leur fabrication et leur assemblage ;
- la mise en œuvre des réparations est beaucoup plus complexe ;
- faible module d'élasticité et donc problème de stabilité ;

- influence de temps et Température sur les propriétés mécaniques ;
- faible résistance au feu et à la chaleur Vieillessement.

Par conséquent, les matériaux composites sont actuellement très utilisés dans l'industrie et particulièrement dans les domaines aérospatial et aéronautique, où les gains de masse sur structures sont stratégiques.

### **I.7. Applications des matériaux composites**

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes. Les matériaux composites offrent aux industriels des possibilités nouvelles d'associer fonction, forme et matériaux, au sein de réalisations des matériaux et systèmes de plus en plus performants et de mieux satisfaire des besoins parfois contradictoires (poids, fonctions...) auxquels les matériaux homogènes classiques répondent difficilement.

### **I.8. Conclusion**

Le but des producteurs des matériaux composites est de rivaliser et de surpasser les métaux qui, de leur côté, ne cessent d'optimiser leurs propres caractéristiques. La variété des matériaux composites et leur souplesse, qui permet de fabriquer ou de composer des caractéristiques à la carte, rendent cet objectif acceptable. Pour atteindre ces objectifs, ce secteur se développe par l'innovation. Les composites trouvent leurs principales applications dans le génie civil, le transport, l'aérospatiale, etc.

**Chapitre II :**  
**Théorie des plaques composites**  
**stratifiées**

## Chapitre II

### *Théorie des plaques composites stratifiées*

#### II.1. Introduction

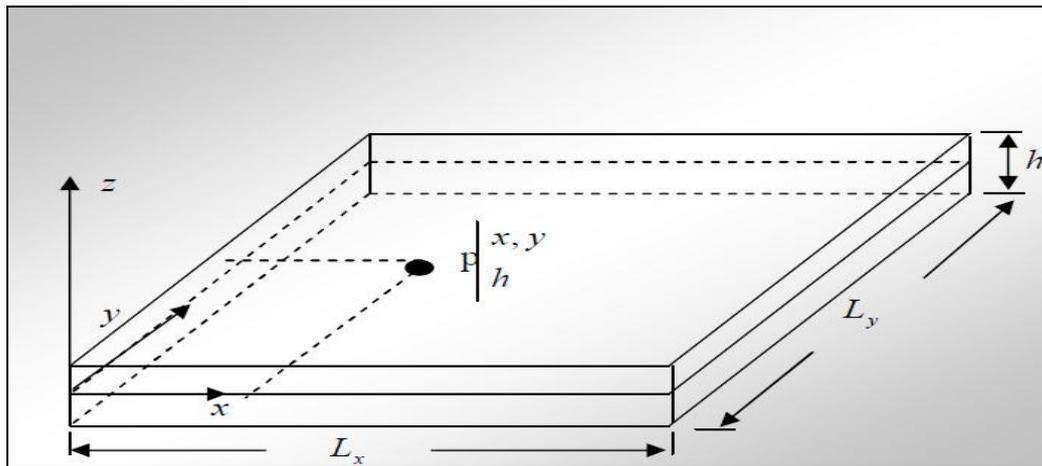
La principale limitation de la théorie classique de **love-Kirchhoff** est que l'on néglige les effets dus aux efforts tranchants et à l'inertie de rotation, or dans la pratique les plaques ont des épaisseurs significatives et il devient nécessaire de tenir compte de ces effets pour décrire leur comportement dynamique. D'autre part, la théorie classique ne peut rendre compte des problèmes de contact incluant des plaques et des problèmes de plaques laminées.

Ces limitations ont conduit plusieurs auteurs à proposer des modèles plus raffinés. L'un des premiers fut Reissner, suivi par Mindlin et par d'autres. Ces nouvelles théories sont généralement obtenues à partir des équations de l'élasticité tridimensionnelle soit par intégration de ces équations sur l'épaisseur, c'est-à-dire le long des fibres de la plaque, soit par des hypothèses, sur les déplacements et les contraintes faites à l'intérieure de la plaque. Toutes ces théories découplent toujours les effets de flexion et de contrainte plane.

Nous présenterons dans ce chapitre la théorie classique des plaques stratifiées, permettant de mettre leur champ de déplacement, de déformation et leur comportement, ensuite nous décrivons selon une synthèse historique récente, les fameuses tendances concernant la formulation des différentes théories des plaques composites correspondantes.

#### II.2. Définition d'une plaque

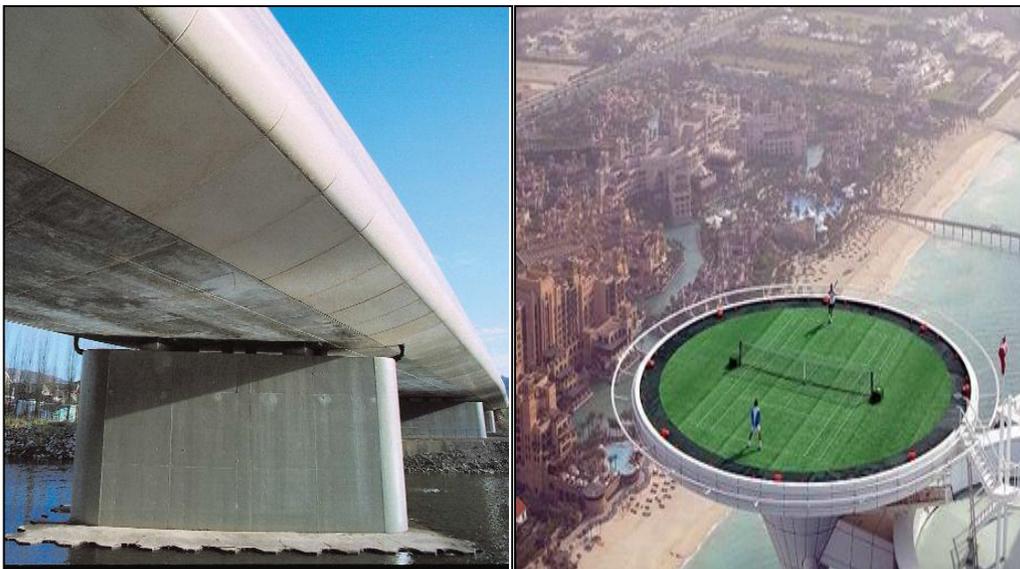
Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ) et par une petite épaisseur (notée  $h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ), par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur. Suivant l'ordre de grandeur de  $h$  par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince au épaisse aux plaques et aux coques. Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (*CT*). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur  $h$  varie en sens inverse de l'influence *CT*. La plaque peut être constituée d'un matériau homogène.



**Figure II.1 :** Géométrie d'une plaque

### II.3. Domaine d'utilisation

Le domaine de l'utilisation de plaque est très répandue dans tous les domaines, en particulier dans le domaine du génie civil où, on les utilise dans les constructions simples (habitation) où les ouvrages d'art et elle existe sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaires et d'autre formes selon la qualité de l'ouvrage, Comme celle est représenté dans les photos ci-dessous.



**Figure II.2 :** Ouvrages d'arts pont et plaque circulaire.

### II.4. Les différents types des matériaux

Les matériaux constituant les plaques ayant les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions, alors la plaque est dite isotrope, par contre si les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant les plaques sont différentes dans l'une des directions, alors la plaque est dite anisotrope (orthotrope).

**II.4.1. Matériaux isotropes**

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Les matériaux usuels (excepté le bois) répondent généralement à cette modélisation établie à l'échelle macroscopique. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées.

L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations :

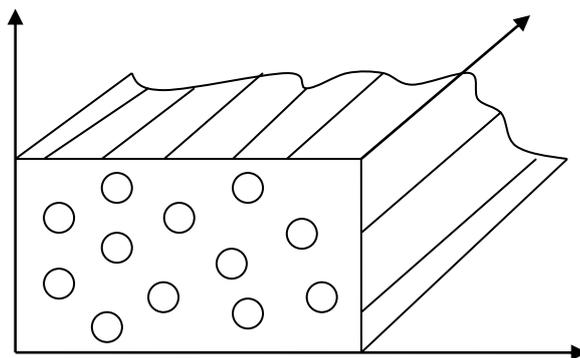
$$C_{22} = C_{11}; C_{23} = C_{12}; C_{66} = 1/2(C_{11} - C_{22}) \tag{II. 1}$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{II. 2}$$

**II.4.2. Matériaux orthotropes**

Sont des matériaux qui possèdent 3 plans de symétrie orthogonaux, ces derniers ont les mêmes propriétés ou caractéristiques mécanique.



**Figure II.3 :** matériau orthotrope.

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau

monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 3})$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

### II.4.3. Matériaux transversalement isotropes

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope qui comporte un axe ou un plan d'isotropie.

Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{22} &= \mathbf{C}_{33} \\ \mathbf{C}_{12} &= \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{C}_{55} &= \mathbf{C}_{66} \end{aligned} \quad (\text{II. 4})$$

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients.

D'où, la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbf{C}_{22}-\mathbf{C}_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 5})$$

Et en fonction de la matrice de souplesse la loi de Hooke devient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 6})$$

Les propriétés du matériau unidirectionnel sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

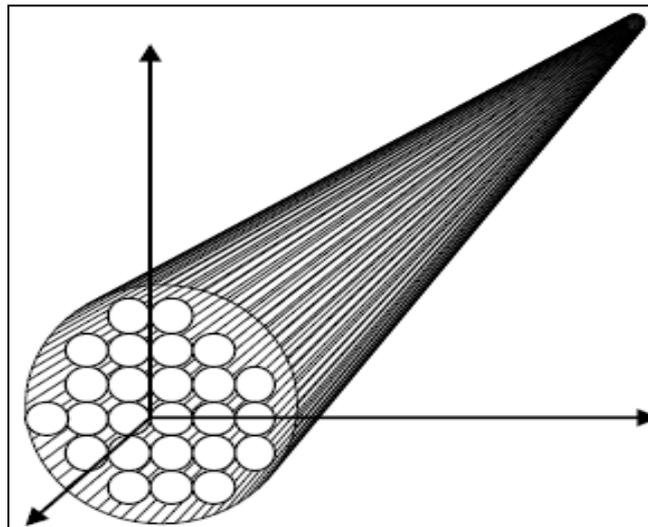


Figure II.4 : matériau transversalement isotropes.

## II.5. Modèles de structures multicouches

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes caractérisées par une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwiches) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être distingués en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente ESLM (Equivalent Single Layer models)

- Approche par couche LW (Layer-wise)
- Approche développement asymptotique

### II.5.1. Modèles de stratifiés de type monocouche équivalente

Parmi les différentes classes de théories, l'approche de monocouche équivalente est la plus fréquemment utilisée. Celle-ci se base sur l'idée de représenter un stratifié hétérogène complexe par un seul lamina statiquement équivalent (homogénéisation), ce qui permet de réduire le problème d'élasticité 3D complexe à un problème 2D bien plus simple. Cette approche pose donc l'hypothèse que le champ de déplacement dans l'épaisseur peut être considéré comme continu à travers l'épaisseur de la structure multicouche. Ces théories sont très intéressantes dans l'étude des plaques et des coques, car celles-ci s'affranchissent ainsi de la discrétisation dans la direction de l'épaisseur, faisant ainsi ressortir le caractère bidimensionnel de la structure. Cependant, en considérant une approximation du déplacement unique dans toute l'épaisseur du stratifié, cette classe de théories assure la continuité des déformations entre les diverses strates, mais ne permet pas de modéliser la continuité des contraintes aux interfaces des couches. Ainsi, les contraintes inter-laminaires ne peuvent généralement pas être déterminées avec précision à l'aide de ces seules méthodes, ce qui implique donc souvent l'utilisation d'autres théories pour effectuer une correction a posteriori des contraintes. Dans cette catégorie, on considère généralement trois déclinaisons de cette approche dans ce qui suit.

