

INTRODUCTION

Dans un problème d'optimisation, l'objectif est d'optimiser (**maximiser** ou **minimiser**) une certaine fonction f ; cette fonction est dite **fonction objectif**.

Dans la plupart des problèmes d'optimisation, la fonction objectif dépend de plusieurs variables x_1, \dots, x_n ; ces dernières sont dites **variables de commande** car on peut les contrôler ou les choisir.

La programmation mathématique (théorie d'optimisation, recherche opérationnelle) développe des méthodes pour un choix optimal des variables de commande qui maximisent ou minimisent la fonction objectif, c.à.d. un choix optimal des valeurs de x_1, \dots, x_n . Dans beaucoup de problèmes, le choix des valeurs de x_1, \dots, x_n n'est pas entièrement libre mais il est sujet à un certain nombre de **contraintes**. De ce fait, on trouve une optimisation avec ou sans contraintes.

A- Optimisation sans contraintes :

Si f admet un **extremum** (minimum ou maximum) au point x_s , ceci implique $\nabla f(x_s) = 0$; autrement dit, x_s est un point stationnaire.

Exp. :

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0$ et $x_2 = 0 \Rightarrow x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un extremum.

- $x = x_m$ dans un espace donné est un minimum si $f(x) \geq f(x_m)$ pour tout x .
- $x = x_M$ dans un espace donné est un maximum si $f(x) \leq f(x_M)$ pour tout x .

Notion de minimum local à x_m ; $f(x) \geq f(x_m)$ pour tout x au voisinage de x_m ; à cet effet, il faut satisfaire :

$$|x - x_m| = [(x_1 - X_1)^2 + \dots + (x_n - X_n)^2]^{1/2} < r \quad (r > 0 \text{ très petit}).$$

Méthode de recherche d'un extremum : Souvent, on prend le départ d'un point x_0 donné dans l'espace considéré pour chercher le minimum; à cet effet, il faut suivre la procédure qui suit :

- a) Choix de la direction (généralement) : $-\nabla f(x)$
- b) Exprimer : $z(t) = x - t \nabla f(x)$ (calcul du point de la prochaine itération).
- c) Déterminer : $\bar{g}(t) = f(z(t))$
- d) $\bar{g}'(t) = \frac{d\bar{g}}{dt} = 0$.

Exp. :

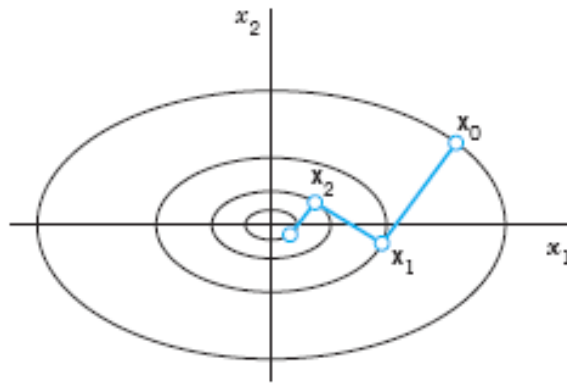
$$f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 \quad x_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad -\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_2} = -6x_2 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad z(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2t)x_1 \\ (1-6t)x_2 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \bar{g}(t) = [(1-2t)x_1]^2 + 3[(1-6t)x_2]^2 = (1-2t)^2 x_1^2 + 3(1-6t)^2 x_2^2$$

$$d) \quad \bar{g}'(t) = 2(1-2t)(-2)x_1^2 + 6(1-6t)(-6)x_2^2 = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{x_1^2 + 9x_2^2}{2x_1^2 + 54x_2^2}$$



n	x		t	$1 - 2t$	$1 - 6t$
0	6.000	3.000	0.210	0.581	-0.258
1	3.484	-0.774	0.310	0.381	-0.857
2	1.327	0.664	0.210	0.581	-0.258
3	0.771	-0.171	0.310	0.381	-0.857
4	0.294	0.147	0.210	0.581	-0.258
5	0.170	-0.038	0.310	0.381	-0.857
6	0.065	0.032			

N. B. : C'est le principe de la méthode du gradient simple.

B- Optimisation avec contraintes :

$$\begin{cases} \text{Max ou Min } f(x) \\ \text{avec} \\ h_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{cases}$$

Si la fonction $f(x) = \sum_i C_i x_i$ est linéaire ainsi que les contraintes $h_i(x)$ sont linéaires ; alors, on est face à un problème de programmation linéaire.

Chapitre I : OPTIMISATION LINEAIRE

I.1. Formulation générale d'un programme linéaire :

Un phénomène économique ou d'organisation fait intervenir un certain nombre de variables (x_1, \dots, x_n) liées par des relations linéaires indépendantes les unes des autres et formant un ensemble ou un système d'équations ou d'inéquations qui sont les contraintes ($h_i(x)$) du phénomène.

