



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ibn-Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Mécanique



Spécialité : Génie Mécanique

Polycopié de :

Résistance des Matériaux II

Cours et exercices corrigés

Présenté à

L'Université Ibn-Khaldoun de Tiaret

par:

Dr BALTACH Abdelghani

Maître de conférences B

Filière Génie Mécanique

Destiné aux étudiants Licence en Génie

Mécanique

TABLE DE MATIERE

AVANT-PROPOS

CHAPITRE 1 DEPLACEMENT DES POUTRES SYMETRIQUES EN FLEXION PLANE

INTRODUCTION

PRTIE A GENERALITES

1.OBJET DE LA RDM	3
2.CHAMP D'APPLICATION DE LA RDM	3
2.1. CALCUL DE PIECES MECANIQUES	3
2.2. CALCUL DE STRUCTURES	3
3.HYPOTHESES	3
3.1. ELANCEMENT	4
3.2. RAYON DE COURBURE.....	4
3.3. VARIATIONS DE SECTION	4
3.4. RESTRICTIONS DANS LE CADRE DE CE COURS.....	4
4.ACTIONS MECANIQUES	4
5.MATERIAUX.....	5
5.1. MATERIAUX CONTINUS, HOMOGENES ET ISOTROPES.....	5
5.2. ELASTICITE LINEAIRE.....	5
6.DEFORMATION	5
6.1. HYPOTHESE DE PETITES DEFORMATIONS.....	5
6.2. HYPOTHESE DE NAVIER BERNOULLI.....	5
7.CHARGEMENT.....	6
7.1. PRINCIPE DE SAINT-VENANT	6

PRTIE B

DEPLACEMENT DES POUTRES SYMETRIQUES EN FLEXION PLANE

1.DEFINITION.....	7
2.ETUDE DES DEFORMATIONS LONGITUDINALES	7
2.1. ETUDE D'UN TRONÇON EN FLEXION PURE	7
2.2. DEFORMATIONS LONGITUDINALES.....	8
3.ETUDES DES CONTRAINTES NORMALES	8
3.1. EXPRESSION DE LA CONTRAINTE NORMALE EN FLEXION PURE	8
3.2. RELATION AVEC LE MOMENT FLECHISSANT :	9
4.ETUDE DE LA DEFORMEE.....	10
4.1. EXPRESSION.....	10
5.CONTRAINTES TANGENTIELLES	10
5.1. PRINCIPE DE RECIPROCITE.....	10

5.2. CONTRAINTES DE CISAILLEMENT MOYENNES.....	10
5.3. VALEUR DES CONTRAINTES TANGENTIELLES	11
6.DEPLACEMENT DES POUTRES DE SECTION CONSTANTES	11
6.1. METHODES DES PARAMETRES INITIAUX (MACAULAY).....	12
6.1.1 APPLICATION	16
6.2. SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS.....	18
6.2.1. PRINCIPE DE SUPERPOSITION:.....	19
6.2.2. LIMITES DU THEOREME DE SUPERPOSITION:.....	19
6.2.3 APPLICATION	19
6.3 METHODES DES MOMENTS D'AIRES	21
6.3.1 THEOREMES	21
6.3.2 APPLICATION	24

CHAPITRE 2 THEOREMES GENERAUX DES SYSTEMES ELASTIQUES

INTRODUCTION

1.DEFORMATION DES STRUCTURES ELASTIQUES:	27
1.1 NOTIONS DE TRAVAIL ET DE TRAVAIL COMPLEMENTAIRE:.....	27
1.2 ÉNERGIE ET ENERGIE COMPLEMENTAIRE DE DEFORMATION:	28
2.TRAVAIL ET ENERGIE DANS LE DOMAINE ELASTIQUE LINEAIRE:.....	29
2.1 TRAVAIL D'UNE FORCE:.....	29
2.2 GENERALISATION:	30
2.3 ÉNERGIE POTENTIELLE DE DEFORMATION:.....	30
3.TRAVAIL DE DEFORMATION DES SOLLICITATIONS SIMPLES DANS LE CAS DES POUTRES:.....	31
3.1 EFFORT NORMAL:	31
3.2 MOMENT FLECHISSANT:.....	32
3.3 EFFORT TRANCHANT:.....	33
3.4 MOMENT DE TORSION:	33
4.EXPRESSION GENERALE DE L'ENERGIE POTENTIELLE DE DEFORMATION:.....	34
5.THEOREME DE CASTIGLIANO:	35
5.1 PREMIERE FORME DU THEOREME:	35
6.APPLICATIONS :	36

CHAPITRE 3 SOLLICITATIONS COMPOSEES

GENERALITES	40
1.FLEXION DEVIEE	40
1.1 CONTRAINTE NORMALE	41
1.2 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT.....	42
1.3 CALCUL A LA RESISTANCE	42
1.4 CALCUL A LA RIGIDITE :	43
1.5 APPLICATION :	43
2.FLEXION COMPOSEE	48
2.1 CONTRAINTE NORMALE	49
Equation de l'axe neutre	49
2.2 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT.....	50
2.3 CALCUL A LA RESISTANCE	50

2.4 CALCUL A LA RIGIDITE :	50
2.5 APPLICATION :	51
3.FLEXION-TORSION.....	57
3.1 CONTRAINTE NORMALE	57
3.2 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT.....	58
3.3 CALCUL A LA RESISTANCE	58
3.4 APPLICATION :	59

CHAPITRE 4 RESOLUTION DES SYSTEMES HYPERSTATIQUES

INTRODUCTION	62
1.CALCUL DU DEGRE D'HYPERSTATICITE :	62
1.1 RAISONNEMENT SUR APPUIS:.....	62
1.2 RAISONNEMENT SUR TRAVEE:	63
2.METHODE DES FORCES (OU DES COUPURES).....	63
2.1 DEFINITIONS	63
2.2 COEFFICIENTS DE FLEXIBILITE	65
2.3 EQUATION GENERALE DE LA METHODE DES FORCES	67
2.4 DETERMINATION NUMERIQUE DES COEFFICIENTS DE FLEXIBILITE	69
2.5 APPLICATION :	70

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AVANT-PROPOS

Le présent ouvrage est un cours de résistance des matériaux II (RDM02) adressé essentiellement aux étudiants de 3^{ème} année licence (LMD) de la filière Génie Mécanique et à d'autres spécialités éventuellement. Ce polycopié est élaboré dans le but de faciliter à l'étudiant l'assimilation et la compréhension des cours dispensés.

Ce cours s'articule autour de quatre chapitres. Le premier chapitre est divisé en deux parties ; la première concerne une introduction générale à la RDM ; où sont exposés : le but, les pièces étudiées, les hypothèses considérées dans le calcul des éléments de construction, ainsi que quelques généralités sur la RDM.

La deuxième partie est dédiée à l'étude du déplacement des poutres symétriques en flexion plane. Trois méthodes de calcul de la flèche et de la rotation sont proposées : la méthode de la double intégration, la méthode des paramètres initiaux et la méthode des Moments d'aires.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de théorèmes généraux des systèmes élastiques basées sur l'énergie de déformation élastique des corps en traction, torsion, cisaillement et flexion avec des applications; dont le but d'utiliser ces théorèmes pour la détermination de la flèche et de la pente.

Le troisième chapitre, est étudié des sollicitations composées tel que la flexion déviée, la flexion composée et la flexion torsion. Dans cette partie, sont déterminées les contraintes normales et tangentielles dus à la sollicitation composée.

Enfin, le dernier chapitre concerne la résolution des systèmes hyperstatiques ; à savoir la détermination des réactions d'appuis par la méthode des forces.

Ayant la théorie, les étudiants pourront se référer aux principales questions qui sont illustrées par des exemples et des applications simples qui, toutefois, sont traités d'une manière détaillée.

CHAPITRE 1 DEPLACEMENT DES POUTRES SYMETRIQUES EN FLEXION PLANE

INTRODUCTION

De façon générale, la mécanique est l'étude des effets d'actions extérieures sur des solides et fluides (étude dynamique du mouvement d'un pendule : mécanique des solides rigides). Dans ce chapitre ; on commence par la définition de la résistance des matériaux

La résistance des matériaux est l'étude des déformations, déplacements et contraintes d'objets de forme simple. Dans la cadre de ce cours, des poutres, et en mécanique des solides déformables, on étudie, les déplacements relatifs entre points d'un solide (notion de déformations) et les efforts intérieurs associés (notion de contraintes).

Ce chapitre est divisé en deux parties ;

La première présente un rappel sur la résistance des matériaux ; où sont exposés : le but, les pièces étudiées, les types de chargement, les hypothèses considérées dans le calcul des éléments de construction.

La deuxième partie est dédiée à l'étude la flexion simple. Dans cette partie, sont déterminés les efforts intérieurs dus à la flexion, à savoir : le moment fléchissant et l'effort tranchant, les contraintes normales et tangentielles ; ainsi que les méthodes utilisées pour la détermination de la flèche et de la rotation.

PRTIE A

GENERALITES

1. OBJET DE LA RDM

L'objectif est de déterminer, par le calcul, des pièces de machine, des éléments de structures :

- Dimensionner ces pièces (objectifs d'économie)
- Vérifier leur tenue mécanique (déformations / contraintes limites imposées)

Elle est issue de la théorie, plus générale, de la Mécanique des Milieux Continus.

2. CHAMP D'APPLICATION DE LA RDM

Il traite non seulement les méthodes d'ingénieurs employées pour le calcul de la capacité des structures et de ses éléments à supporter les charges qui leurs sont appliquées sans se détruire, ou se déformer appréciablement, mais aussi à présenter les critères de base pour la conception des structures (forme, dimensions,...) et l'utilisation des matériaux dans les meilleurs conditions de sécurité et d'économie.

2.1. CALCUL DE PIECES MECANIQUES

- Arbres de transmission

2.2. CALCUL DE STRUCTURES

- Bâtiments, charpentes, structures métalliques...
- Ouvrages de génie civil...
- Squelette structural de systèmes divers

3. HYPOTHESES

Les principales hypothèses de la résistance des matériaux sont les suivantes:

3.1. ELANCEMENT

Les Dimensions transversales de la poutre sont petites devant les dimensions longitudinales.

Remarque :

Sinon, on utilise d'autres théories : plaques et coques, ou élasticité pour résoudre le problème.

3.2. RAYON DE COURBURE

Les rayons de courbures doivent être limités.

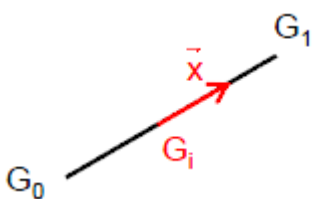
3.3. VARIATIONS DE SECTION

Les variations de section doivent être lentes et continues.

3.4. RESTRICTIONS DANS LE CADRE DE CE COURS

- Poutres droites et problèmes dans le plan.
- Section constante.
- Sections droites symétriques avec un plan de symétrie.
- Conclusion : poutre définie par :

une ligne moyenne



une section droite

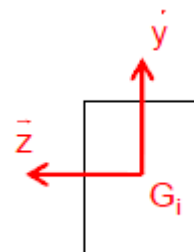
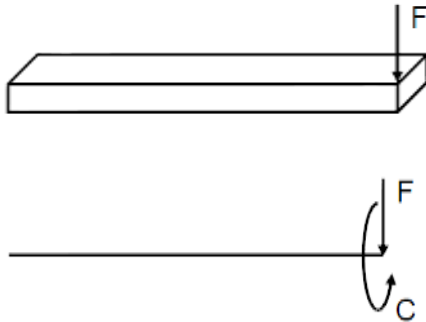


Figure 1.1 Sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation.

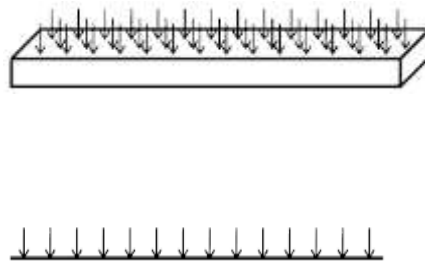
4. ACTIONS MECANIQUES

Deux types d'actions mécaniques :

- Localisées



- Réparties



- Le chargement doit être ramené au niveau de la ligne moyenne.

Figure 1.2 Actions mécaniques

5. MATERIAUX

Le matériau est supposé :

5.2. ELASTICITE LINEAIRE

On suppose admet qu'en chaque point contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initiale.

6. DEFORMATION

Les déformations sont proportionnelles aux contraintes.

6.1. HYPOTHESE DE PETITES DEFORMATIONS

On ne considère que la zone de comportement élastique des matériaux

- Les déformations et déplacements restent petits.
- Les calculs se font à partir de la structure non déformée.

6.2. HYPOTHESE DE NAVIER BERNOULLI

Les sections droites et planes restent droites et planes après déformation : la ligne moyenne se déforme mais les sections droites sont « rigides ».

7. CHARGEMENT

On simplifie les calculs de résistance en appliquant un principe énoncé par Adhémar Barré, comte de Saint-Venant et souvent vérifié expérimentalement.

7.1. PRINCIPE DE SAINT-VENANT

Les contraintes et les déformations dans une section droite éloignée des points d'application d'un système de forces ne dépendent que de la résultante et du moment résultant au centre de gravité de la section associés à ce système de forces

Conséquence

- Les résultats de la RDM sont valables loin des points d'application des forces.
- Quel que soit la nature d'un système de force, seul le torseur résultant au centre de gravité de la section détermine l'état de celle-ci.