#### II.5.1.1. Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT)

La théorie CLPT, qui est une généralisation aux stratifiés composites de la théorie classique des plaques, se présente comme la plus simple des approches ESL. Cette théorie se base sur les hypothèses de Kirchhoff-Love, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation et gardera la même longueur (figure II.5), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Ainsi, la réponse d'une plaque stratifiée ne peut être précisément déterminée avec cette méthode que si la structure est très mince et que les matériaux utilisés sont faiblement orthotropes, cela veut dire que les couches sont composées de matériaux assez peu différents, et possèdent des modules de cisaillement transverse du même ordre de grandeur que les autres modules. Une autre condition pour que cette approche donne de bons résultats est que le chargement et les conditions aux limites n'occasionnent que peu de flexion dans le stratifié. Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0,x}(x, y), \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0,y}(x, y), \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II. 7}$$

Où  $(u, v, w)$  représente le vecteur des déplacements, d'un point matériel de coordonnées nominales  $(x, y, z)$ , de même  $(u_0, v_0, w_0)$  ce sont les déplacements du feuillet moyen. Le plan principal de la plaque est le plan  $x$ - $y$  et l'épaisseur  $h$  de cette dernière est orientée selon l'axe  $z$  (avec  $z \in [-h/2, h/2]$ )

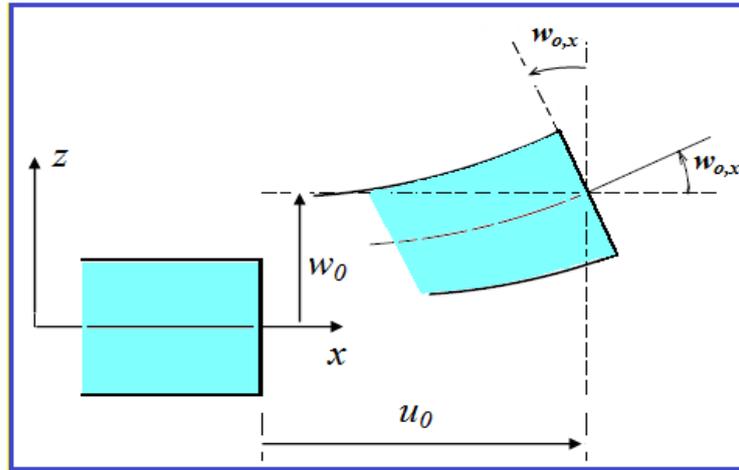


Figure II.5 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

### II.5.1.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans la section précédente, nous avons montré que la théorie élémentaire permettait uniquement d'analyser la dispersion des ondes à basses fréquences. Nous devons donc employer une autre théorie si l'on veut pouvoir caractériser les ondes principales et secondaires à des fréquences plus élevées. On peut donc utiliser la théorie FSDT proposée par Whitney et al. [35] qui est une extension de la théorie du premier ordre proposée dans Mindlin [36] pour étudier les ondes transversales et qui revisite l'hypothèse (La section droite de la plaque reste perpendiculaire au feuillet moyen) de la théorie élémentaire de Kirchhoff-Love en tenant compte des déformations liées au cisaillement transverse, ainsi que des inerties de rotation de section. Pour chacune de ces théories approchées, le matériau composite stratifié est homogénéisé complètement ; c'est pourquoi elles sont souvent désignées par le terme de couche unique équivalente. Du fait de ces nouvelles hypothèses, le champ de déplacement doit être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned}
\tag{II. 8}$$

Avec:  $\phi_x, \phi_y$  représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement (figure II.6), de tel sorte que :

$$\phi_x = \gamma_{xz}^0 + w_{0,x}, \quad \phi_y = \gamma_{yz}^0 + w_{0,y}$$

Où  $\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$  les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.

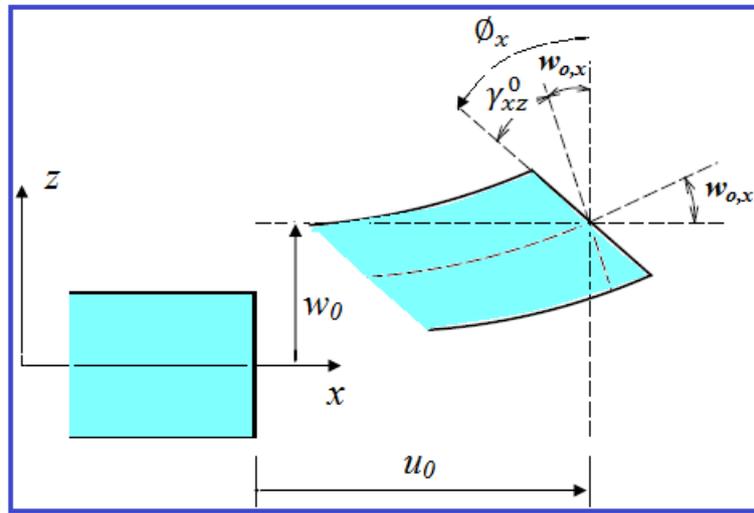


Figure II.6 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

### II.5.1.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou coques épaisses, où la déformation en cisaillement transverse joue un grand rôle. La plupart des modèles basés sur cette approche ne développent le champ de déplacement qu'au troisième ordre, représentant ainsi des déformations en cisaillement transverse quadratiques dans l'épaisseur. Le champ de déplacement approché est pour le troisième ordre, de la forme :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) + z^2\theta_x(x, y) + z^3\psi_x(x, y), \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) + z^2\theta_y(x, y) + z^3\psi_y(x, y), \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned}
\tag{II. 10}$$

Où les variables  $\phi_x, \phi_y$  représentent les rotations des sections déformées autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement (termes du premier ordre), tandis que  $\theta_x, \theta_y$  symbolisent les termes du second ordre (courbure) et  $\psi_x, \psi_y$  les termes du troisième ordre (gauchissement des sections).

Cependant, l'augmentation de l'ordre de l'approximation introduit des degrés de liberté supplémentaires, ce qui alourdit passablement le problème à résoudre. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées [37, 38]. Les hypothèses les plus utilisées considèrent que la plaque ou la coque est incompressible dans la direction transverse et que la contrainte de cisaillement s'annule sur les peaux du stratifié [39] (figure II.7). La première hypothèse entraîne alors l'annulation des termes d'ordre deux dans le développement du déplacement dans l'épaisseur, tandis que la seconde hypothèse permet de relier le coefficient du terme cubique à celui du terme linéaire, ce qui réduit finalement le problème à un même niveau de complexité que le modèle FSDT (seulement cinq inconnues  $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$ ). La précision des rigidités de stratifié ainsi obtenues avec les méthodes

HSDT est nettement supérieure à celle trouvée à l'aide des théories d'ordre inférieur et le recours au facteur de correction de cisaillement n'est généralement pas nécessaire. Par contre, comme toutes les théories ESLM basées sur une approximation du déplacement uniquement, les contraintes inter-laminaires ne sont toujours pas continues à l'interface entre les stratifiés, même si ces dernières se rapprochent des contraintes réelles. Si d'un point de vue de la précision en fonction de l'effort de calcul, les théories du troisième ordre simplifiées semblent optimales, des modèles HSDT d'ordre plus élevé restent bien plus précis dans le cas de coques épaisses fortement orthotropes. Le développement de l'équation (II.10) est utilisé avec l'annulation des termes du second ordre ( $\theta_x, \theta_y$ ), l'expression du champ de déplacement devient :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0,x}(x, y) + f(z)\gamma_{xz}^0(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0,y}(x, y) + f(z)\gamma_{yz}^0(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II. 11})$$

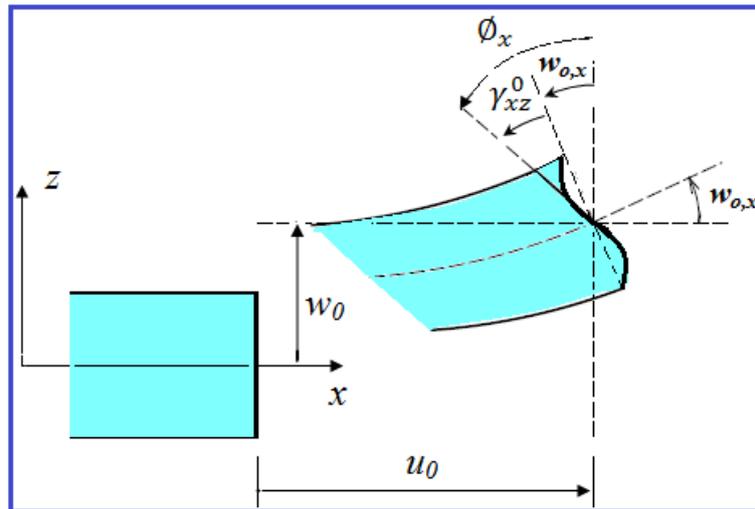


Figure II.7 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé.

$f(z)$  Est une fonction de cisaillement transverse qui caractérise l'effet de gauchissement à travers l'épaisseur de la plaque stratifiée, Il faut également noter que l'expression de cette fonction est variable selon les différentes théories existantes dans la littérature. A savoir que  $f(z)=0$  pour le cas de la théorie classique des plaques stratifiées, par contre  $f(z)=z$  au titre de la théorie du premier ordre en cisaillement transverse.

Cependant, plusieurs fonctions de cisaillement ont été utilisées dans les modèles d'ordre supérieur:

- L'approche d'Ambartsumyan [40] donnée sous forme :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II. 12})$$

- L'approche de Reissner [4] exprimée par :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II. 13})$$

- L'approche de Reddy [13], La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II. 14})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$  est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La

distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de Touratier [21] avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II. 15})$$

Touratier [21] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

- Un modèle exponentiel de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [29] est obtenue en prenant :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II. 16})$$

- L'approche de Aydogdu [41] avec :

$$f(z) = z \alpha \frac{e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}}{\ln(\alpha)}, \quad \alpha > 0 \quad (\text{II. 17})$$

### II.5.2. Approche par couche

Contrairement aux théories ESLM, les théories par-couche supposent des champs de déplacement développés séparément d'une couche matérielle à l'autre (figure II.8). Elles consistent donc à fournir une représentation cinématiquement correcte de la déformation dans les couches discrètes stratifiées, et permettre la détermination exacte des contraintes aux niveaux des plis.