On se donne aussi une fonction économique f linéaire des variables (x_1, \dots, x_n) qui vise la maximisation (profit, bénéfice) ou la minimisation (coût, perte) d'un objectif tout en respectant les contraintes.

La fonction f est le résultat de plusieurs effets élémentaires additifs ; ainsi, on peut écrire :

$$f = e_1 + \dots + e_n$$

Les effets (e_1, \dots, e_n) sont supposés proportionnels à leurs causes (x_1, \dots, x_n) ; soit :

$$f(x) = C_1x_1 + \dots + C_nx_n = \sum_{i=1}^n C_i x_i$$

Les contraintes peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{array}{rcccc} a_{11}x_1 & \dots & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \leq & \cdot \\ a_{i1}x_1 & \dots & a_{in}x_n & \leq & b_i \\ \cdot & \dots & \cdot & \leq & \cdot \\ a_{m1}x_1 & \dots & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\ x_i \geq 0 & (i = 1, \dots, n) & & & \end{array}$$

I.2. Exemples de programmes linéaires :

a- Problème de production :

Une entreprise a la faculté de fabriquer sur une machine donnée trois produits différents P1, P2 et P3. Le produit P1 ramène un profit net de 4 Unités Monétaires (UM), le produit P2 de 12 UM et, enfin, P3 de 3 UM. Les rendements de la machine sont respectivement pour les trois produits P1, P2 et P3 : 50, 25 et 75 produits par heure. La capacité de production de la machine est de 45 heures par semaine. On a su grâce à une étude du marché que les possibilités de vente ne dépassent pas : 1000 unités de P1, 500 de P2 et 1500 de P3 par semaine.

On se pose le problème de répartir la capacité de production entre les trois produits de manière à maximiser le profit.

À cet effet, nous allons :

- 1- Formuler le problème d'optimisation.
- 2- Résoudre graphiquement le problème.
- 3- Donner une solution algébrique du problème (Algorithme du Simplexe).

b- Problème de transport :

1- Formulation du problème de transport :

Il s'agit, disposant des quantités b_i d'un certain produit disponibles dans des centres origines i ($i= 1, m$), de les transporter au moindre coût vers les destinations j ($j= 1, n$) pouvant recevoir les quantités a_j du produit. On suppose que le total des quantités reçues par les destinations est égal au total des quantités disponibles aux centres origines et que le coût de transport unitaire C_{ij} de chaque origine à chaque destination est connu. On peut alors dresser le tableau qui suit :

	Destinations j		Quantités disponibles b_i
	1	n	
Centres origines i	1	C_{11} C_{1n}	b_1
	m	C_{m1} C_{mn}	b_m
Quantités reçues a_j	a_1	a_n	$\sum_j a_j = \sum_i b_i$

La solution du problème est formée de l'ensemble des nombres x_{ij} (non négatifs) représentant chacun la quantité de produit à transporter depuis le centre origine i jusqu'à la destination j , et ce au moindre coût.

Le problème de transport peut être formulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) = \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij} \\ \text{avec} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = b_i \quad i = 1, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j \quad j = 1, n \\ \sum_j a_j = \sum_i b_i \end{array} \right.$$

2- Exemple d'un problème de transport :

Soient quatre (04) usines qui disposent des quantités d'un produit respectivement 250, 300, 100 et 450 unités (total = 1100 unités). Le produit doit être livré pour transformation ou vente à six entrepôts 1, 2, 3, 4, 5 et 6 pouvant recevoir respectivement les quantités 200, 150, 350, 100, 200 et 100 unités (total = 1100 unités).

Connaissant le coût de transport C_{ij} d'une unité de produit de l'usine (i) à l'entrepôt (j), on se propose de déterminer le plan de transport entraînant une dépense minimale pour le déplacement des 1100 unités du produit des usines vers les entrepôts.

Les coûts de transport sont reportés dans le tableau qui suit :

	1	2	3	4	5	6
I	4.5	6	4.5	3	4.5	5
II	3.5	1.5	3.5	3.5	2.5	2.5
III	3	2.5	4.5	5.5	1.5	5.5
IV	3	4	5.5	1	1	5

Le problème peut être formulé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) = 4.5 x_{11} + \dots + 5 x_{46} \\ \text{avec} \\ \sum_{j=1}^6 x_{1j} = 250 ; \sum_{j=1}^6 x_{2j} = 300 ; \sum_{j=1}^6 x_{3j} = 100 ; \sum_{j=1}^6 x_{4j} = 450 \\ \sum_{i=1}^4 x_{i1} = 200 ; \sum_{i=1}^4 x_{i2} = 150 ; \sum_{i=1}^4 x_{i3} = 350 ; \\ \sum_{i=1}^4 x_{i4} = 100 ; \sum_{i=1}^4 x_{i5} = 200 ; \sum_{i=1}^4 x_{i6} = 100 \\ \sum_j a_j = \sum_i b_i \end{array} \right.$$

On doit déterminer 24 variables qui minimisent le coût de transport.