En pratique

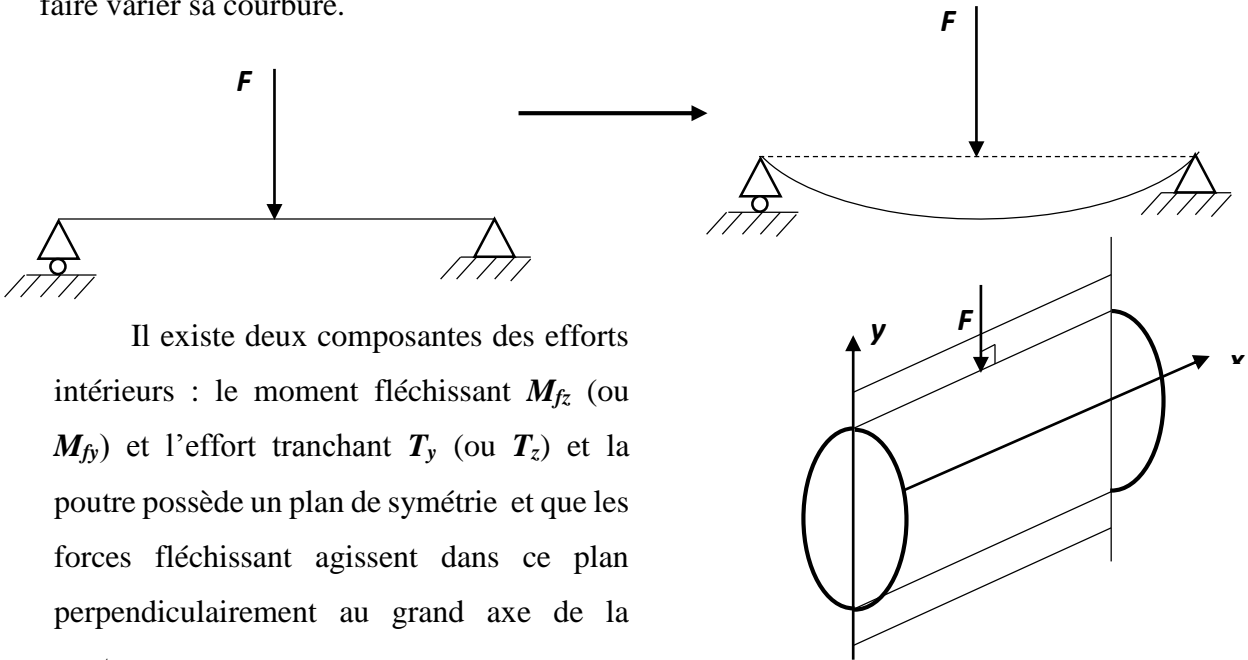
- On considère qu'au-delà de 2-3 fois de la plus grande dimension transverse, résultats valables.

PRTIE B

DEPLACEMENT DES POUTRES SYMETRIQUES EN FLEXION PLANE

1. DEFINITION

Une poutre est soumise à la flexion lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa courbure.



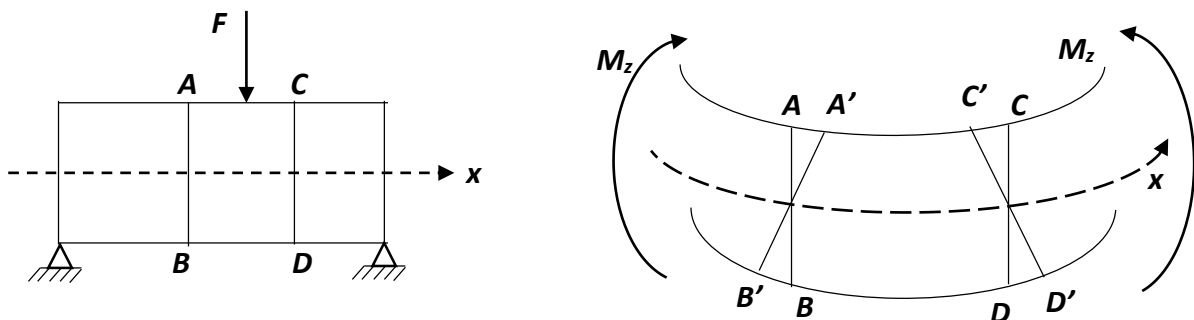
Il existe deux composantes des efforts intérieurs : le moment fléchissant M_{fz} (ou M_{fy}) et l'effort tranchant T_y (ou T_z) et la poutre possède un plan de symétrie et que les forces fléchissant agissent dans ce plan perpendiculairement au grand axe de la poutre.

Figure 1.3 Flexion simple

2. ETUDE DES DEFORMATIONS LONGITUDINALES

La figure 1.4 montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi.

2.1. ETUDE D'UN TRONÇON EN FLEXION PURE



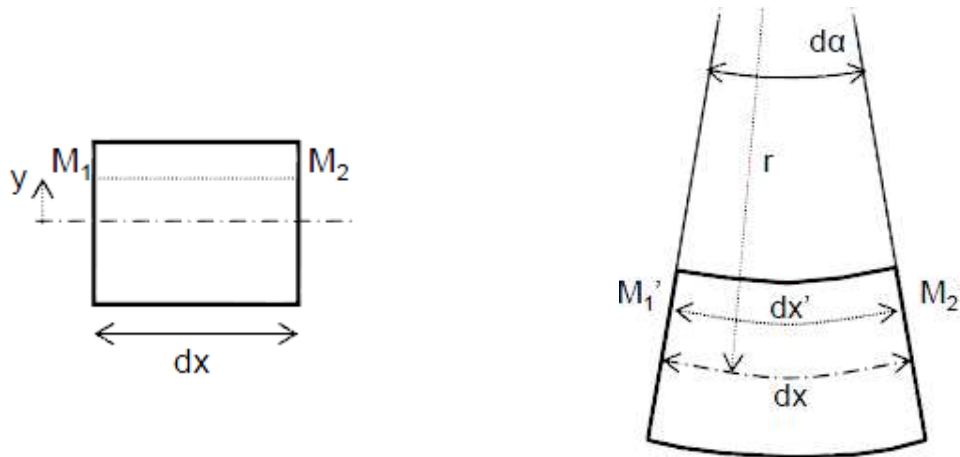


Figure 1.4 Géométrie de la déformation d'une poutre en flexion pure ($M > 0$)

2.2. DEFORMATIONS LONGITUDINALES

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x(y) &= \frac{dx' - dx}{dx} \\ d\alpha &= \frac{dx}{r} = \frac{dx'}{r-y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon_x(y) = \frac{r-y}{r} - 1 = -\frac{y}{r} \dots\dots\dots(1.1)$$

On peut l'écrire de la manière suivante :

$$\varepsilon_x(x, y) = -\frac{y}{r(x)} = -y \frac{d\alpha}{dx} \dots\dots\dots(1.2)$$

On retrouve l'intuition (et les constats expérimentaux) :

- 1/ a) Les fibres à $y > 0$ se raccourcissent, elles sont comprimées ($\varepsilon_x < 0$).
- b) Les fibres à $y < 0$ s'allongent, elles sont tendues ($\varepsilon_x > 0$).
- c) La fibre neutre ne subit pas de contraintes normales.
- 2/ Les variations de longueur entre fibres entraînent aussi des glissements (cisaillement).

3. ETUDES DES CONTRAINTES NORMALES

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant.

3.1. EXPRESSION DE LA CONTRAINTE NORMALE EN FLEXION PURE

D'après la loi de Hooke :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -E \frac{y}{r} \dots \dots \dots (1.3)$$

Remarque :

Répartition linéaire des contraintes normales dans la section droite

Tension / compression de part et d'autre de la ligne moyenne.

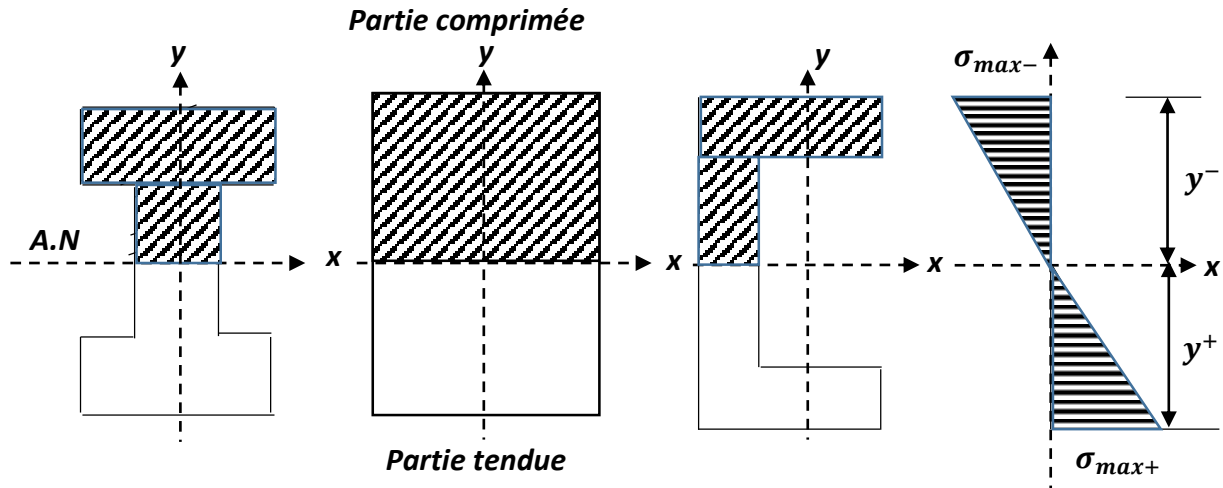


Figure 1.5 Partie comprimée et tendue de sections ayant un axe de symétrie horizontal

3.2. RELATION AVEC LE MOMENT FLECHISSANT :

On introduit les relations précédentes dans la relation générale $M_{fz} = f(\sigma_x)$

$$\begin{aligned} M_{fz} &= - \int_s y \cdot \sigma_x \cdot ds \\ &= \int_s y^2 \cdot E \cdot \frac{d\alpha}{dx} \cdot ds = E \cdot \frac{d\alpha}{dx} \cdot \int_s y^2 \cdot ds = - \frac{\sigma_x}{y} \cdot \int_s y^2 \cdot ds \dots \dots \dots (1.4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_x(x, y) = - \frac{M_{fz}(x) \cdot y}{\int_s y^2 \cdot ds} = - \frac{M_{fz}(x)}{I_{GZ}(s)} \cdot y$$

Avec : $\iint_{(s)} y^2 \cdot ds = I_{GZ}(s) \dots \dots \dots (1.5)$

I_{GZ} : moment quadratique de la section (S) par rapport à (G,Z)

Cette formule nous permet de déterminer les contraintes normales en tout point de la poutre, selon le moment fléchissant. La répartition linéaire des contraintes normales et les contraintes maximales seront situées à y_{max} ou y_{min}

Si section symétrique, elles sont à y_{max} et y_{min} :

$$\sigma_{x \max} = - \frac{M_{fz}}{I_{GZ}} \cdot y_{\max} \dots \dots \dots (1.6)$$

4. ETUDE DE LA DEFORMEE

Sous les actions de flexion, la ligne moyenne se déforme. On appelle déformée, l'équation $v(x)$ de la courbe de la ligne moyenne. La valeur de la déformée en un point est appelée flèche.

4.1. EXPRESSION

$$V'(x) = \tan(\alpha) \Rightarrow V'(x) = \alpha(x) \dots \dots \dots (1.7)$$

Par suite :

$$V''(x) = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{M_{fz}(x)}{E.I_{Gz}} \dots \dots \dots (1.8)$$

Equation de la déformée

Par intégration, et avec les conditions aux limites, on obtient la déformée $V(x)$

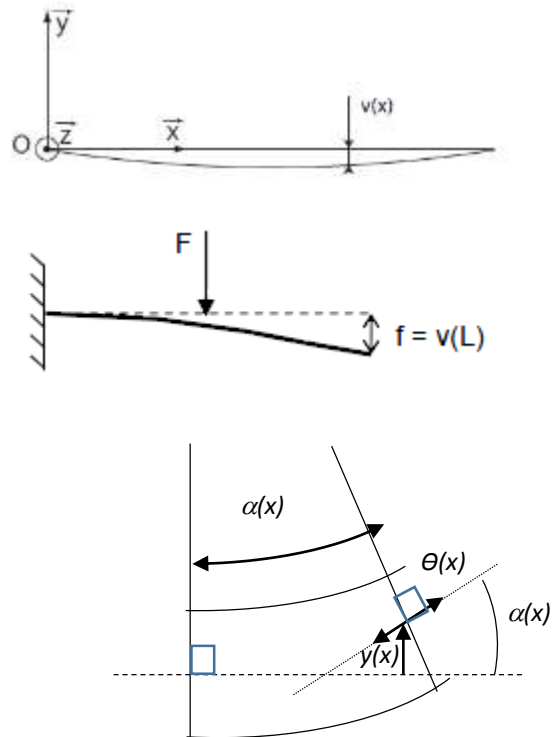


Figure 1.6 Courbure et rayon de courbure

5. CONTRAINTES TANGENTIELLES (LIEES A T_Y)

5.1. PRINCIPE DE RECIPROCITE

Equilibre (PFS) du volume élémentaire

$$dv \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \dots \dots \dots (1.9)$$

Cisaillement transversal ↔ cisaillement longitudinal

5.2. CONTRAINTES DE CISAILLEMENT MOYENNES

$$T_y(x) = \iint_{(s)} \tau_{xy} \cdot ds = \tau_{xyMOY} = \frac{T_y(x)}{s} \dots \dots \dots (1.10)$$

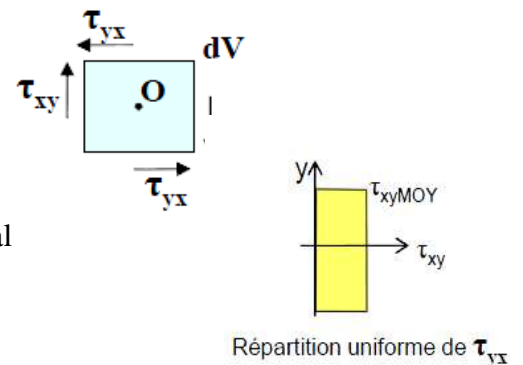


Figure 1.7 Contraintes de cisaillement moyennes au niveau des sections droites

5.3. VALEUR DES CONTRAINTES TANGENTIELLES

Isolons une portion de poutre (section élémentaire)

CONTRAINTES SUR LA PORTION GRISE

Sur S_1 : $\sigma_1 = \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y$ et $\tau_1(y)$ (1.11)

Sur S_2 : $\sigma_2 = -\frac{M_{fz} + dM_{fz}}{I_{Gz}} \cdot y$ et $-\tau_1(y)$ (1.12)

Sur S_3 : $\tau(y)$

Par la projection sur x

$|\tau(y)| = \frac{T_y \cdot A(y)}{I_{Gz} \cdot b(y)}$ où $A(y) = \int_{S_1} y \cdot ds$ (1.13)

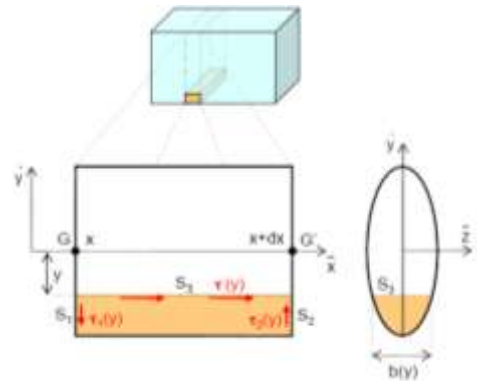


Figure 1.8 Contraintes dans une section fléchie

Remarques

- $A(y)$ s'appelle le moment statique de S_1 par rapport à l'axe z .
- Cette expression permet d'avoir une meilleure approximation de τ dans la section droite.