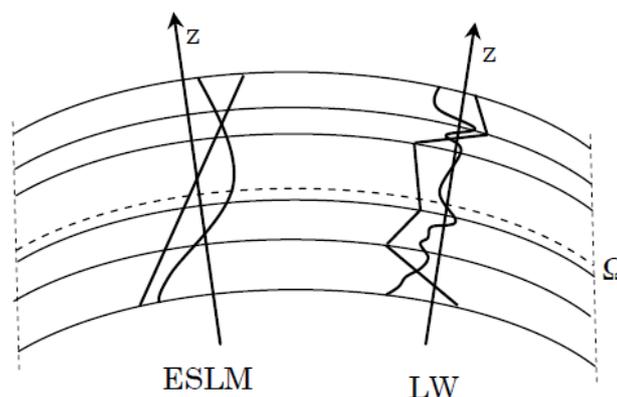
En dépit du succès des modèles par-couche qui négligent la déformation normale transverse [42], ces modèles ne sont pas capables de déterminer correctement les contraintes inter-laminaires tout près de discontinuités tels que les trous, bords libres en traction ...etc.

Dans la modélisation de ces effets locaux, l'inclusion de la déformation normale transverse est importante pour deux raisons: premièrement, la contrainte normale transverse

est une contrainte généralement significative dans ces régions, si ce n'est pas la dominante. Deuxièmement, comme rapporté par Robbins et Reddy [43], les modèles par-couche qui négligent la déformation normale transverse ne satisfont pas les conditions aux limites en traction concernant les contraintes du cisaillement transverse au niveau des bords libres du composite stratifié. Un examen des conditions aux limites naturelles pour les équations différentielles de mouvement développées dans les références [44, 45] (pour le cas des théories par-couche qui négligent la déformation normale transverse) révèle que les contraintes en cisaillement transverse satisfont les conditions aux limites en traction au bord libre de la structure, dans le sens intégral uniquement et non pas dans le sens local (malgré le niveau de raffinement suivant l'épaisseur).

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches.



**Figure II.8 :** Description linéaire et non-linéaire suivant  $z$  des approches monocouche équivalente et par-couche.

### II.5.3. Approche développement asymptotique

Le développement asymptotique est appliqué à des structures à priori peu épaisses où le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvements).

L'état caractérisant les déformations de la structure est donc constitué par la réunion des parties respectivement situées à l'intérieur et aux frontières, ce qui explique le procédé classique pour résoudre ce type de problème, à savoir la construction d'intégrales dites intérieures, qui correspondent à des solutions variant faiblement à l'intérieur du domaine, que l'on estime déterminées avec une erreur asymptotique (très petite). Un deuxième type d'intégrales, à fortes variations, caractérisant la solution près des bords (couche limite) est également construit [45, 47, 48]. Le travail le plus complet et intéressant semble celui de Ladeveze et Allix [49, 50]. Dans un premier temps, ils utilisent les résultats de la théorie classique des plaques. Puis, au voisinage du bord, ils posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs (contraintes et déplacements) correcteurs. Ce problème est décomposé en problème bidimensionnels (couches limites perpendiculaires au bord). Ensuite, on fait une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par exemple, par des développements en séries de Fourier. L'endommagement dans les couches et à la fois aux interfaces sont pris en compte [51].

Les approches développement asymptotique ont la même caractéristique à savoir qu'il faut pour calculer un effet de bord, effectuer deux calculs : un de plaque, l'autre de correction d'effet de bord. Ce deuxième calcul résolu de façon semi-analytique est limité à certains types de conditions limites et est donc difficile à appliquer pour les cas généraux [51].

## II.6. Conclusion

Dans ce travail, on s'intéresse tout particulièrement aux pièces structurales réalisées en composites stratifiés. Ces matériaux résultent de la mise en place de couches successives de plis composites à base d'une matrice et de fibres longues. Typiquement, le recours à ce type de conception se fait dans le domaine de l'aéronautique pour des éléments de fuselage des aérostructures et aussi dans le domaine génie civil. A cet effet nous avons exposé dans ce chapitre les relations qui existent entre les composantes de déformation et celles de déplacement qui nous ont permis l'obtention de l'équation fondamentale de la théorie des stratifiés. Cette théorie qui a pour but de simplifier le problème de l'analyse du comportement mécanique d'un stratifié en trois dimensions  $(x, y, z)$  en un problème à deux dimensions  $(x, y)$ .

La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur du stratifié. Cette intégration conduite à introduire les résultantes et moments. Par suite un rapide survol des théories des stratifiés composites existantes, on peut constater que les modèles analytiques des plaques stratifiées à savoir la théorie classique des plaques stratifiées (CLPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Sa formulation est basée sur les hypothèses de chaque théorie dans une approche bidimensionnelle d'élasticité suivie par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés.

## **Chapitre III :**

# **Etude du comportement de flexion et vibratoire des plaques composites stratifiées**

## Chapitre III

### *Etude du comportement de flexion et vibratoire des plaques composites stratifiées*

#### III.1. Introduction

Les problèmes des vibrations des structures sont devenus l'une des préoccupations actuelles dans plusieurs domaines (aéronautique, construction navale, automobile et le génie civil). L'amortissement des vibrations est un facteur essentiel dans de nombreuses applications structurales. Dans le cas de structures composites, les mouvements vibratoires sont à l'origine de nombreux problèmes typiques pouvant conduire à la ruine de la structure, tels que la résonance et la fatigue, à une limitation d'exploitation en raison d'un niveau de bruit élevé ou d'une perturbation des performances de la structure par la présence de vibrations indésirables. Basant sur la littérature décrite précédemment, il est clair que le comportement vibratoire des plaques stratifiées en matériaux composites soumises à des vibrations libres mérite bien d'être étudié puisque aucune des solutions approximatives ou exactes obtenues n'est couverte pas tous les états de frontières possibles, les facteurs géométriques, les propriétés mécaniques de différents types des matériaux et les effets de déformation de cisaillement sur les fréquences de vibrations. On conséquent, cette insuffisance des informations nous a permis d'investir dans ce domaine.

#### III.2. La théorie du premier ordre à quatre variables

La vibration libre des plaques composites stratifiées en utilisant la théorie du premier ordre à quatre variables est un travail de recherche très intéressant. La présente théorie identifiée la distribution trigonométrique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur de la plaque, et qui satisfait aux conditions aux limites des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres de la plaque sans utiliser les facteurs de correction de cisaillement. Les équations du mouvement sont dérivées de principe d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques exactes des structures en plaques composites stratifiées antisymétriques à empilements croisés et équilibrés. Des résultats numériques obtenus à l'aide de la théorie actuelle sont comparés aux solutions d'élasticité en trois dimensions et celles qui sont calculés à l'aide du premier ordre et les autres théories d'ordre supérieur. On peut en conclure que la théorie proposée est non seulement précise mais

également efficace pour analyser les fréquences naturelles des plaques composites stratifiées.

### III.2.1. Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire d'épaisseur totale  $h$  composée de plusieurs couches orthotropes  $n$  avec le système de coordonnées illustré sur la figure (III.1). En supposant que chaque couche possède un plan de symétrie élastique parallèle au plan  $x - y$ .

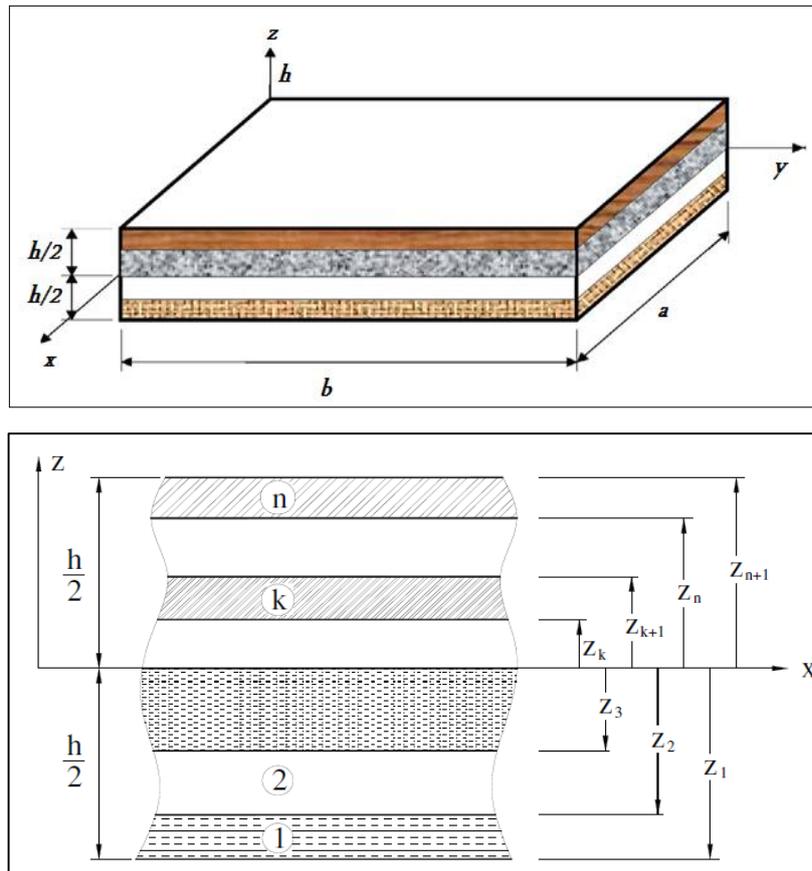


Fig.III.1 : Système de coordonnées et géométrie d'une plaque stratifiée.

### III.2.2. Hypothèses de base de la présente théorie

Les hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé (RPT) sont les suivantes :

- Les déplacements sont faibles en comparaison avec l'épaisseur de la plaque et par conséquent, les déformations considérées sont infinitésimales.
- La composante du déplacement transversale ( $w$ ) peut être dissociée en deux termes, le premier terme ( $w_b$ ) peut signifier la partie de la flèche pure de la plaque, le second terme ( $w_s$ ) représente la flèche induit par l'effet de la déformation de cisaillement de la section

transversale. Ces deux composantes sont en fonction des coordonnées  $x, y$  seulement et s'écrivent comme suit :

$$W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III. 1})$$

- La contrainte transversale normale  $\sigma_z$  est négligeable par rapport à des contraintes dans le plan  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ ,
- Les déplacements  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction ( $y$ ) se composent d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement. Les composantes des déplacements  $u$  et  $v$  dans les directions ( $x$ ) et ( $y$ ) respectivement peuvent être dissociées en trois termes :

$$u = u_0 + u_b \quad (\text{III. 2a})$$

$$v = v_0 + v_b \quad (\text{III. 2b})$$

Les premières composantes  $u_0$  et  $v_0$  représentent les déplacements en membrane. Les deuxièmes composantes  $u_b$  et  $v_b$  sont les composantes de la flèche similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques, les expressions de ces derniers sont données par les formes suivantes :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III. 3})$$

### III.2.3. Champ de déplacement

Dans cette étude, les hypothèses simplifiées sont basées sur le principe de la théorie FSDT existante, seulement que dans la présente théorie le nombre des inconnues est réduit à quatre variables.