Aussi, il existe des méthodes ou règles qui permettent de déterminer une solution proche de la solution optimale ; parmi ces dernières, on retrouve :

- Règle du coin nord-ouest,
- Règle du meilleur coin nord-ouest,
- Méthode de la différence maximale (Balas-Hammer).

Chapitre II : OPTIMISATION NON-LINEAIRE SANS CONTRAINTES

II-1 Rappel de notions mathématiques :

a- **Positivité** : Une matrice symétrique $A = A^T$ est définie positive si et seulement si :

$$x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Une matrice est semi-définie positive : $x^T A x \geq 0 \quad \forall x$

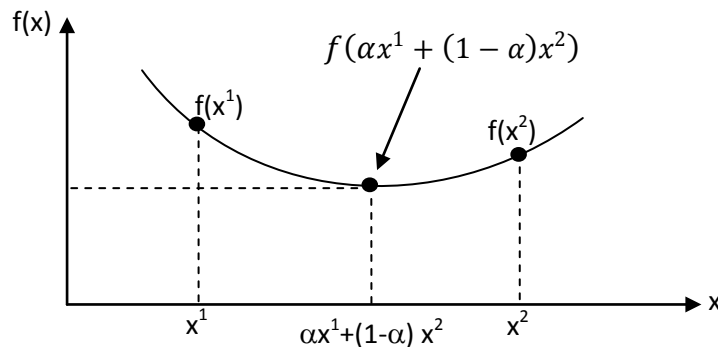
Les propriétés d'une matrice définie positive :

- Les valeurs propres de la matrice sont strictement positives.
- Le déterminant de la matrice est positif.

b- **Convexité** : La fonction f est dite convexe si et seulement si :

$$\forall x^1, x^2 \in \Omega \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (\Omega \text{ est le domaine des solutions})$$

$$f(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) \leq \alpha f(x^1) + (1 - \alpha)f(x^2)$$



c- **Gradient et Hessien** :

Le taux d'accroissement de la fonction est maximal dans la direction du gradient.

$$g(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Le gradient indique la direction de plus grande pente.

$$H(x) = \nabla[\nabla^T f(x)] = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

La matrice hessienne est symétrique par définition.

d- Conditions nécessaires pour un minimum :

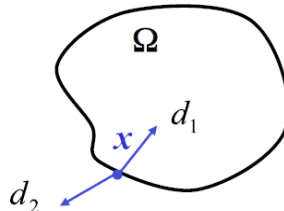
- Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre :

Si la fonction f a un minimum local en x^* ; alors $\forall d$ admissible en x^*

$$d^T g(x^*) \geq 0$$

Une direction d ($d \neq 0$) est dite admissible si :

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } x + \alpha d \in \Omega \quad \forall \alpha \in [0, \eta]$$



d_1 : direction admissible.

d_2 : direction non admissible.

Si x est un point intérieur, alors toutes les directions sont admissibles.

Cas d'un point intérieur :

Si x^* minimise f localement et si x^* est un point intérieur de Ω ; alors :

$$g(x^*) = 0$$

- Conditions nécessaires d'optimalité du second ordre :

La fonction f atteint un minimum local en x^* et d est une direction admissible si :

$$d^T g(x^*) = 0 \text{ alors } d^T H(x^*) d \geq 0.$$

Cas d'un point intérieur :

Si x^* est un point intérieur de Ω et x^* minimise f ; alors :

$$g(x^*) = 0$$

$$H(x^*) \geq 0 \text{ (matrice semi-définie positive)}$$

e- Conditions suffisantes pour un minimum :

Soit x^* un point intérieur de Ω ; si :

$$g(x^*) = 0$$

$$H(x^*) > 0 \text{ (matrice définie positive)}$$

alors f a un minimum local en x^* .

Si f est une fonction convexe, alors x^* est un minimum global de f .

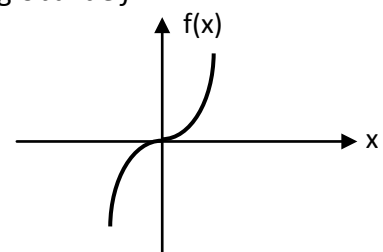
Exp. : Soit la fonction $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 6x \quad f''(0) = 0$$

Les conditions nécessaires sont vérifiées, mais $x^* = 0$

ne minimise pas la fonction f ; donc, la condition suffisante n'est pas vérifiée.