En particulier, on retrouve une contrainte nulle sur les faces supérieures et inférieures.

Ordre de grandeur contraintes normales / contraintes tangentielles

On peut montrer que : $\frac{o(\tau)}{o(\sigma)} = \frac{a}{l}$ (1.14)

- Le rapport d'ordre de grandeur des contraintes tangentielle/normale correspond à L 'élancement de la poutre a/l .
- Compte tenu de l'hypothèse sur l'élancement, seules les contraintes normales sont dimensionnantes en flexion.

6. DEPLACEMENT DES POUTRES DE SECTION CONSTANTES

Plusieurs méthodes sont utilisées pour la détermination de la flèche et de la rotation ; parmi les méthodes les plus utilisées : la méthode double intégration ; la méthode des paramètres initiaux ; la méthode de superposition des déformations et la méthode des moments d'aire. Donc dans cette partie, on commence par la méthode des paramètres initiaux :

6.1. METHODES DES PARAMETRES INITIAUX (MACAULAY)

Soit la poutre bi-articulée de section constante représentée à la figure 2.5. Les charges appliquées divisent la poutre en cinq tronçons et une application directe de la méthode d'intégration conduirait à la détermination de dix constantes d'intégration.

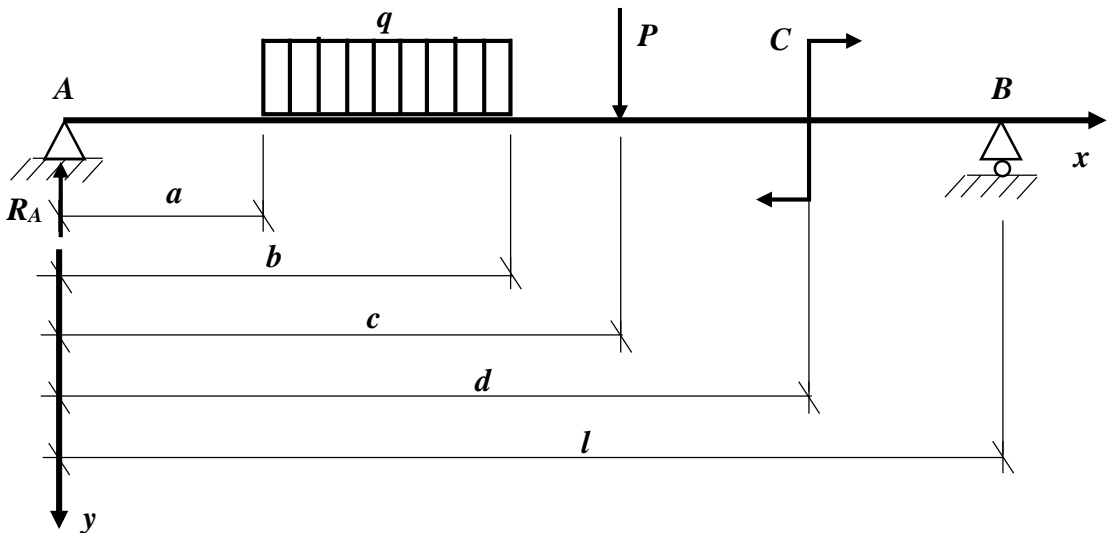


Figure 1.9 Poutre bi-articulée de section constante.

La méthode de Clebsch permet, grâce à un artifice de calcul, de réduire les constantes à deux seulement, et ce quel que soit le nombre de tronçons. D'autre part, la méthode fournit une expression unique de la déformée, valable pour tous les tronçons. L'expression de la rotation s'obtient naturellement par dérivation de la fonction de la déformée.

L'originalité de la méthode vient de sa présentation particulière des calculs. L'idée essentielle de la méthode consiste à écrire l'expression du moment sur un tronçon en ajoutant de nouveaux termes (au moins un terme) à l'expression du moment sur le tronçon précédent en gardant la même origine des abscisses x (voir règle 1).

Appliquons cet artifice à l'exemple considéré. Ecrivons pour chaque tronçon l'expression du moment, l'équation différentielle de l'élastique puis effectuons les deux dérivations successives.

1^{ère} règle : Elle consiste à placer l'origine des coordonnées x, y au centre de gravité d'une section extrême de la poutre, l'extrémité gauche par exemple.

- Tronçon 1 : $0 \leq x \leq a$

$$M_z = R_A \cdot x$$

$$M_z = R_A \cdot x$$

$$EI_z y'' = -R_A \cdot x$$

$$EI_z y' = -R_A \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EI_z y = -R_A \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + D_1$$

En faisant $x = 0$ dans les deux dernières expressions, on obtient :

$$C_1 = EI_z \cdot y'_0 = EI_z \cdot \theta_0$$

$$D_1 = EI_z \cdot y_0 = EI_z \cdot y_0$$

Autrement dit, C_1 et D_1 représentent respectivement la rotation et la flèche, multipliées par la rigidité flexionnelle de la poutre (EI_z), de la section initiale.

- Tronçon 2 $a \leq x \leq b$

$$M_z = R_A \cdot x - \frac{q}{2} \cdot (x - a)^2$$

$$EI_z y'' = -R_A \cdot x + \frac{q}{2} \cdot (x - a)^2$$

$$EI_z y' = -R_A \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q}{6} (x - a)^3 + C_2$$

$$EI_z y = -R_A \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{q}{24} (x - a)^4 + C_2 \cdot x + D_2$$

En faisant $x = a$ dans les deux dernières équations, on en déduit que : $C_2 = C_1$ et $D_2 = D_1$.

- Tronçon 3 $b \leq x \leq c$

2^{ème} règle : On suppose la charge répartie appliquée sur tout le reste de la poutre et on applique une charge égale et opposée pour équilibrer la charge ajoutée (cet artifice permet d'avoir des expressions générales valables sur toute la longueur de la poutre).

$$M_z = R_A \cdot x - \frac{q}{2} \cdot (x-a)^2 + \frac{q}{2} \cdot (x-b)^2$$

$$EI_z y'' = -R_A \cdot x + \frac{q}{2} \cdot (x-a)^2 - \frac{q}{2} \cdot (x-b)^2$$

$$EI_z y' = -R_A \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q}{6} (x-a)^3 - \frac{q}{6} (x-b)^3 + C_3$$

$$EI_z y = -R_A \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{q}{24} (x-a)^4 - \frac{q}{24} (x-b)^4 + C_3 \cdot x + D_3$$

En comparant les flèches et les rotations dans la section de jonction $x = b$, on trouve : $C_3 = C_2$ et $D_3 = D_2$.

• Tronçon 4 $c \leq x \leq d$

$$M_z = R_A \cdot x - \frac{q}{2} \cdot (x-a)^2 + \frac{q}{2} \cdot (x-b)^2 - P(x-c)$$

$$EI_z y'' = -R_A \cdot x + \frac{q}{2} \cdot (x-a)^2 - \frac{q}{2} \cdot (x-b)^2 + P(x-c)$$

$$EI_z y' = -R_A \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q}{6} (x-a)^3 - \frac{q}{6} (x-b)^3 + \frac{P}{2} (x-c)^2 + C_4$$

$$EI_z y = -R_A \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{q}{24} (x-a)^4 - \frac{q}{24} (x-b)^4 + \frac{P}{6} (x-c)^3 + C_4 \cdot x + D_4$$

En comparant de nouveau les flèches et les rotations à gauche et à droite de la section $x = c$, on montre que : $C_4 = C_3$ et $D_4 = D_3$.

• Tronçon 5 $d \leq x \leq l$

3^{ème} règle : On multiplie le couple concentré par $(x-d)^0$ afin de marquer la section où commence son influence et pour garder aux expressions leur généralité.

$$M_z = R_A \cdot x - \frac{q}{2} \cdot (x-a)^2 + \frac{q}{2} \cdot (x-b)^2 - P(x-c) + C \cdot (x-d)^0$$

$$EI_z y'' = -R_A \cdot x + \frac{q}{2} \cdot (x-a)^2 - \frac{q}{2} \cdot (x-b)^2 + P(x-c) - C \cdot (x-d)^0$$

$$EI_z y' = -R_A \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{q}{6} (x-a)^3 - \frac{q}{6} (x-b)^3 + \frac{P}{2} (x-c)^2 - C \cdot (x-d) + C_5$$

$$EI_z y = -R_A \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{q}{24} (x-a)^4 - \frac{q}{24} (x-b)^4 + \frac{P}{6} (x-c)^3 - C \cdot (x-d)^2 + C_5 \cdot x + D_5$$

En comparant encore une fois les rotations et les flèches dans la section de jonction ($x = d$), obtenues à l'aide des relations valables sur les tronçons 4 et 5, on montre que : $C_5 = C_4$ et $D_5 = D_4$.

Ainsi, on démontre qu'il n'y a en définitive que deux constantes d'intégration pour toute la poutre :

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = EI_z \cdot y'_0 = EI_z \cdot \theta_0$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = EI_z \cdot y_0$$

Ces deux constantes caractérisent les déplacements (rotation et flèche) de la section initiale de la poutre, d'où leur désignation par paramètres initiaux. Elles sont déterminées à partir des conditions d'appui de la poutre considérée. Dans un appui simple ou double la flèche est nulle, $f = 0$, tandis que dans un encastrement on a : $f = \theta = 0$.

On peut réduire à quatre le nombre total des équations en adoptant le mode d'écriture suivant :

$$\begin{array}{l}
 M_z = R_A \cdot x \left| \begin{array}{c} x < a \\ -\frac{q}{2} \cdot (x-a)^2 \\ +\frac{q}{2} \cdot (x-b)^2 \\ -P \cdot (x-c) \\ +C \cdot (x-d)^0 \end{array} \right. \\
 EI_z y'' = -R_A \cdot x \left| \begin{array}{c} x < a \\ +\frac{q}{2} \cdot (x-a)^2 \\ -\frac{q}{2} \cdot (x-b)^2 \\ +P \cdot (x-c)^2 \\ -C \cdot (x-d)^0 \end{array} \right. \\
 EI_z y' = EI_z \theta_0 - R_A \cdot \frac{x^2}{2} \left| \begin{array}{c} x < a \\ +\frac{q}{6} \cdot (x-a)^3 \\ -\frac{q}{6} \cdot (x-b)^3 \\ +\frac{P}{2} \cdot (x-c)^2 \\ -C \cdot (x-d) \end{array} \right. \\
 EI_z y = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 \cdot x - R_A \cdot \frac{x^3}{6} \left| \begin{array}{c} x < a \\ +\frac{q}{24} \cdot (x-a)^4 \\ -\frac{q}{24} \cdot (x-b)^4 \\ +\frac{P}{6} \cdot (x-c)^3 \\ -\frac{C}{2} \cdot (x-c)^2 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Pour calculer une grandeur (M_z , y'' , y' ou y) sur un tronçon donné, il faut considérer uniquement les termes à gauche de la limite du tronçon étudié.

Dans l'exemple traité, les conditions aux limites s'écrivent : $y = 0$ en $x = 0$ et en $x = l$. La première condition donne $f_0 = 0$ et à partir de la seconde on tire la valeur de θ_0 . Les expressions de $y(x)$ et $\theta(x)$ sont données par les équations :

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \sum P \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(x-c)^3}{3!} + \sum q_d \frac{(x-d)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} + \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \dots \dots \dots (1.15)$$

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\theta_0 \cdot x + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} + \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \sum q'_c \frac{(x-c)^5}{5!} + \sum q'_d \frac{(x-d)^5}{5!} + \dots \dots \dots (1.16)$$

Où :

M : moments concentrés extérieurs ou à l'encastrement

a : distance entre l'origine des coordonnées et les points d'application des moments M

p : les forces concentrées y compris les réactions

b : distances entre l'origine des coordonnées et les points d'application des forces P

q_c, q_d : respectivement, les intensités au début et à la fin de la charge répartie

q'_c, q'_d : respectivement, les valeurs des dérivées de q aux points $x = c$ et $x = d$

Les directions des charges sont positives comme indiquées ci-dessous :

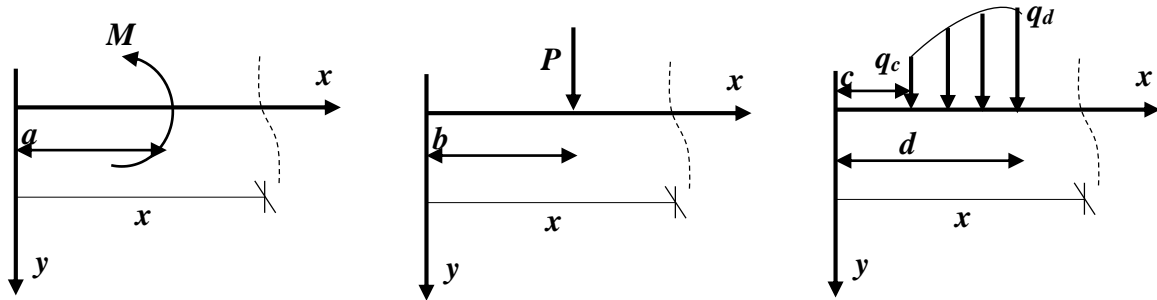


Figure 1.10 Directions des charges positives

Les deux paramètres initiaux y_0 et θ_0 sont déterminés par les conditions d'appui de la poutre.