L'ancien champ de déplacement de la FSDT existante est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III. 4})$$

Où ( $u_0, v_0, w_0, \varphi_x$  et  $\varphi_y$ ) sont cinq fonctions de déplacement inconnues du plan médian de la plaque; et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. En devisant le déplacement transversal  $w$  en deux

parties, flexion et cisaillement (c'est-à-dire  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_b + \mathbf{w}_s$ ) et ajouter une autre hypothèse exprimée par  $\varphi_x = -\partial \mathbf{w}_b / \partial x$  et  $\varphi_y = -\partial \mathbf{w}_b / \partial y$ , le nouveau champ de déplacement de la présente théorie peut être réécrite sous une forme plus simple tel que :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III. 5})$$

De toute évidence, le champ de déplacement dans l'équation (III.5) contient seulement quatre inconnues ( $u_0, v_0, w_b, w_s$ ). En effet, l'idée de travailler avec un déplacement transversal qui groupe deux composantes, de flexion et de cisaillement a été proposé au premier lieu par Huffington [37], adopté plus tard par Krishna Murty [38], Senthilnathan et al. [39], Shimpi [40], et récemment par Thai et Ses collègues [45-47]. Il est à noter que Senjanovic et al. [67,68] a également utilisé la même hypothèse que celle proposée dans le présent travail, mais était en conjonction avec la théorie de Timoshenko. Les contraintes associées au champ de déplacement dans l'équation (III.5) sont:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 6})$$

### III.2.4. Equations constitutives

En considérant l'hypothèse que chaque couche possède un plan de symétrie élastique parallèle au plan  $(x, y)$ , les équations constitutives pour des déformations non nulles peuvent être écrites comme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 7})$$

Où :  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. Les coefficients de rigidités  $Q_{ij}$  peuvent être exprimés en fonction des constantes d'ingénieur comme :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (\text{III. 8})$$

$$Q_{66} = G_{12}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{13}$$

Etant donné que le matériau stratifié est constitué de plusieurs couches orthotropes avec leurs axes orientés arbitrairement en ce qui concerne les coordonnées de stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées dans le repère global du stratifié  $(x, y, z)$ . Les relations constitutives pour n'importe quelle couche  $k$  d'un matériau stratifié dans le système de coordonnées  $(x, y)$ , correspondent à un état de contraintes planes, elles s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité réduite  $\bar{Q}_{ij}$  sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 9})$$

Où Les coefficients de rigidité réduite  $\bar{Q}_{ij}$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

$\theta$  Etant l'angle entre l'axe global ( $x$ ) et l'axe local ( $x$ ) de chaque lame.

La théorie des plaques a pour objectif de simplifier le problème à trois dimensions ( $x, y, z$ ) en un problème à deux dimensions ( $x, y$ ). La réduction du problème est obtenue par intégration suivant l'épaisseur. Cette intégration conduite à introduire les résultants qui seront définis prochainement.

### III.2.5. Equations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé dans cette étude pour dériver des équations de mouvement. Ce principe peut être énoncé sous une forme analytique comme :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (\text{III. 11})$$

Où  $\delta U, \delta V$  et  $\delta K$  sont les variations, de l'énergie de déformation, de l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, respectivement. La variation de l'énergie de déformation est calculé par :

$$\begin{aligned} \delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dAdz = \\ \int_A \left[ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \right) - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} + Q_x \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + Q_y \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right] dA \end{aligned} \quad (\text{III. 12})$$

Où  $N$ ,  $M$  et  $Q$  sont les contraintes résultantes définies par :

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \quad (\text{III. 13.a})$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \quad (\text{III. 13.b})$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (\text{III. 13.c})$$

En remplaçant l'équation (III. 6) dans l'équation (III. 9) et les résultats ultérieurs dans l'équation (III. 12), les expressions des contraintes résultantes sont obtenus en termes de déplacements ( $u_0, v_0, w_b, w_s$ ) Comme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial^2 x} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial^2 y} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 14.a})$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial^2 x} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial^2 y} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 14.b})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 14.c})$$

Où  $k$  est le facteur de correction de cisaillement et  $(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij})$  sont les matrices des coefficients de rigidité définis par :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (\text{III. 15})$$

Ainsi que l'énergie potentielle due aux charges appliquées sur la plaque est donnée par :

$$\delta V = - \int_A q \delta(w_b + w_s) dA \quad (\text{III. 16})$$

L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés. Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire. Au profit de notre étude, il s'agit d'une énergie cinétique définie comme :

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dAdz \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s)] + I_1 \left( \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial y} \right) \right\} dA, \end{aligned} \quad (\text{III. 17})$$

Où le symbole exposant (.) indique la différenciation par rapport à la variable de temps ( $t$ ), par contre ( $\rho$ ) est la densité du matériau et ( $I_0, I_1$ ) représentent les inerties de masse définies par :

$$(I_0, I_1) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2) \rho dz \quad (\text{III. 18})$$

En remplaçant les expressions des variations  $\delta U, \delta V$  et  $\delta K$  données par les équations (III. 12), (III. 16) et (III. 17) dans l'équation (III. 7) et en faisant l'intégration par parties, et ensuite en faisant la collection des coefficients ou bien des termes de  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b$  et  $\delta w_s$ , on obtient les équations de mouvement suivantes:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_1 (\ddot{w}_{b,xx} + \ddot{w}_{b,yy}) \\ \delta w_s : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \end{aligned} \quad (\text{III. 19})$$

### III.2.6. Solutions analytiques pour une plaque stratifiée simplement appuyée

A travers notre étude deux types de plaques stratifiées différentes sont considérés, à plis croisés  $[0/90]_n$ , et à plis équilibré  $[\theta/-\theta]_n$ . Pour le premier type à séquence d'empilement croisée, les conditions aux limites sur les bords de la plaque simplement appuyée peuvent être exprimées comme:

$$v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x = 0, \quad \text{Avec : } x = 0, a \quad (\text{III. 20.a})$$

$$u_0 = w_b = w_s = N_y = M_y = 0, \quad \text{Avec : } y = 0, b \quad (\text{III. 20.b})$$

Pour résoudre ce problème du comportement vibratoire de la flexion des plaques en matériaux composites stratifiés, on emploie les solutions de Navier qui sont développées sous

la forme d'une double série trigonométrique de Fourier et qui satisfaisant les conditions aux limites de l'équation (III.20) par les formes suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_b(x, y, t) \\ w_s(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 21})$$

$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}$ , et  $W_{smn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée avec  $(m, n)$  le mode propre et les constantes  $\alpha = m\pi/a$ ,  $\beta = n\pi/b$ .

Et pour le cas d'un stratifié à séquence d'empilement équilibrée, les conditions aux limites reliées aux déplacements pour un bord simplement appuyé sont:

$$u_0 = w_b = w_s = N_{xy} = M_x = 0, \quad \text{Avec : } x = 0, a \quad (\text{III. 22.a})$$

$$v_0 = w_b = w_s = N_{xy} = M_y = 0, \quad \text{Avec : } y = 0, b \quad (\text{III. 22.b})$$

Les conditions aux limites de l'équation (III.22) sont satisfaites par les formes suivantes:

$$\begin{Bmatrix} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_b(x, y, t) \\ w_s(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

En utilisant les contraintes résultantes de l'équation (III. 14), les équations de mouvement (III. 19) peuvent être exprimées en termes de déplacements  $u_0, v_0, w_b$  et  $w_s$  comme :

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & - \left[ B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \right] = I_0 \partial^2 u_0 \end{aligned} \quad (\text{III. 24.a})$$

$$\begin{aligned} & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & - \left[ B_{16} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \right] = I_0 \partial^2 v_0 \end{aligned} \quad (\text{III. 24.b})$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) - I_1 (\ddot{w}_{b,xx} + \ddot{w}_{b,yy})
\end{aligned} \tag{III. 24.c}$$

$$KA_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + KA_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + 2KA_{45} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \tag{III. 24.d}$$

Afin de démontrer la précision de la présente formulation, deux types de charges ont été appliquées sur les surfaces supérieures des plaques composites stratifiées simplement appuyées. Généralement la charge transversale peut être exprimée sous la forme :

$$q(x, y) = \sum_{m \rightarrow 1}^{\infty} \sum_{n \rightarrow 1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \tag{III. 25}$$

- Pour le cas d'une charge sinusoïdale, le coefficient  $Q_{mn} = q_0$  ;
- Pour le cas d'une charge uniformément répartie (figure 2.b), le

$$\text{coefficient } Q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} ;$$

En remplaçant les équations (III. 26) et (III. 27) dans l'équation (III. 25), les solutions analytiques Peut être obtenu à partir de :

$$\left( \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix} \right) - \omega^2 \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & I_0 \\ 0 & 0 & I_0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ Q_{mn} \end{Bmatrix} \tag{III. 27}$$

Où :

$$\begin{aligned}
s_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, s_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta, s_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 \\
s_{33} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4, s = k(A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2) \\
s_{12} &= -B_{11}\alpha^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2 \\
s_{23} &= -B_{22}\beta^3 - (B_{12} + 2B_{66})\alpha^2\beta
\end{aligned} \tag{III. 28}$$

$$\begin{pmatrix} s_{13} = -\mathbf{B}_{26}\beta^3 - 3\mathbf{B}_{16}\alpha^2\beta \\ s_{23} = -\mathbf{B}_{16}\alpha^3 - 3\mathbf{B}_{26}\alpha\beta \end{pmatrix} \text{ Pour l'antisymétrique angle-ply}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_0 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_2(\alpha^2 + \beta^2)$$

La solution analytique de CPT peut également être obtenue à partir de l'équation (III.28) en omettant la partie de cisaillement du déplacement transversal (c'est-à-dire,  $w_s = 0$ ).

### III.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement vibratoire de la flexion des plaques stratifiées en matériaux composite en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre .Le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement.

# **Chapitre IV :**

## **Résultat et discussion**

## **Chapitre IV:** **Résultats et discussions**

### IV.1. Introduction

Le premier objectif principal de ce travail a été de proposer un nouveau modèle analytique basé sur la théorie du premier ordre à quatre variables pour analyser le comportement vibratoire des plaques simplement appuyées en matériaux composites stratifiés antisymétriques. Dans cette section, différents exemples numériques sont décrits et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie. Pour vérification, les résultats obtenus sont comparés à la solution exacte 3D et celles prédites par d'autres modèles de théories des plaques. La description de différents modèles et leur nombre correspondant des inconnues sont listés dans le tableau IV.1. En outre, les résultats de la FSDT sont également calculés de manière indépendante dans cette étude à l'aide d'une solution analytique donnée par Reddy [39]. Dans tous les exemples, un facteur de correction de cisaillement de 5/6 est utilisé dans la présente théorie et la théorie FSDT existante.