Soit la fonction : $f(x) = x_1^2 - x_2^2$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ Indéfinie (ou non définie positive), les conditions nécessaires du second ordre ne sont pas vérifiées.

Soit la fonction : $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ Définie positive, le point $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un minimum global car la fonction f est convexe.

II-2 Méthodes de recherche unidimensionnelle :

Parmi les principaux algorithmes d'optimisation unidimensionnelle qui constituent l'ingrédient de base des méthodes de programmation non linéaire et conditionnent en partie leur efficacité pratique, on peut citer les suivantes :

- Méthode de Newton-Raphson,
- Méthode de la sécante,
- Méthode de Dichotomie avec et sans dérivées,
- Méthode du nombre d'or,
- Suite de Fibonacci.

1- Méthode de Newton-Raphson :

$$\text{Minimiser } q(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + f''(x_k) \frac{(x - x_k)^2}{2}$$

$$q'(x) = \frac{dq(x)}{dx} = 0 = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k) \text{ et } q''(x) = f''(x_k)$$

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)- } x_0 \text{ point de départ} \\ \text{(b)- Déterminer } x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \text{ à l'itération } k \\ \text{(c)- } k \leftarrow k + 1 \\ \text{Test d'arrêt : si vérifié } \Rightarrow \text{fin ; si non } \Rightarrow \text{retourner en (b).} \end{array} \right.$$

La méthode de Newton-Raphson peut être vue comme une méthode de recherche de zéro d'une fonction $f'(x)$ avec le critère d'arrêt $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$.

2- Méthode de la sécante :

Pour certains problèmes très complexes, un obstacle important se présente dans la mise en œuvre pratique de la méthode de Newton-Raphson pour évaluer à la fois la dérivée première et seconde à chaque itération, ceci nous a conduit à approximer la dérivée seconde par :

$$f''(x_k) \cong \frac{f'(x_k) - f'(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

- (a)- x_0 point de départ
 - (b)- Déterminer $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})} f'(x_k)$ à l'itération k
 - (c)- $k \leftarrow k + 1$
- Test d'arrêt : si vérifié \Rightarrow fin ; si non \Rightarrow retourner en (b).

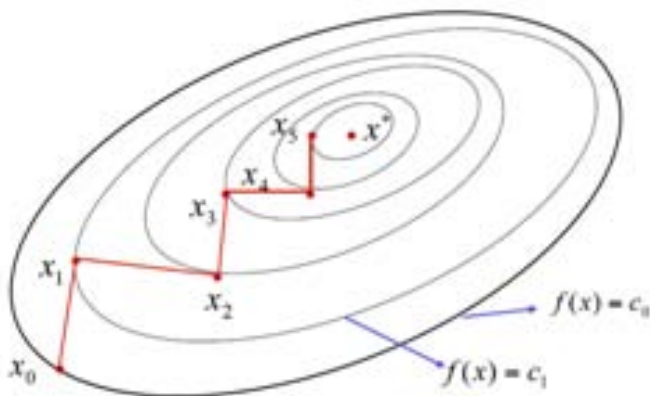
La méthode de la sécante exige deux points de départ ; le critère d'arrêt $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$.

II-3 Méthode du gradient :

$d_k = -\nabla f(x_k)$ indique la direction avec le plus grand taux de décroissance de la fonction f au point x_k .

Algorithme de la plus forte pente :

- (a)- Choisir un point de départ x_0
- (b)- A l'itération k : $d_k = -\nabla f(x_k)$
rechercher t_k : $f(x_k + t_k \times d_k) = \min \{f(x_k + t \times d_k)\}$ Avec : $t \geq 0$
faire : $x_{k+1} = x_k + t_k \times d_k$
- (c)- Test d'arrêt : si vérifié \Rightarrow fin ; si non \Rightarrow faire $k \leftarrow k + 1$ et retourner en (b).



Critères :

- 1° $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon_1$
- 2° $\left| \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{f(x_k)} \right| < \varepsilon_2$
- 3° $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_3$

II-4 Méthode des directions conjuguées :

✓ Soit la fonction quadratique : $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$

Avec : $Q = Q^T > 0$ et $\nabla f(x) = Qx - b \Rightarrow x^* = Q^{-1}b$

- (a)- Choisir un point de départ x_0 ; $d_0 = -\nabla f(x_0)$
 (b)- A l'itération k :
 rechercher t_k : $t_k = -\frac{\nabla f(x_k)^T}{d_k^T Q d_k} d_k$
 faire : $x_{k+1} = x_k + t_k \times d_k$ si $\nabla f(x_{k+1}) = 0 \Rightarrow$ Arrêt
 (c)- $\beta_k = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T Q d_k}{d_k^T Q d_k}$
 (d)- $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k d_k$
 (e)- faire $k \leftarrow k+1$ et retourner en (b).