6.1.1 APPLICATION

Déterminer la flèche maximale et les rotations aux appuis de la poutre représentée sur la figure ci-dessous.

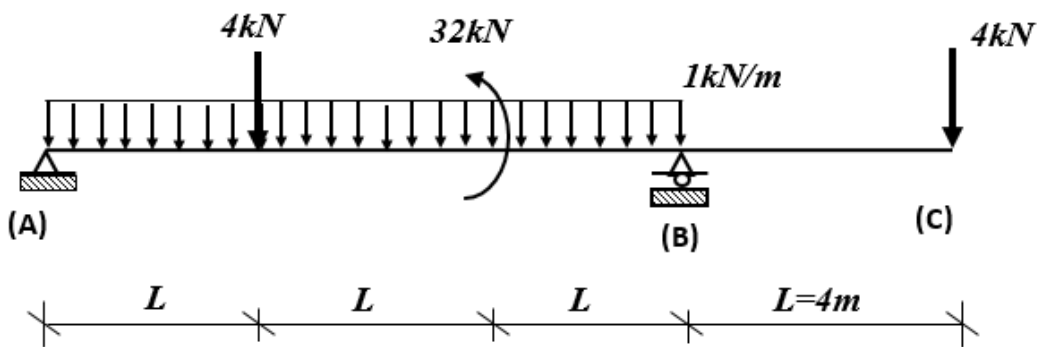
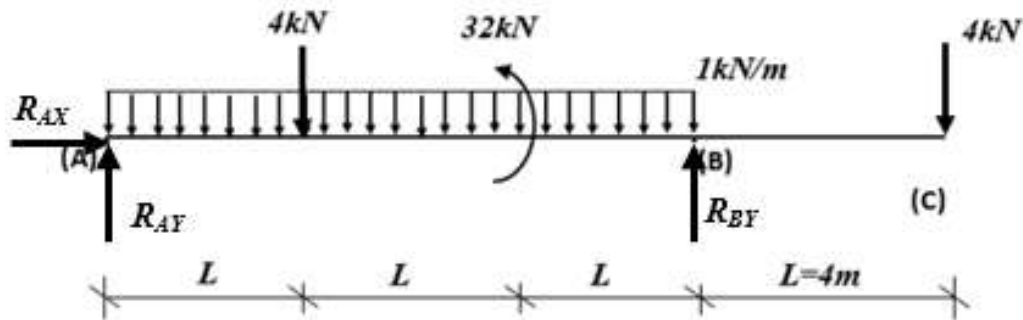


Figure 1.11 Poutre bi-articulée soumise à la flexion simple

6.1.2 Solution

Calcul des réactions d'appuis



En équilibre statique :

$$\sum \vec{F}_x = \sum \vec{F}_y = \sum \vec{M}_z = \vec{0} \text{ donc :}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{AY} + R_{BY} - 4 - (1 \cdot 12) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow R_{AY} = 4 + 12 + 4 - R_{BY} \dots \dots \dots (*)$$

$$\Rightarrow \sum M_z / A = 0 \Rightarrow (-4 \cdot 16) + (R_{BY} \cdot 12) + 32 - (12 \cdot \frac{12}{2}) - (4 \cdot 4) = 0$$

$$\Rightarrow R_{BY} = \frac{120}{12} = 10 \text{ kN} \dots \dots \dots (**)$$

On remplace (**) dans (*) on trouve :

$$R_{AY} = R_{BY} = 10 \text{ kN}$$

Par la méthode des paramètres initiaux on peut déterminer la flèche maximale et les rotations aux appuis :

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 - \left[\frac{10}{2} \cdot x^2 \right] + \left[\frac{x^3}{6} - \frac{(x-12)^3}{6} \right] + [2 \cdot (x-4)^2] + [32 \cdot (x-8)] - \left[\frac{10}{2} \cdot (x-12)^2 \right]$$

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\theta_0 \cdot x - \left[\frac{5}{3} \cdot x^3 \right] + \left[\frac{x^4}{24} - \frac{(x-12)^4}{24} \right] + \left[\frac{2}{3} \cdot (x-4)^3 \right] + \left[\frac{32}{2} \cdot (x-8)^2 \right] - \left[\frac{5}{3} \cdot (x-12)^3 \right]$$

Conditions initiales:

Appui A :

$$x = 0 \Rightarrow EIy(0) = 0 \Rightarrow EIy_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

Appui B :

$$x = 12 \Rightarrow EIy(12) = 0$$

$$\Rightarrow EIy_0 + EI\theta_0 \cdot 12 - \left[\frac{5}{3} \cdot 12^3 \right] + \left[\frac{12^4}{24} - \frac{(12-12)^4}{24} \right] + \left[\frac{2}{3} \cdot (12-4)^3 \right] + \left[\frac{32}{2} \cdot (12-8)^2 \right] - \left[\frac{5}{3} \cdot (12-12)^3 \right] = 0$$

$$\Rightarrow 12EI\theta_0 = 2880 - 864 - 256 - \frac{1024}{3}$$

$$\Rightarrow EI\theta_0 = \frac{4256}{36} = 118,22$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \frac{118,22}{EI}$$

On a :

$$x = 12 \Rightarrow \theta(0) = \theta_0 = \frac{118,22}{EI}$$

donc

$$EI\theta(12) = EI\theta_0 - \frac{10}{2} + 12^2 + \frac{12^3}{6} - \frac{(12-12)^3}{6} + 2 \cdot (12-4)^2 + 32 \cdot (12-8) - 5 \cdot (12-12)^2$$

$$EI\theta(12) = \frac{18,22}{EI} \cdot EI - 720 + 288 + 128 + 128$$

$$EI\theta(12) = -57,78$$

$$\Rightarrow \theta(12) = \frac{-57,78}{EI}$$

La flèche maximale

$\theta(x) = 0 \Rightarrow$ Equation polynomiale de degré 3

x	0	4	8	12	16
$EI\theta(x)$	118.22	48.89	-84.4	-57.78	-25.78

Donc $\theta(x) = 0$ pour $x \in]4,8[$

En utilisant la méthode de **dichotomie**, on converge vers $x=5,48$

$$y(5,48) = \frac{414}{EI}$$

6.2. SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS

Les équations différentielles de la déformée sont des équations linéaires c'est-à-dire tous les termes de y , y' et y'' sont du premier ordre. Les déformations dues à plusieurs cas de charges

peuvent être donc superposées ou cumulées. Cette méthode est surtout utilisée quand le chargement est composé de plusieurs cas de charge élémentaire ou les déformations sont données dans les aides mémoires de la RDM.

6.2.1. PRINCIPE DE SUPERPOSITION:

L'effet produit par plusieurs actions mécaniques est égal à la somme des effets produits par ces actions mécaniques prises séparément.

On entend par « effet des actions mécaniques », l'état de contrainte généré par ces actions ainsi que les déformations associées.

L'application du principe de superposition énoncé précédemment permet d'écrire : « Si une poutre est soumise à plusieurs sollicitations simples, l'état de contrainte et de déformation est la somme des états de contrainte et de déformation dus à chacune de ces sollicitations simples prise séparément »

6.2.2. LIMITES DU THEOREME DE SUPERPOSITION:

- La limite élastique ne doit pas être atteinte,
- La somme des actions extérieures des différents problèmes de sollicitations simples doit être égale à celle du problème complexe.

6.2.3 APPLICATION

Déterminer la flèche maximale de la poutre ci-dessous.

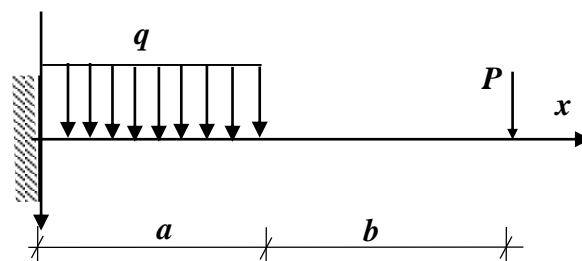
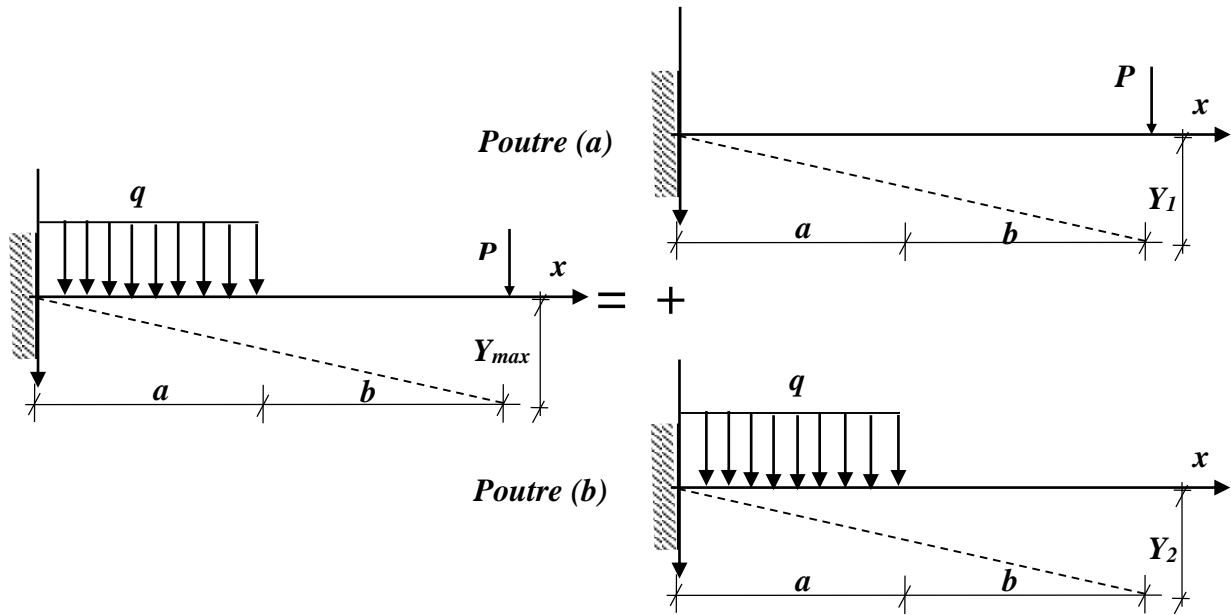


Figure 1.12 Poutre encastree sous une charge repartie et concentree

6.2.4 Solution

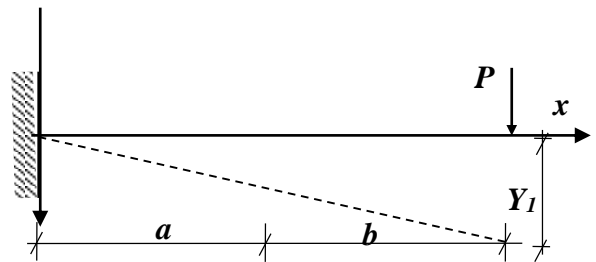
On sépare que cette poutre en deux poutres (a) et (b) comme le montre la figure ci-dessous :



Pour la poutre (a) :

La flèche maximale due à la charge concentrée P
est donnée par :

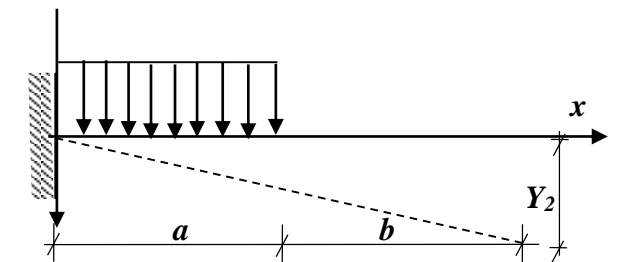
$$Y_1 = \frac{Pl^3}{3EI}$$



Pour la poutre (b) :

La flèche maximale due à la charge répartie q
est donnée par :

$$Y_2 = \frac{qa^3(4l-a)}{24EI}$$



La flèche maximale Y_{max} est obtenue par la sommation des deux flèches Y_1 et Y_2 :

$$Y_{max} = Y_1 + Y_2$$

$$Y_{max} = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{qa^3(4l-a)}{24EI}$$

6.3 METHODES DES MOMENTS D'AIRES

Le calcul de la pente (rotation) et de la flèche d'une poutre par la méthode des «moments d'aires» fait également appel aux notions étudiées au début de ce chapitre, sauf qu'on effectue ('intégration géométriquement, à partir du diagramme des moments fléchissant. Nous verrons que cette méthode convient particulièrement à l'étude des poutres dont la rigidité de flexion EI varie selon la longueur.

Nous avons constaté, en effet, que la méthode de double intégration par fonctions de singularités est surtout bien adaptée pour les cas où EI est constante.

6.3.1 THEOREMES

A partir des équations 1.17 et 1.18 de la déformé :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \dots\dots\dots(1.17)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \approx \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d v}{dx^2} \dots\dots\dots(1.18)$$

On peut récrire :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EI} \dots\dots\dots(1.19)$$

$$d\varphi = \frac{M}{EI} dx \dots\dots\dots(1.20)$$

En intégrant l'équation 1.20, on peut déterminer la variation de pente, φ_{AB} entre deux points A et B sur la courbe élastique de la poutre (fig. 1.13) ; on a ainsi:

En intégrant l'équation 1.20, on peut déterminer la variation de pente, φ_{AB} entre deux points A et B sur la courbe élastique de la poutre (fig. 1.13) ; on a ainsi:

$$\varphi_{AB} = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI} dx \dots\dots\dots(1.21)$$

Or, l'élément de droite de l'équation 1.21 représente l'aire sous la courbe M/EI comprise entre x_A et x_B (fig.1.13b). Donc:

$$\varphi_{AB} = \left[\text{aire sous } \frac{M}{EI} \right]_A^B \dots\dots\dots(1.22)$$

On peut exprimer l'équation 1.22 sous forme de théorème.