**Tableau IV.1:** Modèles de déplacement.

<b>Modèles</b>	<b>Théories</b>	<b>Inconnus</b>
<b>CPT</b>	Théorie classique des plaques	3
<b>ZSDT</b>	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre zéro Ray [51]	5
<b>FSDT</b>	Théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre	5
<b>TSDT</b>	Théorie de la déformation de cisaillement de troisième ordre Reddy [18]	5
<b>HSDT</b>	Théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevée Swaminathan and Patil [53]	12
<b>Présente</b>	Simple théorie de déformation du cisaillement de premier ordre	4

### IV.2. Les propriétés des stratifiés utilisés

A travers cette étude, trois types de matériaux ont été utilisés dont les différentes propriétés matérielles adimensionnelles sont les suivantes:

➤ Matériau1 (Reddy [70]):

$$E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25 \quad (\text{IV. 1a})$$

➤ Matériau 2(Noor [71]):

$$E_1/E_2 = Open, G_{12}=G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25 \quad (IV. 1b)$$

➤ Matériau 3(Noor and Burton [72]):

$$E_1=15E_2, G_{12}=G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.35E_2, \nu_{12} = 0.3 \quad (IV. 1c)$$

La fréquence naturelle fondamentale est représentée en tant que terme adimensionnel ( $\bar{\omega}$ ) défini pour présenter les résultats numériques obtenus sous formes graphiques et tabulaires, ce terme peut être défini comme :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho/E_2} \quad (IV. 2)$$

De plus, les déplacements et les contraintes adimensionnels utilisés dans cette étude sont :

$$\begin{aligned} \bar{u}\left(0, \frac{b}{2}, z\right) &= 100 \frac{E_2 h^3}{q_0 a^4} u, \bar{w}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right) = 100 \frac{E_3 h^3}{q_0 a^4} w, (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y)\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right) = \frac{h^2}{q_0 a^2} (\sigma_x, \sigma_y), \\ \bar{\tau}_{xy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right) &= \frac{h^2}{q_0 a^2} \tau_{xy}, \bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, \frac{z}{h}\right) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{xz}, \bar{\tau}_{yz}\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{z}{h}\right) = \frac{h}{q_0 a} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (IV. 3)$$

### IV.3. Résultats d'analyse de flexion des plaques stratifiées antisymétriques

#### IV.3.1. L'influence du rapport d'élanement

Le premier exemple est effectué pour des plaques stratifiées antisymétriques carrées à deux couches [0/90] minces et épaisses, simplement appuyées, sous une charge transversale sinusoïdale. Les couches sont de même épaisseur et constituées par les propriétés physiques du matériau 1. Les rapports d'élanement ( $a/h$ ) sont considérés comme égales à 2 (correspondant à des plaques très épaisses), à 5 (correspondant à des plaques épaisses), à 10 ou 20 (correspondant à des plaques moyennement épaisses) et à 100 (correspondant à des plaques minces). D'après le tableau (IV.2), les résultats obtenus sont comparés aux solutions exactes d'élasticité 3D fournies par Pagano [54] et ceux rapportés par Kim et al. [55] en utilisant les théories TSDT, FSDT et CPT. En général, la présente théorie FSDT à quatre variables et la théorie FSDT à cinq variables donnent des résultats presque identiques pour différentes valeurs de rapport d'élanement ( $a/h$ ). Dans le cas des stratifiés très épais avec  $a/h$  égale à 2, il y a de petites erreurs dans les valeurs prévues par la présente théorie, FSDT et HSDT. Cependant, ces erreurs deviennent négligeables lorsque le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) est supérieur à 5. En raison de l'absence des effets de déformation du cisaillement, la théorie

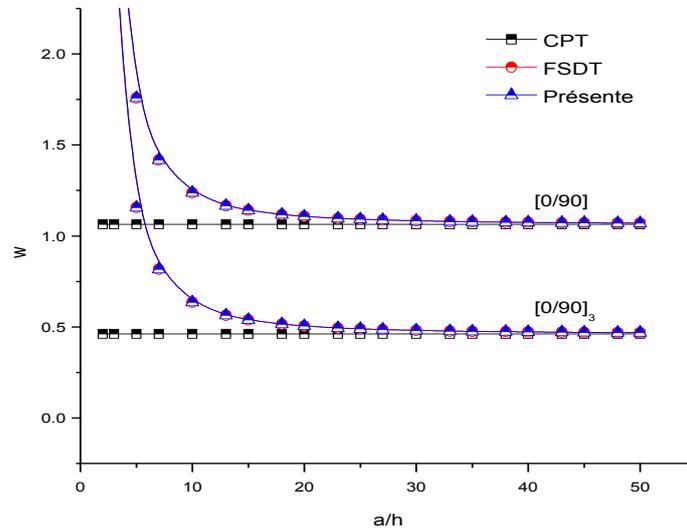
classique CPT fournit des résultats acceptables pour les plaques composites stratifiées avec un rapport ( $a/h \geq 20$ ).

**Tableau IV.2:** la flèche adimensionnelle dans une plaque stratifiée antisymétrique carrée [0/90] simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale (matériau 1).

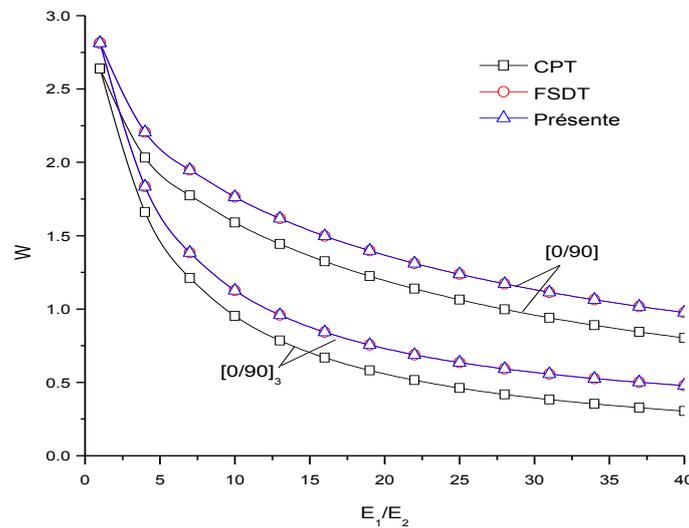
$a/h$	Théories	$\bar{w}$	Erreur(%)
2	Exact [73]	4.9362	
	TSDT [54]	4.5619	-7.58
	FSDT [54]	5.4103	9.60
	CPT [54]	1.0636	-78.45
	Présente	5.4059	9.52
5	Exact [73]	1.7287	
	TSDT [54]	1.6670	-3.57
	FSDT [54]	1.7627	1.97
	CPT [54]	1.0636	-38.47
	Présente	1.7584	1.72
10	Exact [73]	1.2318	
	TSDT [54]	1.2161	-1.27
	FSDT [54]	1.2416	0.80
	CPT [54]	1.0636	-13.65
	Présente	1.2373	0.45
20	Exact [73]	1.1060	
	TSDT [54]	1.1018	-0.38
	FSDT [54]	1.1113	0.48
	CPT [54]	1.0636	-3.83
	Présente	1.1070	0.09
100	Exact [73]	1.0742	
	TSDT [54]	1.0651	-0.85
	FSDT [54]	1.0653	-0.83
	Présente	1.0653	-0.83
	CPT [54]	1.0636	-0.99

Pour illustrer l'avantage et la précision de la nouvelle théorie pour un large éventail rapport d'élanement ( $a/h$ ) et un rapport d'orthotropie du matériau ( $E1/E2$ ), les variations de la flèche adimensionnelle en fonctions de ces deux rapports sont illustrées sur la figure (IV.2) et la figure (IV.3), respectivement. Les résultats obtenus sont comparés à ceux présentés par CPT et FSDT. Dans cette étude les résultats de la théorie classique CPT sont obtenus en utilisant l'équation (III.28) tandis que les résultats de la théorie FSDT sont calculés à l'aide de la solution analytique donnée par la référence [39]. Encore une fois, la nouvelle FSDT et l'ancienne théorie FSDT donnent des solutions presque identiques et les résultats montrent

que l'augmentation du rapport d'élongement ( $a/h$ ) conduit à une diminution de la flèche  $\bar{w}$  alors que la théorie classique CPT sous-estime les flèches des stratifiés épais avec un rapport  $a/h < 20$  en raison de l'absence des effets de déformation du cisaillement (voir figure IV.1).



**Figure IV.1:** Variation de la flèche adimensionnelle d'un stratifié antisymétrique carré à pli croisé  $[0/90]_n$  sous une charge sinusoïdale en fonction du rapport d'élongement  $a/h$  (matériau 1).



**Figure IV.2:** Variation de la flèche adimensionnelle d'un stratifié antisymétrique carré à pli croisé  $[0/90]_n$  sous une charge sinusoïdale en fonction du rapport d'orthotropie  $E_1/E_2$ ,  $a/h=10$  (matériau 1).

### IV.3.2. L'influence du nombre de couches

Dans l'exemple suivant, on analyse un stratifié antisymétrique carré  $[0/90]_n$  soumis à des charges sinusoïdales en utilisant le matériau 1. Le tableau (IV.3) montre les flèches adimensionnelles des stratifiés pour différentes valeurs du rapport d'élanement et du nombre de couches. Les résultats obtenus sont comparés à ceux proposés par Ray [52] en utilisant la théorie de la déformation du cisaillement de l'ordre zéro (ZSDT) et ceux donnés par Reddy [39] en utilisant les théories TSDT, FSDT et CPT. Généralement on constate que la nouvelle théorie FSDT et la théorie FSDT à cinq variables donnent des solutions identiques les uns aux autres et leurs solutions sont également en accord avec celles générées par Ray [52] pour toutes les valeurs du rapport d'élanement et du nombre de couches du stratifié. Il est observé également qu'avec l'augmentation du nombre de couches, la rigidité de la plaque est augmentée et par conséquent diminuer la flèche adimensionnelle.

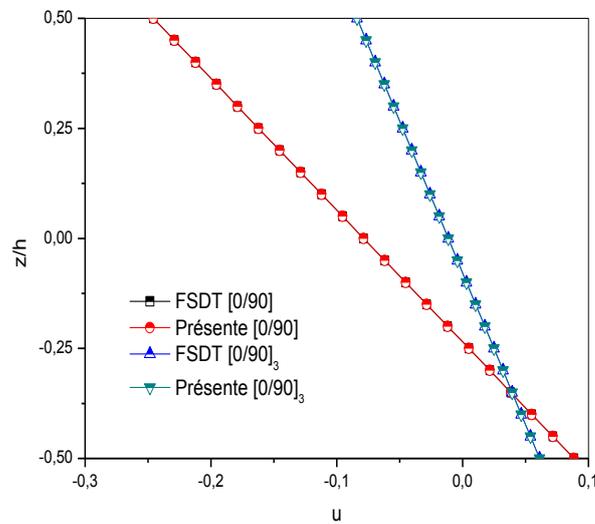
**Tableau IV.3:** la flèche adimensionnelle dans une plaque stratifiée antisymétrique carrée  $[0/90]_n$  simplement appuyée, soumise à une charge sinusoïdale (matériau 1).