Exp. : Soit la fonction quadratique : $Min f(x) = 5x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} - 3(x_1 + x_2)$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}; \nabla f(x) = Qx - b = \begin{bmatrix} 10x_1 - 3 \\ x_2 - 3 \end{bmatrix}$$

(a)- Choix du point de départ : $x^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}$; $d_0 = -\nabla f(x_0) = -\begin{pmatrix} -23 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$(b)- \quad t_0 = -\frac{\nabla f(x_0)^T}{d_0^T Q d_0} d_0 = -\frac{\begin{bmatrix} -23 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 23 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{629}{5390} = 0.1167$$

$$x_1 = x_0 + t_0 d_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix} + 0.1167 * \begin{pmatrix} 23 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.684 \\ -5.833 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 3.84 \\ -8.833 \end{pmatrix}$$

$$(c)- \beta_0 = \frac{\nabla f(x_1)^T Q d_0}{d_0^T Q d_0} = \frac{\begin{bmatrix} 3.84 & -8.833 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 23 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix}} = \frac{794.87}{5390} = 0.1475$$

$$(d)- d_1 = -\nabla f(x_1) + \beta_0 d_0 = -\begin{pmatrix} 3.84 \\ -8.833 \end{pmatrix} + 0.1475 * \begin{pmatrix} 23 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4475 \\ 10.308 \end{pmatrix}$$

$$(e)- \quad t_1 = -\frac{\nabla f(x_1)^T}{d_1^T Q d_1} d_1 = -\frac{\begin{bmatrix} 3.84 & -8.833 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4475 \\ 10.308 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -0.4475 & 10.308 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4475 \\ 10.308 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -0.4475 \\ 10.308 \end{bmatrix} = 0.8569$$

$$x_2 = x_1 + t_1 d_1 = \begin{pmatrix} 0.684 \\ -5.833 \end{pmatrix} + 0.8569 * \begin{pmatrix} -0.4475 \\ 10.308 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 3 \end{pmatrix}; \nabla f(x_2) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Arrêt}$$

✓ Si la fonction f **n'est pas quadratique**, on utilise les algorithmes qui suivent :

Algorithme de Fletcher et Reeves :

- (a)- Etape de départ : choisir x_0 point de départ ; $d_0 = -\nabla f(x_0)$
 (b)- Etape k : choisir t_k minimisant $f(x_k + t \times d_k)$
 poser : $x_{k+1} = x_k + t_k \times d_k$
 et : $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k \times d_k$ avec $\beta_k = \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2}$
 (c)- Test d'arrêt : si vérifié \Rightarrow fin ; si non \Rightarrow faire $k \leftarrow k+1$ et retourner en (b).

Algorithme de Davidson-Fletcher-Powell (DFP) :

- (a)- x_0 point de départ admissible intérieur
 H_0 matrice définie positive quelconque (par exemple matrice unité)
- (b)- A l'itération k , déterminer la direction de déplacement

$$d_k = -H_k \times \nabla f(x_k)$$
 Déterminer : x_{k+1} comme minimum de $f(x_k + t \times d_k)$ pour $t \geq 0$
 Poser : $\delta_k = x_{k+1} - x_k$

$$\gamma_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$$
 Calculer :
$$H_{k+1} = H_k + \frac{\delta_k \times \delta_k^T}{\delta_k \times \gamma_k} - \frac{H_k \times \gamma_k \times \gamma_k^T \times H_k}{\gamma_k^T \times H_k \times \gamma_k}$$
- (c)- $k \leftarrow k + 1$; test d'arrêt validé ou retour en (b).

II-5 Méthode de Newton :

$$f(x) \approx q(x) = f(x_k) + (x - x_k)^T \nabla f(x_k) + \frac{1}{2} (x - x_k)^T H(x_k) (x - x_k)$$

$$\nabla q(x) = \nabla f(x_k) + H(x_k)(x - x_k) = 0$$

$$\Rightarrow \text{si } H(x_k) > 0 ;$$

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)$$

$$\checkmark \text{ Soit } f \text{ une fonction quadratique : } f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$$

$$\text{Avec : } Q = Q^T > 0 \text{ et } \nabla f(x) = Qx - b \Rightarrow x^* = Q^{-1}b$$

$$\text{Soit } x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 - Q^{-1}(Q x_0 - b) = Q^{-1}b = x^* \text{ (une seule itération).}$$

$$\checkmark \text{ Si la fonction } f \text{ n'est pas quadratique :}$$

$$\text{Introduire une optimisation unidimensionnelle : } x_{k+1} = x_k - t_k H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k)$$

$$t_k = \arg \min_{t \geq 0} f(x_k - t H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k))$$