Théorème 1 : Variation de pente.

L'angle compris entre les tangentes à la courbe élastique, en un point A et en un point B , est égal à l'aire (comprise entre ces deux points) sous la courbe du moment fléchissant divisé par la rigidité de flexion (EI).

Par ailleurs, à la figure 1.13c, on voit en outre que la distance $d\Delta$, sur la droite verticale passant par le point B et délimitée par $d\varphi$, est donnée par l'équation:

$$d\Delta = (x_B - x_A)d\varphi \dots\dots\dots(1.23)$$

En intégrant l'équation 1.23, on obtient la distance verticale $\Delta_{BA} = BA'$ entre le point B et la tangente au point A :

$$\Delta_{BA} = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x) \frac{M}{EI} dx \dots\dots\dots(1.24)$$

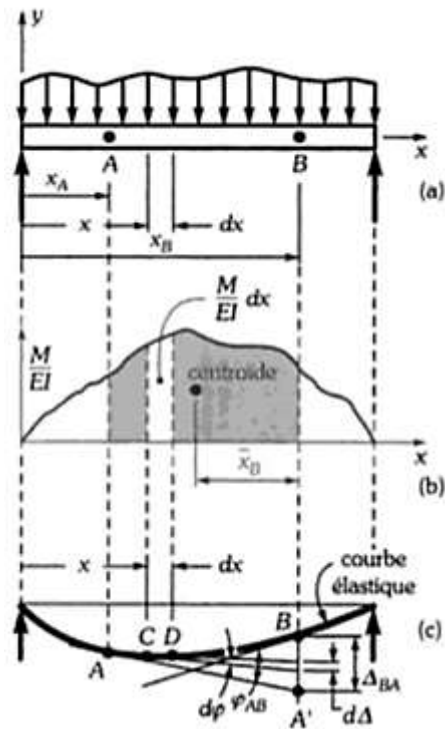


Figure 1.13 Méthodes des moments d'aires

On définit Δ_{BA} comme la flèche tangentielle au point **B** par rapport au point **A**. Par convention, le premier indice représente le point situé sur la courbe élastique, et le second, le point duquel part la tangente. L'intégrale de l'équation 1.24 donne le premier moment de l'aire sous la courbe M/EI comprise entre x_A et x_B , ce premier moment étant évalué par rapport à un axe vertical passant par le point **B**. En appelant \bar{x}_B la distance qui sépare le point **B** du centroïde de cette aire, on peut récrire ainsi l'équation 1.24 :

$$\varphi_{BA} = \left[\text{aire sous } \frac{M}{EI} \right]_A^B \bar{x}_B \dots\dots\dots(1.25)$$

On peut également exprimer l'équation 1.25 par un théorème, le second de la méthode des moments d'aires.

Théorème 2 : Flèche tangentielle

La flèche tangentielle issue d'un point quelconque **B** (de la courbe élastique) sur la tangente passant par un autre point **A** de la courbe élastique est égale au premier moment, par rapport au point **B**, de l'aire sous la courbe M/EI comprise entre **A** et **B**.

A la figure 1.14, on donne la convention de signes et d'indices concernant la flèche tangentielle et la variation de pente. Lorsque le moment fléchissant est positif (fig. 1.14a), le point de rencontre des tangentes est situé au-dessous de la poutre, ainsi que les flèches tangentielles. L'inverse se produit lorsque le moment fléchissant est négatif (fig. 1.14b). Il faut noter qu'il y a une différence importante entre Δ_{BA} et Δ_{AB}

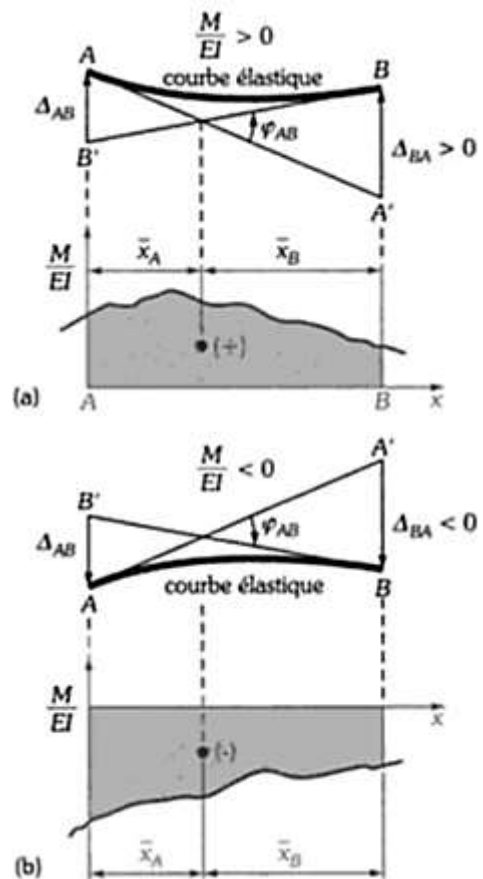
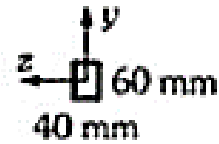
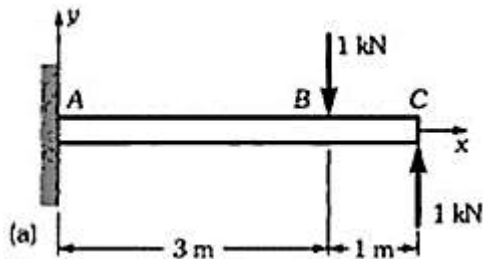


Figure 1.14 Moment d'aires : convention de signes et d'indices : a) moment fléchissant positif ; b) moment fléchissant négatif

6.3.2 APPLICATION

La poutre de la figure ci-dessous est encastree à son extrémité gauche. On demande de calculer la pente et la flèche au point C (extrémité de droite) par la méthode des moments d'aires ($E = 200 \text{ GPa}$).



6.3.3 Solution

Calcul des réactions d'appuis

En équilibre statique :

$$\sum \vec{F}_x = \sum \vec{F}_y = \sum \vec{M}_z = \vec{0} \text{ donc :}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{AY} + 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow R_{AY} = 0 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \sum M_z / A = 0 \Rightarrow M_A + (1.3) - (1.4) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 1 \text{ kN.m}$$

Par la méthode des sections on peut tracer

les diagrammes des efforts internes :

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 3$

$$M_f(x) = 1 \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow M_f(0) = 1 \text{ kN.m} \\ x = 3 \Rightarrow M_f(3) = 1 \text{ kN.m} \end{cases}$$

2^{ème} tronçon : $3 \leq x \leq 4$

$$M_f(x) = -x + 4 \quad \begin{cases} x = 3 \Rightarrow M_f(3) = 1 \text{ kN.m} \\ x = 4 \Rightarrow M_f(4) = 0 \text{ kN.m} \end{cases}$$

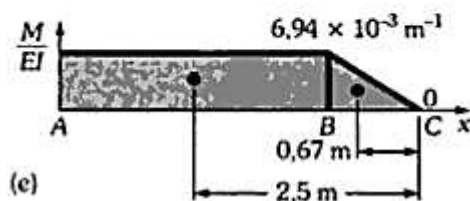
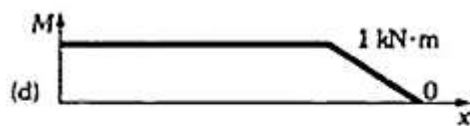
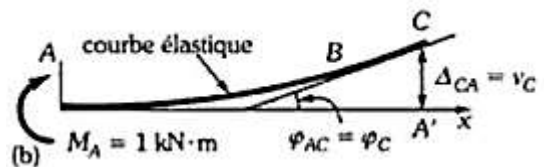
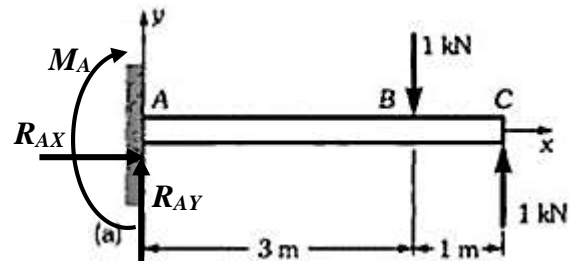


Figure 1.15 Exemple d'application.

La figure 1.15b illustre la courbe élastique prévisible: l'encastrement exige que la courbe soit parfaitement horizontale en A ; nous verrons plus loin que la réalisation de cette condition simplifie considérablement la résolution par la méthode des moments d'aires. Les figures 1.15c et 1.15d montrent les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants, et la figure 1.15.e, le diagramme de M/EI . Puisque, dans ce cas, la rigidité de flexion EI est constante, les diagrammes de M et de M/EI sont semblables.

1. Calcul de la pente au point C

Puisque la courbe élastique est horizontale en A , on peut évaluer la pente φ_C en calculant φ_{AC} à partir de l'équation du théorème 1 :

$$\varphi_{AC} = \text{aire sous } \frac{M}{EI} \text{ entre } A \text{ et } C$$

Moment d'inertie:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{40.60^3}{12} = 720.000 \text{ mm}^4$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1.1000.1000}{200000.720000} = 6,94.10^{-3} \text{ m}$$

$$\varphi_{AC} = S_1 + S_2 = [(6,94.10^{-3})3] + \left[\left(\frac{6,94.10^{-3}}{2} \right) \cdot 1 \right]$$

$$\varphi_{AC} = 24,94.10^{-3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{AC} \approx 1,39^\circ$$

2. Calcul de la flèche:

Là encore, le fait que la tangente en A soit horizontale permet de calculer directement la flèche v_C , puisqu'elle est égale à la flèche tangentielle Δ_{CA} . On a donc (théorème 2) :

Δ_{CA} = premier moment par rapport à C de l'aire M/EI comprise entre A et C

$$\Delta_{CA} = \left[(6,94 \cdot 10^{-3}) \cdot 3,2,5 \right] + \left[\left(\frac{6,94 \cdot 10^{-3}}{2} \right) \cdot 1,0,67 \right]$$

$$\Delta_{CA} = 54,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta_{CA} = v_C = 54,4 \text{ mm}$$

Le fait que Δ_{CA} soit positif indique que le déplacement du point C s'effectue vers le haut, par rapport à la tangente en A .

CHAPITRE 2 THEOREMES GENERAUX DES SYSTEMES ELASTIQUES.

INTRODUCTION

Dans ce chapitre seront examinées les relations qui existent entre les sollicitations agissant sur un système et les déplacements qu'elles produisent.

1. DEFORMATION DES STRUCTURES ELASTIQUES:

1.1 NOTIONS DE TRAVAIL ET DE TRAVAIL COMPLEMENTAIRE:

Pour fixer les idées, nous considérons le cas d'une barre prismatique soumise à une traction axiale F_I qui produit un allongement δ_I (Fig.2.1a).

Nous supposons que la force F_I est appliquée graduellement, d'une manière lente, de façon à ne produire aucune force d'inertie. Dans ces conditions, on dit que le chargement (force F_I ici) est appliqué *statiquement* et le déplacement engendré (ici un allongement) est relié à la force appliquée par une relation représentée par le diagramme " F - δ " de la (fig . 2.1b).

Soit F une valeur intermédiaire et δ l'allongement correspondant. A un accroissement dF de la charge correspond un allongement supplémentaire $d\delta$. Le *travail élémentaire* produit par F au cours de l'accroissement $d\delta$ est défini par :

$$d\tau_e = Fd\delta \dots\dots\dots(2.1)$$

Il est représenté par l'aire hachurée (hachures inclinées) du diagramme F - d (Fig. 2.1b).

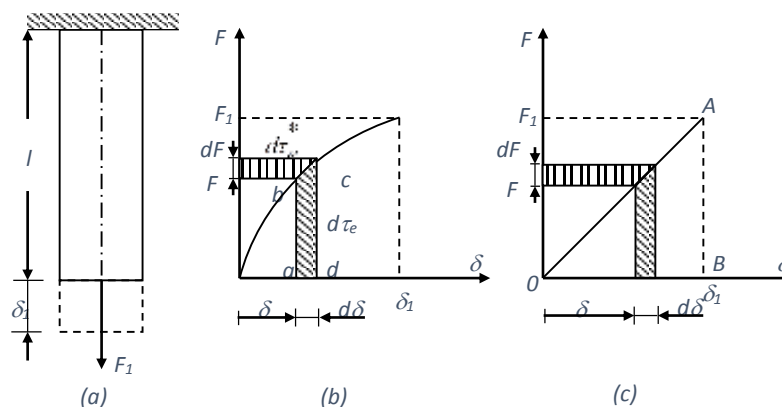


Figure 2.1 Diagramme force-déplacement

Remarque:

Dans la figure précédente (fig 2.1), $F d \delta$ représente plus exactement le rectangle "abcd". Autrement dit, le travail effectué par dF au cours du déplacement $d\delta$, qui est un infiniment petit d'ordre supérieur à 1, est négligé.

Le travail total effectué par la force F_I au cours du déplacement δ_I est obtenu par sommation des travaux élémentaires, c'est-à-dire :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_I} F d\delta \dots\dots\dots(2.2)$$

Il est représenté par l'aire délimitée par la courbe $F-\delta$ et l'axe des δ jusqu'à δ_I . De même, on appelle *travail complémentaire élémentaire* du déplacement δ au cours de l'accroissement de charge dF la quantité : $d\tau_e^* = \delta dF \dots\dots\dots(2.3)$

Le travail complémentaire total effectué par F_I , appliquée graduellement de 0 à F_I , au cours du déplacement δ_I est donné par :

$$\tau_e^* = \int_0^{F_I} \delta dF \dots\dots\dots(2.4)$$

C'est l'aire à gauche de la courbe $F-\delta$.