$a/h$	Théories	$n$	
		1	3
4	ZSDT [74]	2.0010	1.5410
	TSDT [70]	1.9985	1.5411
	FSDT [70]	2.9492	1.5473
	CPT [70]	1.0636	0.4617
	Présente	2.9492	1.5473
10	ZSDT [74]	1.2160	0.6380
	TSDT [70]	1.2161	0.6382
	FSDT [70]	1.2373	0.6354
	CPT [70]	1.0636	0.4617
	Présente	1.2373	0.6354
20	ZSDT [74]	1.1020	0.5060
	TSDT [70]	1.1018	0.5060
	FSDT [70]	1.1070	0.5053
	CPT [70]	1.0636	0.4617
	Présente	1.1070	0.5053
100	ZSDT [74]	1.0650	0.4630
	TSDT [70]	1.0651	0.4635
	FSDT [70]	1.0653	0.4635
	CPT [70]	1.0636	0.4617
	Présente	1.0653	0.4635

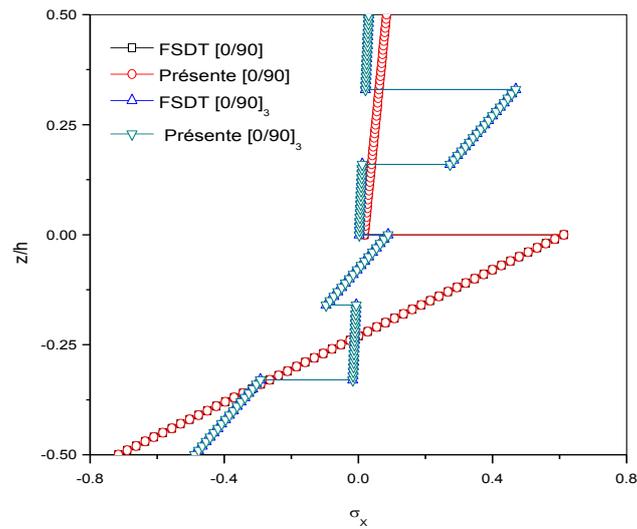
Toutes les variations à travers l'épaisseur et les valeurs correspondantes aux déplacements dans le plan ( $\bar{u}$ ), aux contraintes normales axiales ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) et contraintes de cisaillement ( $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ ) sont montrées dans le tableau (IV.4) et également représentées sur les figures (IV.3) à (IV.8), pour un stratifié à empilement croisé moyennement épais avec  $a/h=10$ . Un excellent accord est observé entre les résultats prévus par la présente théorie et la théorie connue FSDT à cinq variables.

**Tableau IV.4:** le déplacement dans le plan et les contraintes adimensionnelles pour une plaque stratifiée antisymétrique carrée  $[0/90]_n$ , soumise à une charge sinusoïdale,  $a/h=10$ , (matériau 1).

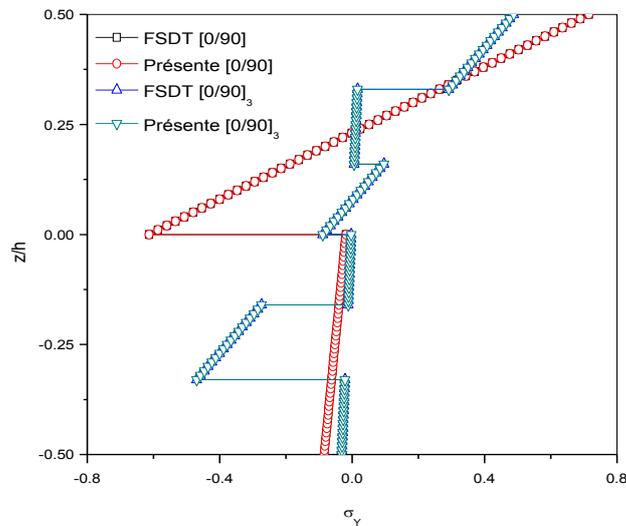
$n$	Méthodes	$\bar{u}(h/2)$	$\bar{\sigma}_x(-h/2)$	$\bar{\sigma}_{xy}(-h/2)$	$\bar{\sigma}_{xz}(-h/4)$
1	FSDT	-0.2457	-0.7157	0.0525	0.228
	Présente	-0.2457	-0.7157	0.0525	0.2728
3	FSDT	-0.0839	-0.4881	0.0228	0.1091
	Présente	-0.0839	-0.4881	0.0228	0.1091



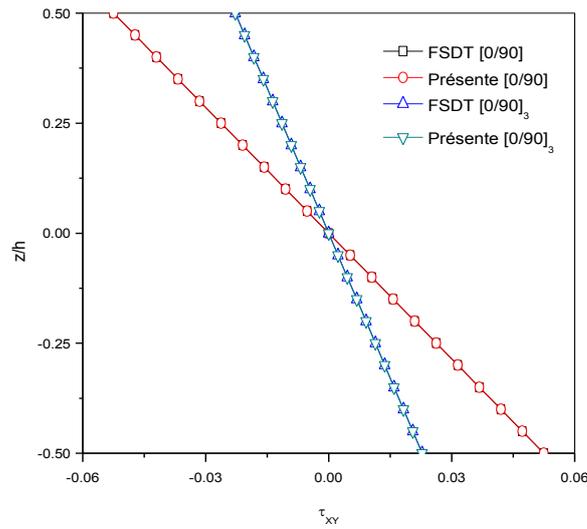
**Figure IV.3:** Variation du déplacement adimensionnel  $\bar{u}$  dans le plan pour une plaque stratifiée antisymétrique carrée à pli croisé  $[0/90]_n$  soumise à une charge sinusoïdale avec  $a/h=10$ , matériau 1



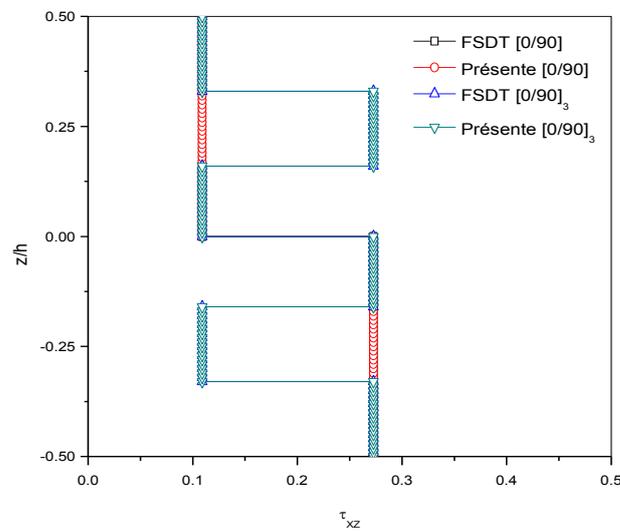
**Figure IV.4 :** Distribution des contraintes normales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_x$  dans une plaque stratifiée antisymétrique carrée à pli croisé  $[0/90]_n$  soumise à une charge sinusoïdale avec  $a/h=10$ , matériau 1.



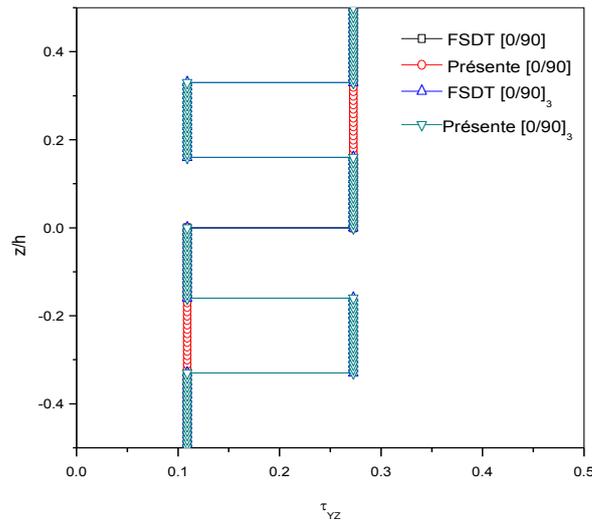
**Figure IV.5 :** Distribution des contraintes normales adimensionnelles  $\bar{\sigma}_y$  dans une plaque stratifiée antisymétrique carrée à pli croisé  $[0/90]_n$  soumise à une charge sinusoïdale avec  $a/h=10$ , matériau 1.



**Figure IV.6 :** Distribution des contraintes de cisaillement adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xy}$  dans le plan d'une plaque stratifiée antisymétrique carrée à pli croisé  $[0/90]_n$  soumise à une charge sinusoïdale avec  $a/h=10$ , matériau 1.



**Figure IV.7 :** Distribution des contraintes de cisaillement adimensionnelles  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée antisymétrique carrée à pli croisé  $[0/90]_n$  soumise à une charge sinusoïdale avec  $a/h=10$ , matériau 1.



**Figure IV.8 :** Distribution des contraintes de cisaillement adimensionnelles  $\bar{\tau}_{yz}$  à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée antisymétrique carrée à pli croisé  $[0/90]_n$  soumise à une charge sinusoïdale avec  $a/h=10$ , matériau 1.

### IV.3.3. Flexion des plaques stratifiées à empilement équilibré sous l'effet des charges sinusoïdales et uniformes

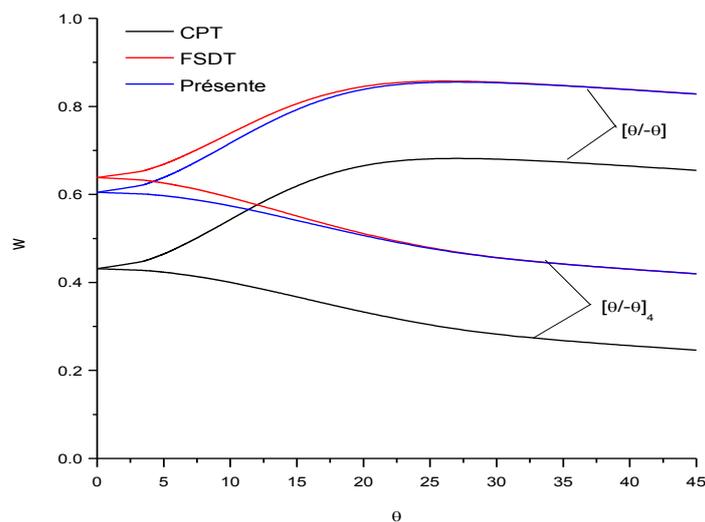
Dans cette étude, on examine une plaque carrée en composite stratifié antisymétrique à séquence d'empilement équilibré  $[45/-45]$  simplement appuyée, sous une charge transversale sinusoïdale et uniformément répartie à la fois en utilisant les propriétés matérielles du matériau 1. Les flèches adimensionnelles de la plaque sont présentées dans le tableau (IV.5) pour différentes valeurs du rapport d'élanement et du nombre de couches. Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés par Reddy [39] en utilisant CPT et FSDT.

**Tableau IV.5:** la flèche adimensionnelle dans une plaque stratifiée carrée à empilement équilibré  $[45/-45]_n$ , simplement appuyée,(matériau 1).

$a/h$	Théories	Charges sinusoïdales		Charges uniformes	
		$n=1$	$n=4$	$n=1$	$n=4$
10	FSDT [70]	0.8284	0.4198	1.2792	0.6366
	CPT [70]	0.6547	0.2462	1.0280	0.3858
	Présente	0.8284	0.4198	1.2806	0.6383
20	FSDT [70]	0.6981	0.2896	1.0907	0.4483
	CPT [70]	0.6547	0.2462	1.0280	0.3858
	Présente	0.6981	0.2896	1.0912	0.4489
100	FSDT [70]	0.6564	0.2479	1.0305	0.3883
	CPT [70]	0.6547	0.2462	1.0280	0.3858
	Présente	0.6564	0.2479	1.0306	0.3883

On constate que les résultats obtenus par la nouvelle théorie FSDT à quatre variables et la théorie FSDT à cinq variables sont en excellent accord les uns avec les autres. Il convient de noter que la présente FSDT est plus simple que celle à cinq variables en raison d'un nombre plus petit d'inconnues (voir le tableau (IV.1)). Ainsi que nous observons que les conditions de chargement et l'augmentation des nombres de couches ont un effet sur la rigidité des plaques en matériaux stratifiés à plis équilibrés.