II-6 Algorithme de Levenberg-Marquardt :

Combiner Gradient et Newton

$$H_k = H(x_k) + v_k I \quad (v_k : \text{terme de régularisation tel que } H_k > 0)$$

$$x_{k+1} = x_k - t_k H_k^{-1} \nabla f(x_k)$$

$$\text{Soit } x_0, v_0, \nabla f(x_0) \text{ et } H(x_0)$$

$$1- H_k = H(x_k) + v_k I$$

$$2- \text{Si } H_k \text{ n'est pas définie positive } \Rightarrow v_k = c_0 v_k \text{ (avec } c_0 > 1) \Rightarrow 1-$$

$$3- x_{k+1} = x_k - t_k H_k^{-1} \nabla f(x_k)$$

$$4- \text{Calculer } f(x_{k+1})$$

$$5- \text{Si } f(x_{k+1}) \geq f(x_k) \quad v_k = c_1 v_k \text{ (avec } c_1 > 1) \quad x_{k+1} = x_k \Rightarrow 1-$$

$$\text{Si non : } v_{k+1} = v_k / c_2 \text{ (avec } c_2 > 1) \text{ et } k = k + 1 \Rightarrow 1-$$

II-7 Méthode Quasi-Newton :

$H^{-1}(x_k)$ est remplacé par une approximation M_k

$$x_{k+1} = x_k - t_k M_k \nabla f(x_k)$$

Avec : $t_k = \arg \min_{t \geq 0} f(x_k - t M_k \nabla f(x_k))$

Propriété : Si $M_k = M_k^T > 0 \Rightarrow f(x_{k+1}) < f(x_k)$

Condition Quasi-Newton :

$$\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \approx H(x_k)(x_{k+1} - x_k) \approx H(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$$

$$\Rightarrow M_{k+1}(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)) = x_{k+1} - x_k$$

$$M_{k+1} \Delta g_k = \Delta x_k \quad (\Delta \text{ n'est pas le Laplacien}).$$

Formule de correction :

A- Davidson-Fletcher-Powell (DFP)

$$M_{k+1} = M_k + \frac{\Delta x_k \Delta x_k^T}{\Delta x_k^T \Delta g_k} - \frac{M_k \Delta g_k \Delta g_k^T M_k}{\Delta g_k^T M_k \Delta g_k}$$

B- Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)

$$M_{k+1} = M_k + \left(1 + \frac{\Delta g_k^T M_k \Delta g_k}{\Delta g_k^T \Delta x_k}\right) \frac{\Delta x_k \Delta x_k^T}{\Delta x_k^T \Delta g_k} - \frac{M_k \Delta g_k \Delta x_k^T + (M_k \Delta g_k \Delta x_k^T)^T}{\Delta g_k^T \Delta x_k}$$

Exp. : Soit la fonction de Rosenbrock $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} = -400(x_2 - x_1^2)x_1 - 2(1 - x_1) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 200(x_2 - x_1^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1^2 \text{ et } x_1 = 1 ; \text{ donc : } x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour l'application des algorithmes d'optimisation sans contraintes, on prend : $x^0 = \begin{pmatrix} -1.9 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Chapitre III : OPTIMISATION NON-LINEAIRE AVEC CONTRAINTES

III-1 Multiplicateurs de Lagrange et conditions de Karush-Kuhn-Tucker :

Pour le cas où les contraintes sont des contraintes d'égalité, le problème d'optimisation à résoudre peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{avec} \\ h_i(x) = 0 & (i = 1, \dots, m) \end{cases}$$

La recherche d'un point minimum au sens de Kuhn et Tucker revient à résoudre le système de $(n + m)$ équations pour trouver les inconnues (x, λ_i) :

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \times \nabla h_i(x) = 0 \\ \lambda_i \times h_i(x) = 0 & (i = 1, \dots, m) \end{cases}$$

Ces équations sont appelées équations de Karush-Kuhn-Tucker et λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange.