1.2 ÉNERGIE ET ENERGIE COMPLEMENTAIRE DE DEFORMATION:

Considérons un corps soumis à des sollicitations extérieures. Sous l'action des charges extérieures, le corps se déforme et les efforts internes (contraintes) effectuent un travail qui s'oppose au travail des sollicitations extérieures. Ce travail interne, changé de signe, est désigné par énergie potentielle de déformation (W) ($-\mathbf{a} = W$).

Isolons un élément $d\mathbf{v} = dx dy dz$ du corps considéré. L'énergie élémentaire emmagasinée dans $d\mathbf{v}$ se calcule comme le travail effectué par les forces agissant sur les faces de l'élément $d\mathbf{v}$. Ainsi, le travail effectué par la force élémentaire $\sigma_x \cdot dy dz$ au cours de la variation $d\epsilon_x$ de la déformation ϵ_x , qui produit le déplacement $d\mathbf{dx} = d\epsilon_x \cdot dx$, vaut :

$$dW = \sigma_x \cdot dy dz \cdot d\epsilon_x \cdot dx = \sigma_x d\epsilon_x d\mathbf{v} \dots\dots\dots(2.5)$$

En considérant toutes les composantes des contraintes et en utilisant la notation indicielle, on obtient pour l'élément $d\mathbf{v}$: $dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} d\mathbf{v} \dots\dots\dots(2.6)$

L'énergie emmagasinée dans tout le volume du corps (\mathbf{v}) vaut :

$$W = \int_{\mathbf{v}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} d\mathbf{v} \dots\dots\dots(2.7)$$

Considérons un diagramme contrainte-déformation unidirectionnel (unidimensionnel) (Fig. 2.2b).

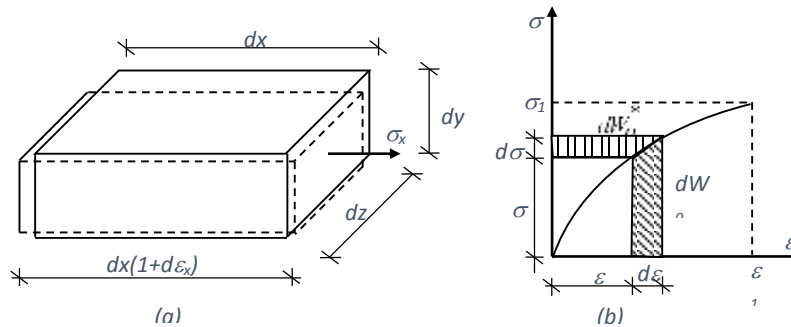


Figure 2.2 Diagramme contrainte-déformation

On a : $dW_0 = \sigma d\varepsilon$

Cette quantité a l'unité d'une énergie par unité de volume. L'intégrale : $W_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon$ est appelée densité de l'énergie de déformation et est représentée par l'aire comprise entre la courbe σ - ε et l'axe des contraintes ε . Remarquons qu'on a :

$$W = \int_v dW_0 dv \dots\dots\dots(2.8)$$

De même, l'énergie complémentaire élémentaire produite par un accroissement $d\sigma_{ij}$ des contraintes au cours des déplacements produits par les déformations ε_{ij} correspondantes vaut :

$$dW^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} dv \dots\dots\dots(2.9)$$

Et pour la totalité du volume du corps :

$$W^* = \int_v \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} dv \dots\dots\dots(2.10)$$

$$\text{On a aussi : } dW_0^* = \varepsilon d\sigma \quad \text{et} \quad W_0^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma$$

2. TRAVAIL ET ENERGIE DANS LE DOMAINE ELASTIQUE LINEAIRE:

2.1 TRAVAIL D'UNE FORCE:

Si la relation entre F et δ est linéaire, domaine d'application de la loi de Hooke (et petits déplacements), c'est-à-dire quand on a à tout moment du chargement la relation (Fig. 2.1c) :

$$F = k\delta \quad (k = \text{constante}) \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

Le travail total devient :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_1} k \delta d\delta = \frac{1}{2} k \delta_1^2 \dots\dots\dots(2.12)$$

et comme : $F_1 = k \delta_1$, il vient :

$$\tau_e = \frac{1}{2} F_1 \delta_1 \dots\dots\dots(2.13)$$

Le travail total est représenté par l'aire du triangle **OAB** (Fig. 2.1c).

Remarquons que dans le cas de l'élasticité linéaire, on a : $\tau_e = \tau_e^*$.

2.2 GENERALISATION:

Si un système en équilibre est soumis à une sollicitation globale **F** ($F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$) et que les points d'application de ces forces subissent des déplacements, dont les projections sur les directions de ces mêmes sollicitations valent $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, le travail effectué au cours du chargement du système (passage de l'état d'équilibre initial à l'état d'équilibre final), vaut :

$$\tau_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \dots\dots\dots(2.14)$$

Il faut rappeler qu'on suppose que :

- le chargement est statique (les mises en charge sont lentes),
- le matériau a un comportement élastique linéaire (loi de Hooke vérifiée),
- les déplacements n'affectent pas l'action des charges (hypothèse des petits déplacements, pas d'effets du second ordre).

2.3 ÉNERGIE POTENTIELLE DE DEFORMATION:

Dans le domaine élastique linéaire, la relation contrainte-déformation (σ_{ij} - ϵ_{ij}) est linéaire et comme dans le travail, le facteur 1/2 apparaît dans l'expression de l'énergie (Fig. 2.3).

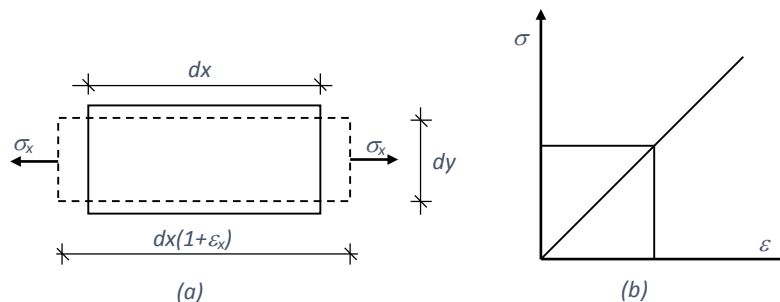


Figure 2.3 Energie potentielle de déformation dans le domaine élastique linéaire

Ainsi, le travail fait par la force $\sigma_x dydz$ au cours de la déformation ϵ_x qui provoque une variation de longueur $\Delta dx = \epsilon_x dx$ est :

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_x dydz \epsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dv \dots\dots\dots(2.15)$$

Pour toutes les contraintes agissant sur dv en aura (en notation indicielle)

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} dv$$

Et $\dots\dots\dots(2.16)$

$$W = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv$$

Remarque:

Dans le cadre de l'élasticité linéaire on a : $W = W^*$.

3. TRAVAIL DE DEFORMATION DES SOLLICITATIONS SIMPLES DANS LE CAS DES POUTRES:

Nous allons calculer séparément le travail de déformation (énergie de déformation) en fonction des efforts N , M , T et M_t dans une poutre (droite ou courbe) de longueur l . Considérons un tronçon de poutre dx (ds) suffisamment petit pour pouvoir admettre que les efforts ne varient pas sur dx .

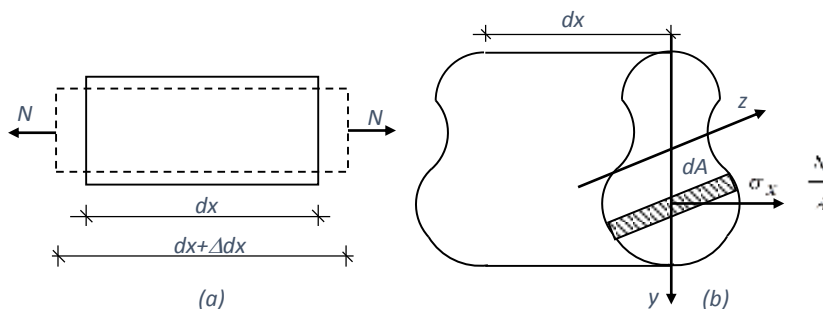


Figure 2.4 Travail de déformation des sollicitations simples (traction)

3.1 EFFORT NORMAL:

Sous l'effet des contraintes d'effort normal, le tronçon dx subit une variation de longueur Δdx définie par :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \epsilon_x \Rightarrow \Delta dx = \epsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx \dots\dots\dots(2.17)$$

Comme dans le cas de l'effort normal on a $\sigma_x = N/A$, il vient :

$$\Delta dx = (N/EA)dx \dots\dots\dots(2.18)$$

L'énergie emmagasinée dans le couche $dA \cdot dx$ se calcule comme le travail effectué par la force $\sigma_x \cdot dA$ au cours du déplacement Δdx , d'où :

$$d^2W = \frac{1}{2}(\sigma_x dA)\Delta dx = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{A} dA\right) \frac{N}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA^2} dA dx \dots\dots\dots(2.19)$$

Remarque:

La notation d^2W est utilisée pour désigner une quantité plus petite que l'énergie élémentaire. L'énergie élémentaire emmagasinée dans le tronçon dx s'obtient par intégration sur l'aire A de la section :

$$dW = \frac{dx}{2} \int_A \frac{N^2}{EA^2} dA = \frac{1}{2} \frac{N^2 dx}{EA^2} \int_A dA = \frac{N^2}{2EA} dx \dots\dots\dots(2.20)$$

Et pour la totalité de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx \dots\dots\dots(2.21)$$

3.2 MOMENT FLECHISSANT:

Considérons la couche $dA dx$. Sous l'effet des contraintes de flexion, la couche subit une variation de longueur : $\Delta dx = \epsilon_x dx = (\sigma_x/E) dx$. Compte tenu de la relation de Navier, il vient:

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \Rightarrow \Delta dx = \frac{M_z y}{EI_z} dx \dots\dots\dots(2.22)$$

L'énergie emmagasinée dans la couche $dA dx$ vaut :

$$d^2W = \frac{1}{2}(\sigma_x dA)\Delta dx = \frac{1}{2} \left(\frac{M_z y}{I_z} dA\right) \frac{M_z y}{EI_z} dx = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dA dx \dots\dots\dots(2.23)$$

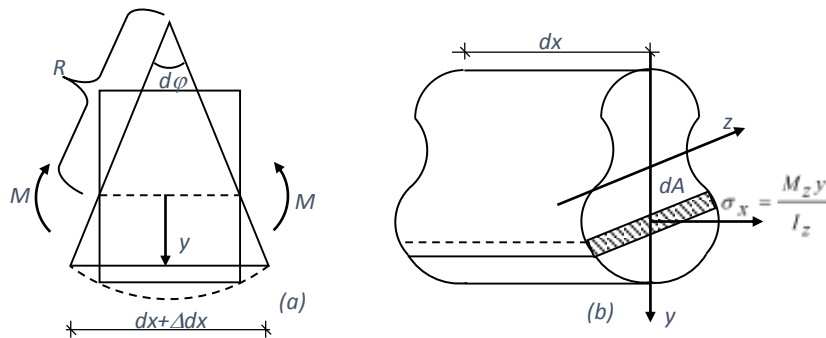


Figure 2.5 Travail de déformation des sollicitations simples (flexion)

En intégrant sur la surface on obtient l'énergie emmagasinée dans le tronçon dx :

$$dW = \frac{dx}{2} \int_A \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dA = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 dx}{EI_z^2} \int_A y^2 dA = \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \dots\dots\dots(2.24)$$

D'où l'énergie de déformation de la poutre, qui se calcule par intégration sur l :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EI_z} dx \dots\dots\dots(2.25)$$

Dans le cas d'une flexion gauche, on a une relation similaire à (équation précédente) pour chaque moment fléchissant et pour les deux moments on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right) dx \dots\dots\dots(2.26)$$

3.3 EFFORT TRANCHANT:

L'énergie emmagasinée dans un tronçon dx soumis à un effort tranchant T_y vaut :

$$dW = \frac{\kappa_y T_y^2}{2GA} dx \dots\dots\dots(2.27)$$

Et pour toute la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa_y T_y^2}{GA} dx \dots\dots\dots(2.28)$$

Si la poutre est soumise à T_y et T_z on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \left(\frac{\kappa_y T_y^2}{GA} + \frac{\kappa_z T_z^2}{GA} \right) dx \dots\dots\dots(2.29)$$

3.4 MOMENT DE TORSION:

L'angle dont tourne l'une par rapport à l'autre les sections extrêmes du tronçon dx

soumis à un moment de torsion M_t est donné par (Fig .2.6) : $d\varphi_t = \frac{qM_t}{GI_p} dx$

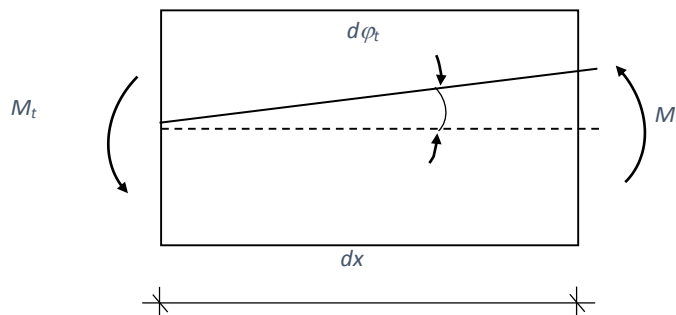


Figure 2.6 Travail de déformation des sollicitations simples (torsion)

Où :

- q est une constante dépendant de la forme et des dimensions de la section, appelée coefficient de torsion ($q \approx 40I_p^2/A^4$). Ce facteur vaut 1 pour la section circulaire et est supérieur à 1 pour les autres cas.

- la quantité $C = GI_p/q$ est désignée par *rigidité à la torsion* (ou *rigidité torsionnelle*).