Afin de vérifier l'exactitude de la présente théorie, nous avons tracés les flèches adimensionnelles pour un stratifié antisymétrique carré à empilement équilibré, sous chargement sinusoïdale en fonction de la variation de l'angle d'orientation des renforts avec un rapport d'élanement  $a/h=10$ , (figure (IV.9)). Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par Reddy [39] en utilisant CPT et FSDT. Généralement, on observe que les résultats obtenus par les deux théories de déformation du cisaillement de premier ordre sont presque identiques, sauf dans le cas où les valeurs de l'angle de stratification est faible ( $\theta < 20$ ), c'est-à-dire un faible écart est observé entre la présente et ancienne théorie FSDT. La différence maximale entre les deux résultats est de 5,23% pour le cas ( $\theta=0$ ). Cependant, cette différence est négligeable par rapport à la différence de 32,45% entre la théorie élémentaire CPT et la théorie FSDT pour le même angle de stratification  $\theta$ .



**Figure IV.9:** Variation de la flèche adimensionnelle dans une plaque stratifiée antisymétrique carrée à pli équilibré  $[\theta/-\theta]_n$  soumise à une charge sinusoïdale par rapport à l'angle de stratification  $\theta$  avec  $a/h=10$ , matériau 1.

#### IV.4. Résultats d'analyse de la vibration libre des plaques stratifiées antisymétriques

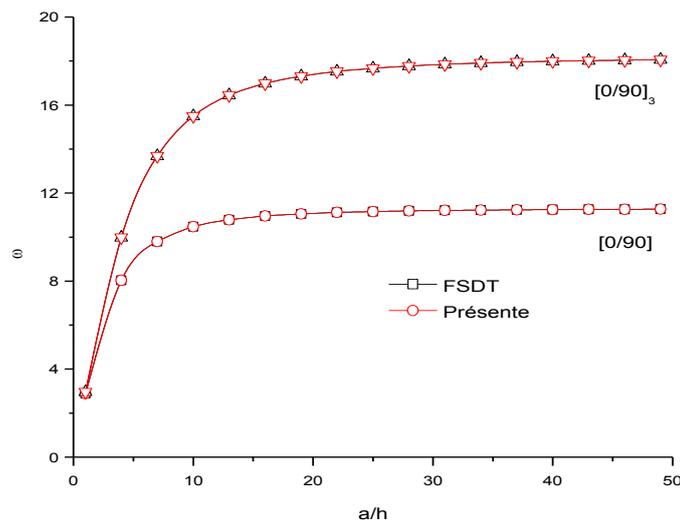
##### IV.4.1. Effet du rapport d'orthotropie

Afin d'analyser le comportement vibratoire des plaques composites, on a choisi un stratifié antisymétrique carré épais à plis équilibré  $[0/90]_n$  avec un rapport d'éclatement ( $a/h=5$ ) en utilisant le matériau 2. Les fréquences fondamentales adimensionnelles sont données dans le tableau (IV.6) pour différentes valeurs du rapport des modules de Young et du nombre de plis. Notre objectif est de vérifier l'exactitude et la bonne convergence du présent travail, à cet effet les résultats numériques obtenus sont comparés aux solutions exactes 3D effectués par Noor [56] et celles présentés par Thai et Kim [57] en utilisant les théories TSDT et FSDT. Ainsi que les résultats obtenus par la présente théorie FSDT sont presque identiques à ceux prévus par la théorie FSDT existante [57]. Cette déclaration est également démontrée à la figure (IV.10) dans laquelle les résultats obtenus par la nouvelle théorie de déformation du cisaillement de premier ordre à quatre variables et FSDT à cinq variables [57] sont en excellent accord pour les différents rapports d'éclatement ( $a/h$ ).

**Tableau IV.6:** Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée carrée  $[0/90]_n$  pour différentes valeurs du rapport d'orthotropie, avec  $a/h = 5$  (Matériau 2).

$E_1/E_2$	Théories	$N$			
		1	2	3	5
<b>3</b>	Exact [71]	6.2578	6.5455	6.6100	6.6458
	TSDT [52]	6.2169	6.5008	6.5558	6.5842
	FSDT [52]	6.2085	6.5043	6.5569	6.5837
	Présente	6.2085	6.5043	6.5569	6.5837
<b>10</b>	Exact [71]	6.9845	8.1445	8.4143	8.5625
	TSDT [52]	6.9887	8.1954	8.4052	8.5126
	FSDT [52]	6.9392	8.2246	8.4183	8.5132
	Présente	6.9392	8.2246	8.4183	8.5132
<b>20</b>	Exact [71]	7.6745	9.4055	9.8398	10.0843
	TSDT [52]	7.8210	9.6265	9.9181	10.0674
	FSDT [52]	7.7060	9.6885	9.9427	10.0638
	Présente	7.7060	9.6885	9.9427	10.0638
<b>30</b>	Exact [71]	8.1763	10.1650	10.6958	11.0027
	TSDT [52]	8.5050	10.5348	10.8547	11.0197
	FSDT [52]	8.3211	10.6198	10.8828	11.0058
	Présente	8.3211	10.6198	10.8828	11.0058
<b>40</b>	Exact [71]	8.5625	10.6789	11.2728	11.6245
	TSDT [52]	9.0871	11.1716	11.5012	11.6730
	FSDT [52]	8.8333	11.2708	11.5264	11.6444
	Présente	8.8333	11.2708	11.5264	11.6444

Les résultats obtenus confirment à nouveau que le degré de l'orthotropie à un effet significatif sur les fréquences naturelles, ce dernier est considéré variable en fonction du rapport des modules de Young suivant les deux directions différentes du matériau et comme prévu, il a indiqué très clairement qu'avec l'augmentation du nombre de couches, la rigidité de la plaque est augmentée et par conséquent augmentent les fréquences propres.



**Figure IV.10:** Variation de la fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée antisymétrique carrée à pli croisé  $[0/90]_n$  en fonction du rapport d'élanement ( $a/h$ ),  $E1/E2=10$ , (Matériau 2).

#### IV.4.2. L'influence du rapport d'élanement et de l'angle de stratification

Dans cet exemple, une analyse a été effectuée sur les stratifiés antisymétriques carrés à 10 couches minces et épais  $[\theta/-\theta]_5$  en utilisant le matériau 3. Le tableau (IV.7) montre les fréquences fondamentales adimensionnelles pour les différentes valeurs du rapport longueur/épaisseur et l'angle de stratification. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions exactes 3D fournies par Noor et Burton [56] et celles calculées indépendamment dans cette étude en utilisant FSDT. Un très bon accord est observé entre les résultats obtenus. Par rapport aux solutions exactes 3D [72], l'erreur maximale de la nouvelle théorie est de 4,07% pour le cas de stratifiés épais avec  $h/a=0,3$  et  $h=15^\circ$ .

**Tableau IV.7:** Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque antisymétrique carrée  $[\theta/-\theta]_5$  pour différentes valeurs du rapport  $h/a$  (Matériau 3).

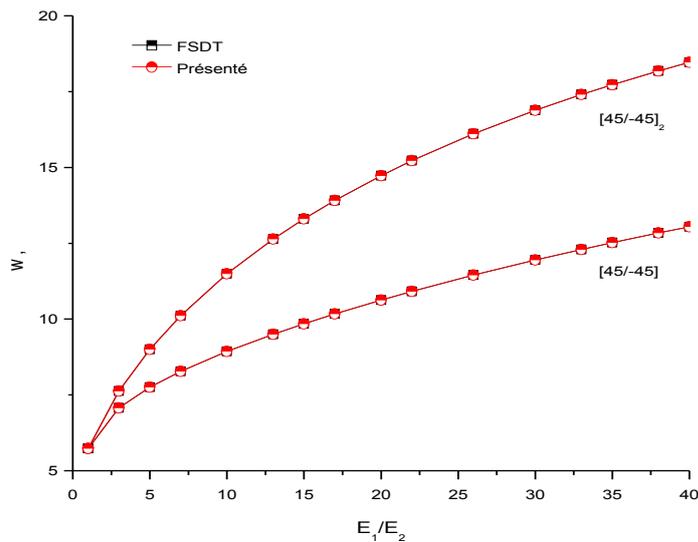
$h/a$	Théories	$\theta$		
		15°	30°	45°
0.01	Exact [72]	13.2800	15.1000	15.9500
	FSDT	13.2767 (-0.02)	15.1033 (0.02)	15.9484 (-0.01)
	Présente	13.2795 (-0.01)	15.1039 (0.03)	15.9484 (-0.01)
0.10	Exact [72]	11.6200	12.9600	13.5100
	FSDT	11.6332 (0.11)	13.0308 (0.55)	13.6140 (0.77)
	Présente	11.8161 (1.69)	13.0695 (0.84)	13.6140 (0.77)
0.15	Exact [72]	10.2400	11.2533	11.6311
	FSDT	10.2581 (0.18)	11.3518 (0.88)	11.7710 (1.20)
	Présente	10.5338 (2.87)	11.4087 (1.38)	11.7710 (1.20)
0.20	Exact [72]	8.9700	9.7225	9.9825
	FSDT	8.9810 (0.12)	9.8279 (1.08)	10.1288 (1.47)
	Présente	9.2965 (3.64)	9.892 (1.74)	10.1288 (1.47)
0.25	Exact [72]	7.8944	8.4576	8.6400
	FSDT	7.8950 (0.01)	8.5547 (1.15)	8.7756 (1.57)
	Présente	8.2107 (4.01)	8.6185 (1.90)	8.7756 (1.57)
0.30	Exact [72]	7.0078	7.4356	7.5667
	FSDT	6.9888 (-0.13)	7.5182 (1.11)	7.6849 (1.56)
	Présente	7.2930 (4.07)	7.5778 (1.91)	7.6849 (1.56)

#### IV.4.2. L'influence de la géométrie et le rapport de rigidité

Le dernier exemple est effectué sur les stratifiés carrés antisymétriques à séquence d'empilement équilibré avec un rapport d'élancement varié de 2 à 100. Dans ce cas le matériau 2 est utilisé. Les fréquences fondamentales adimensionnelles sont données dans le tableau (IV.8). Les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés par Swaminathan et Patil [53] selon la théorie d'ordre élevé HSDT. Un accord étroit est observé entre les résultats pour les différentes valeurs de rapport d'élancement et le rapport d'anisotropie matérielle. En outre, les fréquences fondamentales adimensionnelles obtenues à partir de la présente théorie sont en excellent accord avec celles prédites par la théorie FSDT à cinq variables, comme le montre la figure(IV.11). Il convient de noter que le nombre d'inconnues de la présente théorie n'est que quatre au lieu de cinq dans le cas de la FSDT existante et douze dans le cas de la théorie HSDT [53] (voir tableau (IV.1)). Ainsi, on peut conclure que cette théorie n'est pas seulement précise mais aussi simple pour prédire la réponse des plaques stratifiées.

**Tableau IV.8:** Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque antisymétrique carrée  $[\theta/-\theta]_n$  pour différentes valeurs du rapport  $a/h$  (Matériau 2).