Exp. : Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{avec} \\ h_1(x) = -x_1 + x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - \lambda_1 \\ 2x_2 + \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 h_1(x) = \lambda_1 (-x_1 + x_2 + 1) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système nous permet d'obtenir :

$$x_1 = \lambda_1/2$$

$$x_2 = -\lambda_1/2$$

$$-(\lambda_1/2) + (-\lambda_1/2) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 ; \text{ donc : } x^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Si le problème d'optimisation présente des contraintes d'égalité et d'inégalités, on peut écrire ce qui suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \text{avec} \\ h_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \\ k_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, p) \end{array} \right.$$

Une condition est nécessaire pour que x^* soit un minimum de $f(x)$ est qu'il existe des nombres positifs λ_i et des nombres réels μ_i tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \times \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \mu_i \times \nabla k_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i \times h_i(x^*) = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{array} \right.$$

Le Lagrangien est exprimé par : $L(x, \lambda_i, \mu_i) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \times h_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i \times k_i(x)$

Le problème consiste à écrire : $\nabla L(x^*, \lambda_i, \mu_i) = 0$

III-2 Méthode de pénalité :

Parmi les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation non linéaires avec contraintes, nous avons la méthode de pénalité ou de pénalisation. Cette méthode constitue une famille d'algorithmes particulièrement intéressants du double point de vue de la simplicité de principe et de l'efficacité pratique. Le concept de base de cette méthode est de ramener le problème initial à la résolution d'une suite de problèmes d'optimisation sans contraintes.

Principe général de la méthode de pénalité :

Si on considère le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{avec} \\ h_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{array} \right.$$

Alors, on résout un autre problème d'optimisation sans contraintes exprimé par :

$$\text{Minimiser } \psi(x) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon} \times \alpha(x)$$

Avec $\varepsilon > 0$ et $\alpha(x)$ est la fonction de pénalisation des contraintes définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ \alpha(x) = +\infty & \text{si } x \notin \Omega \end{array} \right.$$

Cette fonction n'a pas de bonnes propriétés mathématiques (notamment la dérivabilité) pour qu'on puisse appliquer les techniques de résolution sans contraintes.

Nous donnons quelques exemples de la fonction de pénalisation pour différentes contraintes :

- Contrainte $h(x) = 0$; la fonction : $\alpha(x) = \|h(x)\|^2$;
- Contrainte $k(x) \leq 0$; la fonction : $\alpha(x) = \|k(x)\|^2$.

L'algorithme de la méthode de pénalité extérieure est donné selon :

Initialisation

$k = 1$

Choisir x^0 et $\varepsilon^1 > 0$

Itération k tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait :

a) Résoudre le problème :

Minimiser $\psi(x_k) = f(x_k) + \frac{1}{\varepsilon_k} \times \alpha(x_k)$

b) $k = k + 1$; prendre $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$.

Il existe essentiellement deux manières de définir la fonction de pénalisation qui donne naissance à deux comportements distincts du processus, soit des solutions successives de problèmes non contraints tendant vers l'optimum du problème contraint par l'extérieur de Ω c'est ce qu'on appelle la méthode de pénalité extérieure ; soit ils tendent vers cet optimum par l'intérieur de Ω c'est la méthode de pénalité intérieure qui est très intéressante pour traiter des problèmes d'optimisation avec contraintes fortement non linéaires.

Principe de la méthode de pénalité intérieure :

Pour ces méthodes, la fonction $\alpha(x)$ est définie dans l'intérieur du domaine admissible Ω de façon qu'elle soit continue et positive et qu'elle tende vers $+\infty$ lorsque x approche de la frontière de Ω ; une telle fonction porte le nom de fonction de barrière parce qu'elle empêche le processus de recherche de sortir du domaine admissible.

La fonction de pénalisation ou de barrière la plus utilisée est la fonction de Carroll définie par :

$$\alpha(x) = -\sum_{j=1}^m \frac{1}{h_j(x)}$$

L'algorithme des méthodes de pénalité intérieure est donné comme suit :

a)- Choisir x_0 admissible intérieur et $\varepsilon^1 > 0$,

b)- A l'itération k , on est au point x_k

Chercher : $\min \psi(x_k, t_k)$ à partir de x_k par une méthode itérative d'optimisation non contrainte

c)- Si $\left| \frac{1}{\varepsilon_k} \times \alpha(x_{k+1}) \right| < \bar{\varepsilon}$ alors x_{k+1} est une bonne approximation de l'optimum

de f et on arrête les calculs ; si non choisir $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$ et retour en (b).