L'énergie emmagasinée dans le tronçon dx se calcule comme le travail effectué par M_t lors du déplacement $d\varphi_t$:

$$dW = \frac{1}{2} M_t d\varphi_t = \frac{qM_t^2}{2GI_p} dx \dots\dots\dots(2.30)$$

Et pour l'ensemble de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{qM_t^2}{GI_p} dx \dots\dots\dots(2.31)$$

4. EXPRESSION GENERALE DE L'ENERGIE POTENTIELLE DE DEFORMATION:

Isolons à l'intérieur d'un corps élastique un élément $dv = dxdydz$ suffisamment petit pour pouvoir admettre que les contraintes ne varient pas sur les facettes de l'élément. Calculons l'énergie emmagasinée dans l'élément dv lorsqu'il est soumis à l'ensemble des contraintes (Fig. 2.7a).

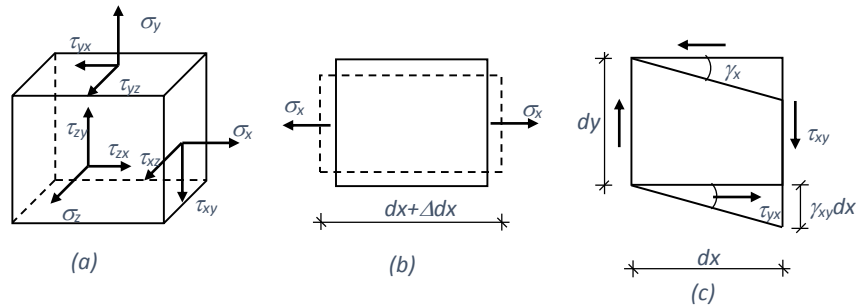


Figure 2.7 Contraintes dans l'élément de volume dv

Le travail de déformation de la force $\sigma_x dydz$ au cours du déplacement $\Delta dx = \varepsilon_x dx$ (Fig. 2.7b) vaut :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x dydz) \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dxdydz \dots\dots\dots(2.32)$$

Pour l'ensemble des trois contraintes normales:

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) dxdydz \dots\dots\dots(2.33)$$

Où ε_x , ε_y et ε_z sont les déformations longitudinales et peuvent être exprimées en fonction des contraintes normales à partir de la loi de Hooke généralisée.

Les déformations provoquées par les contraintes normales et tangentielles étant indépendantes, si outre les contraintes normales il y a des contraintes tangentielles, il suffit d'ajouter leur effet. Le travail de la force $\tau_{xy}dydz$ lors du déplacement $\gamma_{xy}dx$ (Fig. 2.7c) vaut :

$$dW = \frac{1}{2} (\tau_{xy} dydz) \gamma_{xy} dx = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz \dots\dots\dots(2.34)$$

En présence de toutes les contraintes, il vient :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz \dots\dots\dots(2.35)$$

L'énergie potentielle de déformation de tout le corps s'obtient par sommation sur le volume entier :

$$W = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dv \dots\dots\dots(2.36)$$

L'expression de W peut être exprimée en fonction des contraintes seulement ou des déformations uniquement en utilisant les expressions des contraintes en fonction des déformations données par la loi de Hooke généralisée. Dans le cas d'une poutre soumise aux sollicitations N, M, T et Mt, l'expression de W est:

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa T^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{q M_t^2}{GI_p} dx \dots\dots\dots(2.37)$$

Notons que cette dernière expression ne découle pas de l'application du principe de superposition, qui n'est pas applicable puisque l'énergie n'est pas reliée linéairement aux sollicitations.

5. THEOREME DE CASTIGLIANO:

5.1 PREMIERE FORME DU THEOREME:

Considérons un système élastique soumis à une sollicitation F (F_1, F_2, \dots, F_n). Au cours de la mise en charge, le système se déforme et les points d'application des forces subissent les déplacements $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ (δ_i mesuré suivant la direction de F_i).

L'énergie W emmagasinée dans le système au cours du chargement peut s'exprimer en fonction des forces ou des déplacements de leur point d'application.

$$W = W(F_1, F_2, \dots, F_n) = W(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \dots\dots\dots(2.38)$$

Donnons à la force F_i un accroissement dF_i . Il s'ensuit une variation de l'énergie définie par la quantité $(\partial W / \partial F_i) dF_i$ et l'énergie totale, sous $F (F_1, F_2, \dots, F_n)$ et dF_i , s'écrit :

$$W + \frac{\partial W}{\partial F_i} dF_i \dots\dots\dots(2.39)$$

Etant donné que le travail des forces ne dépend pas de l'ordre dans lequel elles sont appliquées, appliquons d'abord dF_i ensuite la sollicitation globale $F (F_1, F_2, \dots, F_n)$.

La force infinitésimale dF_i produit un déplacement $d\delta_i$ infinitésimal aussi, si bien que le travail accompli peut être considéré comme un infiniment petit d'ordre 2 qu'il est légitime de négliger : $(1/2) dF_i d\delta_i \approx 0$.

Appliquons maintenant la sollicitation globale $F (F_1, F_2, \dots, F_n)$. Le travail accompli est égal à W : $\tau_e = W$. En outre, la force dF_i , dont le point d'application a subi un déplacement δ_i , produit un travail qui vaut $dF_i \delta_i$.

D'où le travail total :

$$\tau_e + dF_i \delta_i = W + dF_i \delta_i \dots\dots\dots(2.40)$$

La première forme du théorème de Castigliano,

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = \delta_i \dots\dots\dots(2.41)$$

qui s'énonce comme suit :

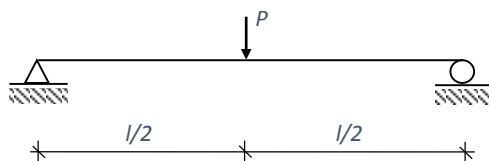
Dans un système élastique à appuis indéformables, la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à l'une des forces agissant sur le système est égale à la projection sur la direction de cette force du déplacement élastique de son point d'application.

6. APPLICATIONS :

6.1 Exemple 1:

Considérons une poutre bi-articulée de section constante chargée en son milieu par une force concentrée P .

Calculer la flèche à mi-portée (f).



6.1.2 Solution

On obtient la valeur de la flèche par l'application directe de la formule suivante:

$$f = \partial W / \partial P$$

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EI_z} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa T_y^2}{GA} dx \dots\dots\dots (1)$$

Calcul des réactions d'appuis

En équilibre statique :

$$\sum \vec{F}_x = \sum \vec{F}_y = \sum \vec{M}_z = \vec{0} \text{ donc :}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

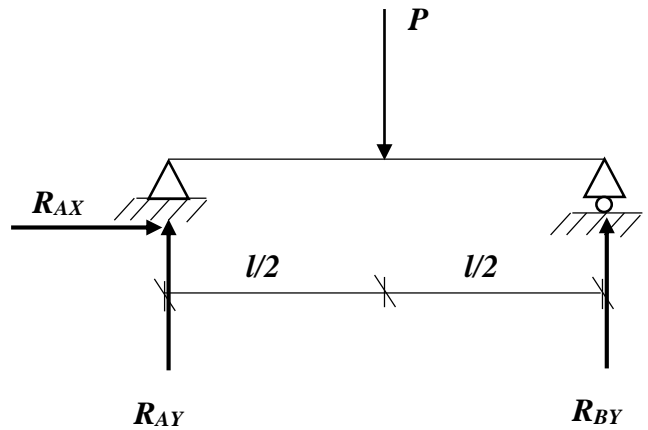
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{AY} + R_{BY} = P \dots\dots\dots (*)$$

$$\Rightarrow \sum M_z / A = 0 \Rightarrow R_{BY} \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\Rightarrow R_{BY} = \frac{P \cdot l}{2 \cdot l} = \frac{P}{2} \dots\dots\dots (**)$$

On remplace (**) dans (*) on trouve :

$$R_{AY} = R_{BY} = \frac{P}{2}$$



Par la méthode des sections on peut déterminer les efforts internes :

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

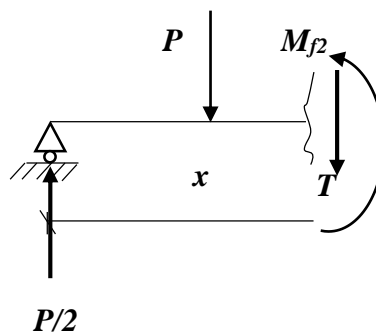
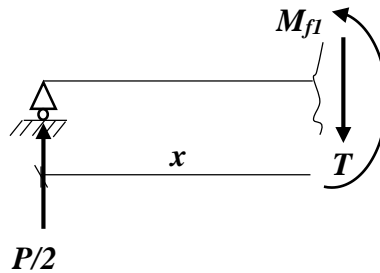
$$M_{f1}(x) = \frac{P}{2} \cdot x$$

$$T_1(x) = \frac{P}{2}$$

2^{ème} tronçon : $\frac{l}{2} \leq x \leq l$

$$M_{f2}(x) = \frac{P}{2} \cdot (l - x)$$

$$T(x) = -\frac{P}{2}$$



On remplace ces valeurs en (1) on obtient :

$$W = \frac{1}{2EI_z} \left[\int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2}x\right)^2 dx + \int_{l/2}^l \left(\frac{P}{2}(l-x)\right)^2 dx \right] + \frac{\kappa}{2GA} \left[\int_0^{l/2} \left(\frac{P}{2}\right)^2 dx + \int_{l/2}^l \left(-\frac{P}{2}\right)^2 dx \right]$$

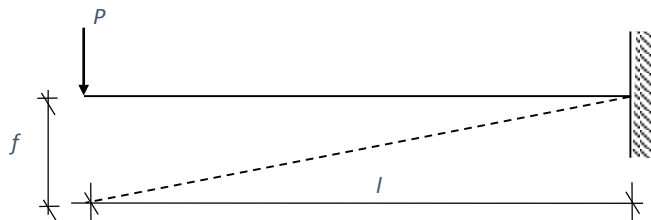
$$W = \frac{P^2 l^3}{96EI_z} + \frac{\kappa P^2 l}{8GA}$$

D'où :

$$f = \frac{Pl^3}{48EI_z} + \frac{\kappa Pl}{4GA}$$

6.2 Exemple 2:

Calculer le déplacement du point d'application de la charge P (on suppose que la rigidité flexionnelle est constante).



6.2.1 Solution

On obtient la valeur de la flèche par l'application directe de la formule suivante:

$$f = \partial W / \partial P$$

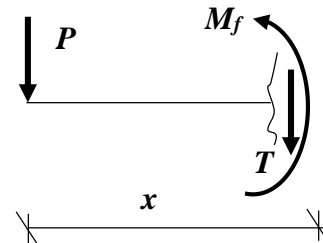
$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EI_z} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{\kappa T_y^2}{GA} dx \dots \dots \dots (1)$$

Par la méthode des sections on peut déterminer les efforts internes :

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq l$

$$M_f(x) = -Px$$

$$T = -P$$



On remplace ces valeurs en (1) on obtient :

$$W = \frac{l}{2EI_z} \int_0^l (-Px)^2 dx + \frac{\kappa}{2GA} \int_0^l (-P)^2 dx$$

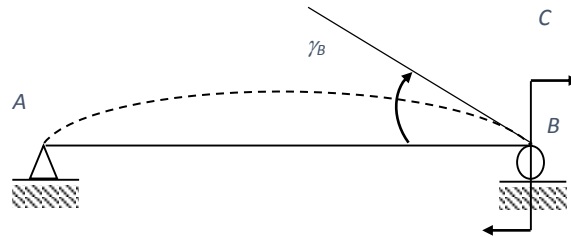
$$W = \frac{P^2 l^3}{6EI_z} + \frac{\kappa P^2 l}{2GA}$$

D'où :

$$f = \frac{Pl^3}{3EI_z} + \frac{\kappa Pl}{GA}$$

6.3 Exemple 3:

Calculer la rotation de l'extrémité B de la poutre ci-contre.



6.3.1 Solution

$$W = \frac{l}{2EI_z} \int_0^l \left(-\frac{C}{l}x\right)^2 dx + \frac{\kappa}{2GA} \int_0^l \left(-\frac{C}{l}\right)^2 dx = \frac{C^2 l}{6EI_z} + \frac{\kappa C^2}{2GA}$$

D'où :

$$\gamma_B = \frac{\partial W}{\partial C} = \frac{Cl}{3EI_z} + \frac{\kappa C}{GA}$$

CHAPITRE 3 SOLLICITATIONS COMPOSEES.

GENERALITES

Une sollicitation est dite composée si dans une section droite d'une pièce, il existe plus d'un effort interne.

Soient ox , oy et oz des axes principaux (figure 3.1)

Dans cette partie, nous nous intéressons aux sollicitations composées les plus courantes :

- Flexion déviée : (M_z, T_y, M_y, T_z) ;
- Flexion composée : $(M_z, T_y, M_y, T_z, N_x)$;
- Flexion-torsion: (M_z, T_y, M_x) ou (M_y, T_z, M_x) .

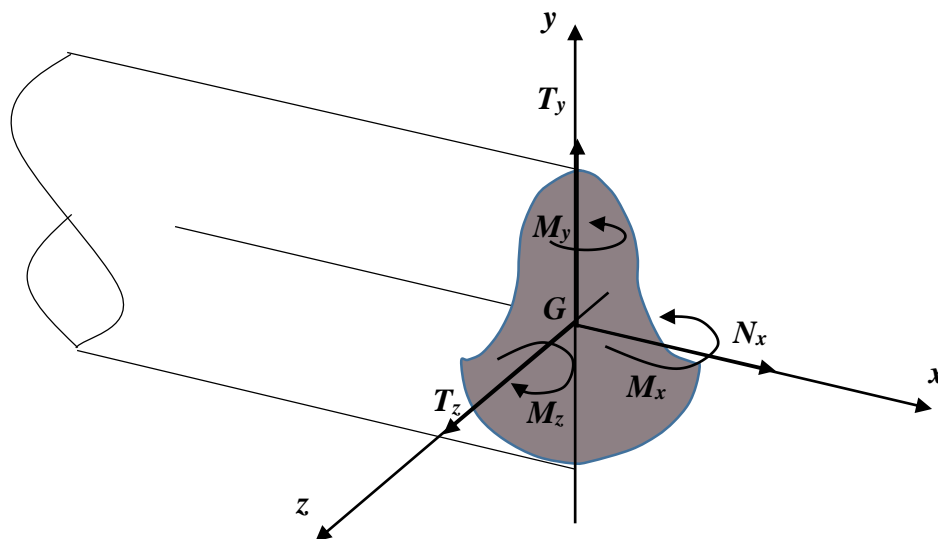


Figure 3.1 Efforts internes.