$n$	$E_1/E_2$	Théories	$a/h$						
			2	4	10	20	50	100	
1	3	HSDT [75]	4.5312	6.1223	7.1056	7.3001	7.3583	7.3666	
		Présenté	4.4556	6.0665	7.0700	7.2694	7.3291	7.3378	
	10	HSDT [75]	4.9742	7.2647	8.9893	9.3753	9.4943	9.5123	
		Présenté	4.9316	7.2169	8.9324	9.3173	9.4362	9.4537	
	20	HSDT [75]	5.1817	8.0490	10.6412	11.2975	10.5074	11.5385	
		Présenté	5.2387	8.1185	10.6265	11.2517	11.4511	11.4806	
	30	HSDT [75]	5.2771	8.5212	11.8926	12.8422	13.1566	13.2035	
		Présenté	5.4104	8.7213	11.9456	12.8208	13.1077	13.1505	
	40	HSDT [75]	5.3225	8.8426	12.9115	14.1705	14.6012	14.6668	
		Présenté	5.5205	9.1609	13.0439	14.1790	14.5608	14.6183	
	2	3	HSDT [75]	4.6498	6.4597	7.6339	7.8724	7.9442	7.9545
			Présenté	4.6519	6.4626	7.6293	7.8657	7.9368	7.9472
10		HSDT [75]	4.2061	8.3447	11.4116	12.2294	12.4952	12.5351	
		Présenté	5.3765	8.5634	11.4939	12.2463	12.4881	12.5239	
20		HSDT [75]	5.4140	9.3306	14.4735	16.2570	16.8949	16.9927	
		Présenté	5.6542	9.7575	14.7292	16.3394	16.9008	16.9862	
30		HSDT [75]	5.5079	9.7966	16.4543	19.2323	20.3134	20.4839	
		Présenté	5.7641	10.3391	16.8825	19.3944	20.3361	20.4827	
40		HSDT [75]	5.5674	10.0731	17.8773	21.6229	23.1949	23.4499	
		Présenté	5.8228	10.6839	18.4633	21.8722	23.2368	23.4541	



**Figure IV.11:** Variation de la fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée antisymétrique carrée à pli équilibré  $[45/-45]_n$  en fonction du rapport d'orthotropie ( $E_1/E_2$ ),  $a/h = 10$  (Matériau 2).

#### **IV. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du comportement statique et vibratoire des plaques composites stratifiés antisymétriques à séquences d'empilement croisé et équilibré en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement de premier ordre à quatre variables. Cette théorie a été appliquée avec succès pour étudier ce type des matériaux composites. Les résultats de la flexion des plaques et la distribution des contraintes à travers l'épaisseur des plaques stratifiées, ainsi que les fréquences de vibration libre ont été comparés avec Les résultats de la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre à cinq variables (FSDT) ainsi que d'autres théories évaluées par d'autres chercheurs.

## **Conclusion générale**

## ***Conclusion générale***

L'utilisation des plaques stratifiées comme élément de résistance au choc et vibration est courante dans toutes les filières d'ingénieur en structure: mécanique, aéronautique, aérospatiale, civile, navale, matériel de sport et militaire. Devant ce vaste et important éventail de domaine d'applications, il est aisé de comprendre l'intérêt et la demande urgente de s'impliquer dans l'analyse dynamique et du comportement vibratoire des plaques.

L'objectif assigné à ce modeste travail de mémoire est l'étude du comportement statique et vibratoire, Analytique et numérique des plaques composites stratifiées antisymétriques. A cet effet nous avons proposé une méthode de calcul qui se base sur une nouvelle théorie de déformation du cisaillement de premier (FSDT) à quatre variables pour analyser la flexion et les vibrations libres des plaques composites stratifiées. Les équations de mouvement sont dérivées du principe d'Hamilton et sont résolues d'une manière analytique pour des plaques stratifiées antisymétriques à séquence d'empilement croisé et équilibré, simplement appuyées. La nouvelle théorie est très intéressante, efficace et plus d'avantage que la première théorie FSDT à cinq variables, puisque le nombre d'inconnues et les équations d'équilibre de la présente FSDT sont réduites d'une variable et, par conséquent, rendent la nouvelle théorie simple et efficace à utiliser. Les études de vérification montrent que les prédictions de la présente théorie de déformation du cisaillement FSDT et de la théorie FSDT existante pour les stratifiés antisymétriques à plis croisé et équilibré sont proches les unes des autres. Cela indique que l'utilisation des hypothèses simplifiées dans cette étude a un impact minimal sur la précision des résultats pour le problème considéré, mais elle peut améliorer un paramètre très important, c'est le temps de calcul en raison de la réduction du nombre d'inconnus et les équations de mouvement.



## **Références bibliographiques**

- [1] Bui TQ, Nguyen MN, Zhang C. An efficient meshfree method for vibration analysis of laminated composite plates. *Comput Mech* 2011;48(2):175–93.
- [2] Shojaee S, Valizadeh N, Izadpanah E, Bui T, Vu T-V. Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method. *Compos Struct* 2012;94(5):1677–93.
- [3] Whitney JM, Leissa AW. Analysis of heterogeneous anisotropic plates. *J Appl Mech* 1969;36(2):261–6.
- [4] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J Appl Mech* 1945;12(2):69–72.
- [5] Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J Appl Mech* 1951;18(1):31–8.
- [6] Castellazzi G, Krysl P, Bartoli I. A displacement-based finite element formulation for the analysis of laminated composite plates. *Compos Struct* 2013;95:518–27.
- [7] Cui XY, Liu GR, Li GY. Bending and vibration responses of laminated composite plates using an edge-based smoothing technique. *Eng Anal Bound Elem* 2011;35(6):818–26.
- [8] Ferreira AJM. A formulation of the multiquadric radial basis function method for the analysis of laminated composite plates. *Compos Struct* 2003;59(3):385–92.
- [9] Ferreira AJM, Castro L, Bertoluzza S. A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory. *Compos Struct* 2009;89(3):424–32.
- [10] Ferreira AJM, Fasshauer GE. Analysis of natural frequencies of composite plates by an RBF-pseudospectral method. *Compos Struct* 2007;79(2):202–10.
- [11] Ferreira AJM, Roque CMC, Jorge RMN. Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions. *Comput Meth Appl Mech Eng* 2005;194(39–41):4265–78.

- [12] Ferreira AJM, Roque CMC, Jorge RMN. Natural frequencies of FSDT cross-ply composite shells by multiquadrics. *Compos Struct* 2007;77(3):296–305.
- [13] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 1984;51(4):745–52.
- [14] Xiang S, Jin YX, Bi ZY, Jiang SX, Yang MS. A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Compos Struct* 2011;93(11):2826–32.
- [15] Kant T, Pandya BN. A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates. *Compos Struct* 1988;9(3):215–46.
- [16] Mallikarjuna Kant T. A higher-order theory for free vibration of unsymmetrically laminated composite and sandwich plates-finite element evaluations. *Comput Struct* 1989;32(5):1125–32.
- [17] Kant T, Khare RK. A higher-order facet quadrilateral composite shell element. *Int J Numer Meth Eng* 1997;40(24):4477–99.
- [18] Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 1984;51:745–52.
- [19] Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A higher-order theory of plate deformation, part 2: laminated plates. *J Appl Mech* 1977;44(4):669–76.
- [20] Kant T, Ravichandran R, Pandya B, Mallikarjuna B. Finite element transient dynamic analysis of isotropic and fibre reinforced composite plates using a higher-order theory. *Compos Struct* 1988;9(4):319–42.
- [21] Touratier M. An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 1991;29(8):901–16.
- [22] Zenkour AM. Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermo-mechanical loading. *Compos Struct* 2004;65(3–4):367–79.
- [23] Ferreira AJM, Roque CMC, Jorge RMN. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Comput Struct* 2005;83(27):2225–37.

- [24] Ferreira AJM, Carrera E, Cinefra M, Roque CMC, Polit O. Analysis of laminated shells by a sinusoidal shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations. *Compos Part B: Eng* 2011;42(5):1276–84.
- [25] Soldatos KP. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mech* 1992;94(3):195–220.
- [26] Xiang S, Wang K, Ai Y, Sha Y, Shi H. Analysis of isotropic, sandwich and laminated plates by a meshless method and various shear deformation theories. *Compos Struct* 2009;91(1):31–7.
- [27] Akavci S. Two new hyperbolic shear displacement models for orthotropic laminated composite plates. *Mech Compos Mater* 2010;46(2):215–26.
- [28] Grover N, Maiti DK, Singh BN. A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. *Compos Struct* 2013;95:667–75.
- [29] Karama M, Afaq KS, Mistou S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Int J Solids Struct* 2003;40(6):1525–46.
- [30] Aydogdu M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Compos Struct* 2009;89(1):94–101.
- [31] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higherorder shear deformation theory. *Compos Struct* 2011;94(1):37–49.
- [32] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *Int J Solids Struct* 2012;49(1):43–53.
- [33] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Compos Part B: Eng* 2012;43(3):1489–99.
- [34] Thai HT, Choi DH. A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 2013;101:332–40.

- [35] Leissa AW. Vibration of plates. NASA, SP-160, Office of Technology Utilization, NASA, Washington, DC, 1969.
- [36] Reddy JN., Theory and analysis of elastic plates. Philadelphia, USA: Taylor & Francis, 1999.
- [37] Whitney J.M. et Sun C.T., A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *J. Sound and Vibration*, vol. 30(1), p. 85–97, 1973.
- [38] Reddy J.N., An evaluation of equivalent-single-layer and layer-wise theories of composite laminates. *Composite Structures*, vol. 25, p. 21–35, 1993.
- [39] Reddy J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press, 1997.
- [40] Ambartsumyan S.A., *Theory of Anisotropic Plate*. Economic Publishing Co, 1969.
- [41] Aydogdu M., Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, p. 1740–1755, 2005.
- [42] Robbins DH, Reddy JN., Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, p. 655–77, 1993.
- [43] Robbins DH, Reddy JN., Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layer-wise displacement theory. *Computers & Structures*, 41(2): 65–79, 1991.
- [44] Srinivas S. A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, 30: 495–507, 1973.
- [45] Barbero E, Reddy J, Teply J., An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29: 1–14, 1990.
- [46] Fredrichs K.O. Dressler R.F., A boundary layer theory for elastic plates. *Comm. on Pure Applied Mathematics*, vol. 14, p. 1–33, 1961.

- [47] Goldenveizer A.L., Derivation of an approximate theory of bending of plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity. *Prikl. Mat. Mech.*, vol. 26, no. 4, p. 668–686, 1962.
- [48] Widera O.E., An asymptotic theory for the motion of elastic plates. *Acta Mech.*, vol. 9, p. 54–66, 1970.
- [49] Ladeveze P., Les modèles classiques et leurs extensions pour le calcul des plaques, volume 2 of *Calcul de Structures et Intelligence Artificielle*. Pluralis, 1988.
- [50] Allix O., Modélisation du comportement des composites stratifiés : application à l'analyse du délaminage. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [51] Nguyen V. T., Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.
- [52] Ray MC., Zeroth-order shear deformation theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 2003;70(3):374–80.
- [53] Swaminathan K., Patil S. Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates. *Compos Struct* 2008;82(2):209–16.
- [54] Pagano NJ., Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J Compos Mater* 1970;4(1):20–34.
- [55] Kim SE, Thai HT, Lee J. A two variable refined plate theory for laminated composite plates. *Compos Struct* 2009;89(2):197–205.
- [56] Noor AK, Burton WS. Three-dimensional solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates. *J Appl Mech* 1990;57(1):182–8.
- [57] Thai HT, Kim SE. Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory. *Int J Mech Sci* 2010;52(4):626–33.