Exp. : Soit le problème d'optimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad Q = a_p \times f \times V_c \quad \text{Avec: } a_p = 3 \\ \text{avec} \\ f \leq 0.4 \\ V_c \leq 220 \\ f^{0.71} \times V_c \leq 166.995 \\ f^{0.5} \times V_c = 80.276 \end{array} \right.$$

Le problème d'optimisation avec contraintes est transformé en un problème de minimisation de la fonction :

$$\psi(f, V_c, t) = -3 \times f \times V_c - \frac{1}{\varepsilon} \times \left[\frac{1}{f - 0.4} + \frac{1}{V_c - 220} + \frac{1}{f^{0.71} \times V_c - 167} + \frac{1}{f^{0.5} \times V_c - 80.276} \right]$$

III-3 Méthode de résolution d'une séquence de problèmes quadratiques (SQP) :

Pour cette méthode, l'idée essentielle consiste à résoudre une succession de problèmes quadratiques avec contraintes. L'algorithme pour la méthode SQP (Sequential Quadratic Programming) est donné comme suit :

Initialisation

$$k = 1$$

Choisir x^0, λ^0 et μ^0

Itération k tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait :

a) Résoudre le problème quadratique :

$$\text{Minimiser } \frac{1}{2} d^T H_k d + \nabla f(x_k)^T d$$

$$\nabla h_i(x_k)^T d + h_i(x_k) = 0$$

$$\nabla k_i(x_k)^T d + k_i(x_k) \leq 0$$

Trouver : d_k, λ^{k+1} et μ^{k+1}

$$x_{k+1} = x_k + d_k$$

b) $k = k + 1$.

Quelques exemples d'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) = -x_1 x_2 x_3 \\ \text{avec} \\ 0 \leq x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 72 \end{array} \right. \quad x^0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

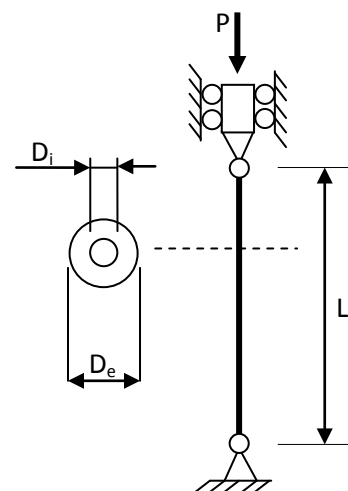
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) = -2x_1 + x_2 \\ \text{avec} \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) = 20x_1 + 10x_2 + 3x_1^2 + 2x_2^2 \\ \text{avec} \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 8 \end{array} \right.$$

Exp. : On considère une colonne tubulaire simplement appuyée où le but sera de chercher le diamètre moyen et l'épaisseur tout en minimisant la masse.

- ✓ **Charge** : Le chargement consiste en une compression axiale par une force $P = 5000 \text{ lbf}$ ($1 \text{ lbf} = 4.448 \text{ N}$).
- ✓ **Paramètres prescrits** : Il s'agit des grandeurs fixées au départ et qui ne devraient pas être altérées par l'algorithme de dimensionnement.

- Longueur $L = 100 \text{ in}$ ($1 \text{ in} = 25.4 \text{ mm}$),



- Module d'Young $E = 10^7 \text{ lbf/in}^2$,
- Masse volumique $\rho = 0.1 \text{ lb/in}^3$ (1 lb = 0.454 kg).

- ✓ **Variables de conception** : Correspondent aux grandeurs qui peuvent être modifiées.
 - Le diamètre moyen $D = (D_i + D_e)/2$,
 - L'épaisseur de la colonne $T = (D_e - D_i)/2$.
- ✓ **Fonction objectif** : Minimiser la masse de la colonne $M = \rho V = \rho \pi DTL$.
- ✓ **Mode de dimensionnement** : Caractéristique associée au comportement de la structure et soumise à la limitation par le concepteur.
 - Un mode de dimensionnement : la contrainte dans la colonne σ .
- ✓ **Restrictions** :

a/ Limitations sur les variables de conception :

$$D \leq D_{max} = 3.5 \text{ in}$$

$$T \geq T_{min} = 0.04 \text{ in}$$

$$\frac{D}{T} \geq 10$$

b/ Limitations sur le mode de dimensionnement :

$$\sigma \leq \sigma_E$$

$$\sigma \leq \sigma_c$$

$$\sigma = \frac{P}{\pi DT}$$

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E (D^2 + T^2)}{8 L^2}$$

$$\sigma_c = \frac{0.4 E T}{D}$$

- ✓ **Formulation du problème d'optimisation :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } M = \rho \pi DTL \\ \text{avec} \\ D \leq 3.5 \\ T \geq 0.04 \\ \frac{D}{T} \geq 10 \\ \sigma_E - \sigma \geq 0 \\ \sigma_c - \sigma \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } M = \rho \pi D T L \\ \text{avec} \\ D \leq 3.5 \\ T \geq 0.04 \\ \frac{D}{T} \geq 10 \\ D^3 T + D T^3 \geq \frac{8 P L^2}{\pi^3 E} \\ T \geq \sqrt{\frac{P}{0.4 \pi E}} \end{array} \right.$$

Déterminer graphiquement et algébriquement la solution du problème d'optimisation avec contraintes.