1. FLEXION DEVIEE

Une flexion est dite déviée si, dans une section droite de la pièce, les efforts internes $(M_z, T_y, M_y$ et $T_z)$ agissant sur les axes principaux ne sont pas nuls (figure 3.2.)

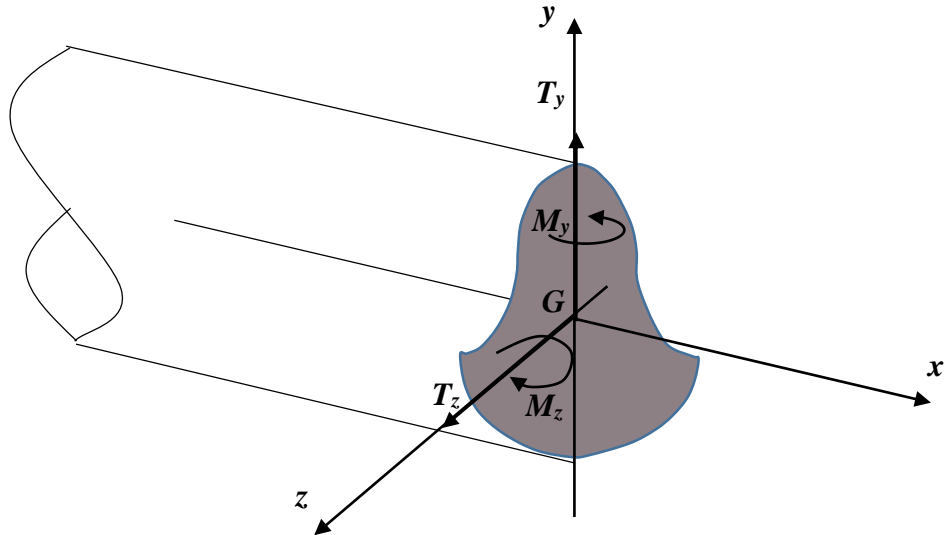


Figure 3.2 Flexion déviée.

1.1 CONTRAINTE NORMALE

La contrainte normale est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \dots\dots\dots(3.1)$$

On appelle l'axe neutre AN l'ensemble des points où la contrainte normale est nulle.

Soit un point $P(x_0; y_0)$ appartenant à l'axe AN. Alors :

$$\frac{M_z}{I_z} y_0 + \frac{M_y}{I_y} z_0 = 0 \Rightarrow \frac{y_0}{z_0} = -\frac{M_y}{M_z} \frac{I_z}{I_y} = \tan \beta \dots\dots\dots(3.2)$$

M_y et M_z sont les résultantes du moment M . D'où :

$$\begin{cases} M_z = M \cos \alpha \\ M_y = M \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{M_y}{M_z} \dots\dots\dots(3.3)$$

En substituant l'équation [4.3] dans [4.2], on arrive à :

$$\tan \beta = \frac{I_z}{I_y} \tan \alpha \dots\dots\dots(3.4)$$

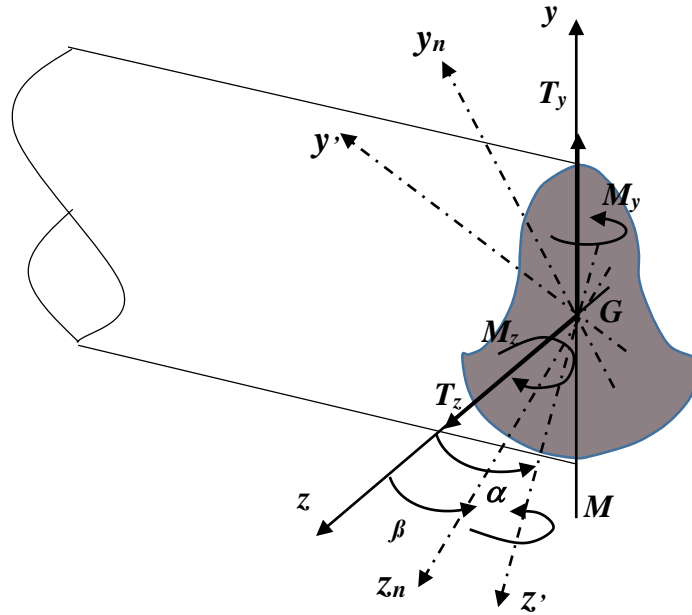


Figure 3.3 Coordonnées d'un point appartenant à l'axe neutre.

1.2 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

La contrainte de cisaillement en un point est donnée par :

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \dots\dots\dots(3.5)$$

Avec:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \frac{T_y S_z}{b I_z} \\ \tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y} \end{cases} \dots\dots\dots(3.6)$$

1.3 CALCUL A LA RESISTANCE

Les étapes de calcul de la résistance sont :

- Déterminer les sections dangereuses (zones où les efforts internes sont maximum) et les points dangereux dans la section (Points les plus éloignés de l'axe neutre).
- Calculer la valeur de la contrainte normale et vérifier qu'elle est inférieure à la valeur de la contrainte admissible :

$$\sigma_x \leq \bar{\sigma} \dots\dots\dots(3.7)$$

$\bar{\sigma}$: Contrainte admissible du matériau.

- Vérification d'un critère de rupture (cas d'un matériau ductile) :

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \leq \bar{\sigma} \quad (\text{Critère de Van Mises}) \dots\dots\dots(3.8)$$

1.4 CALCUL A LA RIGIDITE :

Le calcul de la flèche se fait en utilisant l'équation différentielle de la ligne élastique :

$$EI_z \frac{d^2 f}{dx^2} = M_z \dots\dots\dots(3.9)$$

Avec:

$$f = \sqrt{[v(x)]^2 + [w(x)]^2} \dots\dots\dots(3.10)$$

$v(x)$ et $w(x)$ sont respectivement les déplacements suivant y et z

La flèche maximale doit satisfaire la condition :

$$f \leq \bar{f} \dots\dots\dots(3.11)$$

$$\bar{f} = \frac{l}{150} \div \frac{l}{1000}$$

Avec:

l : la portée de la poutre.

\bar{f} : la flèche admissible.

La vérification de la flèche s'effectue après la vérification de la résistance.

1.5 APPLICATION :

Calculer la charge maximale P que peut supporter une panne en IPE140 en respectant les conditions de résistance. $[\sigma]=120 \text{ MPa}$.

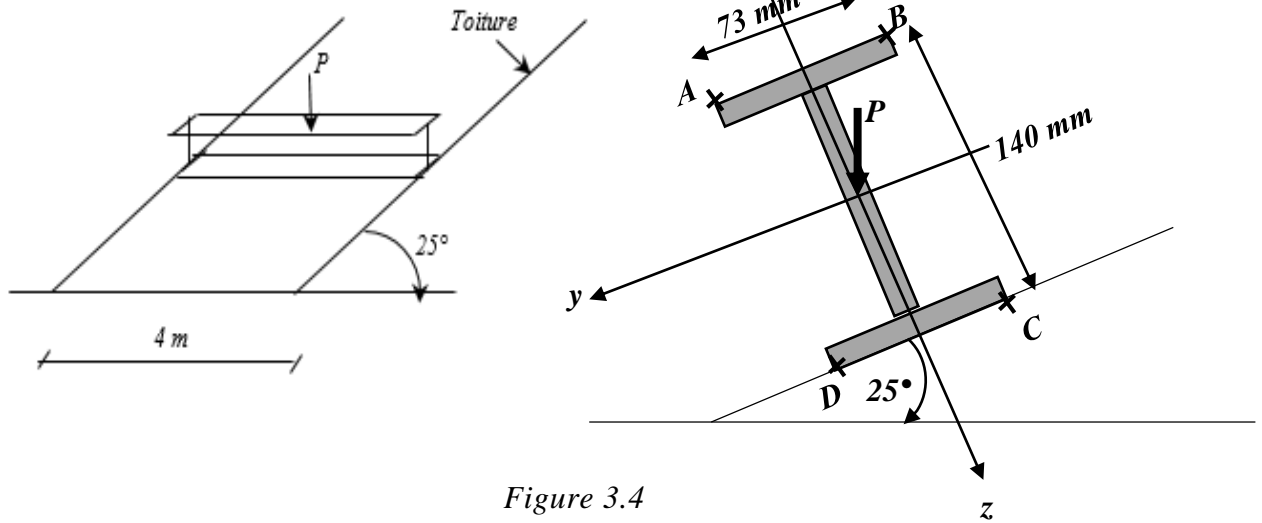


Figure 3.4

a) Position de la panne en IPE140 dans l'espace

b) Position de la panne en IPE140 dans le plan

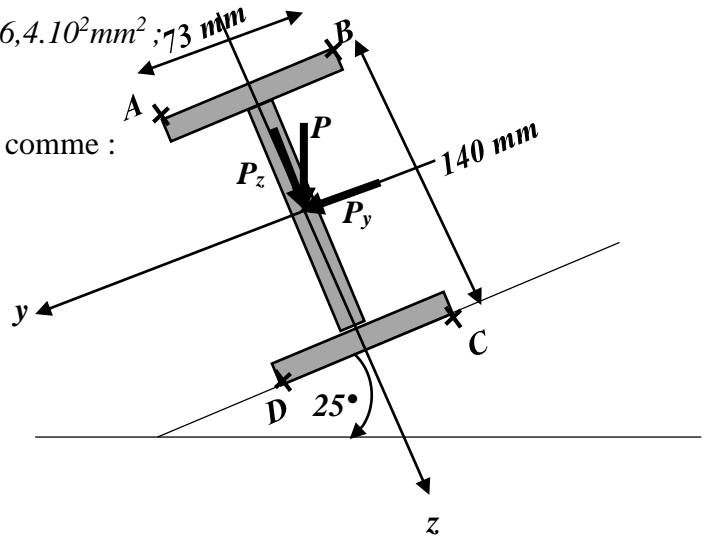
1.5.1 Solution

Caractéristiques géométriques d'un IPE140 : $A=16,4 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$; $I_y=541,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$; $I_z=44,9 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

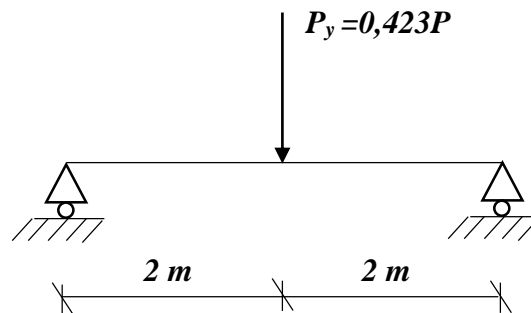
Le vecteur de chargement P peut-être décomposé comme :

$$\vec{P} = P_y \cdot \vec{j} + P_z \cdot \vec{k} \quad \text{Avec :}$$

$$\begin{cases} P_y = P \sin 25 = 0,423P \\ P_z = P \cos 25 = 0,908P \end{cases}$$



a) Bilan des forces pour le plan « xoy » :



Calcul des réactions d'appuis

En équilibre statique :

$$\sum \vec{F}_x = \sum \vec{F}_y = \sum \vec{M}_z = \vec{0}$$

donc :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{AY} + R_{BY} = P_y = 0,423P \dots\dots\dots (*)$$

$$\Rightarrow \sum M_z / A = 0 \Rightarrow R_{BY} \cdot 4 - P_y \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow R_{BY} = \frac{P_y \cdot 2}{4} = \frac{0,423P \cdot 2}{4} = 0,212P \dots\dots\dots (**)$$

On remplace (**) dans (*) on trouve :

$$R_{AY} = R_{BY} = 0,212P$$

Par la méthode des sections on peut tracer

les diagrammes des efforts internes :

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 2$

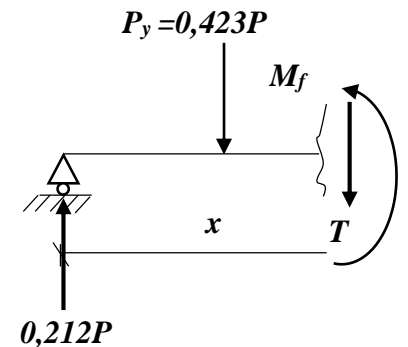
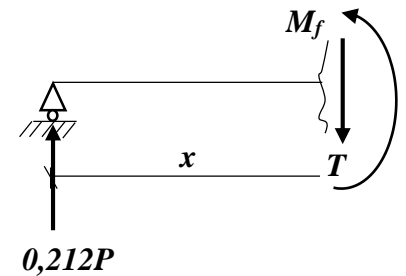
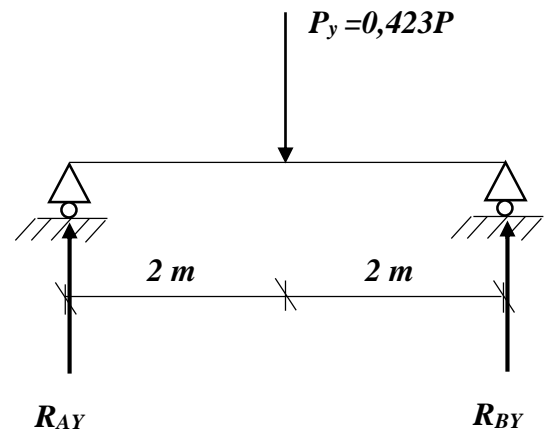
$$M_f(x) = 0,212P \cdot x \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow M_f(0) = 0 \text{ Kn.m} \\ x = 2 \Rightarrow M_f(2) = 0,423P \text{ Kn.m} \end{cases}$$

$$T(x) = 0,212P \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow T(0) = 0,212P \text{ Kn} \\ x = 2 \Rightarrow T(2) = 0,212P \text{ Kn} \end{cases}$$

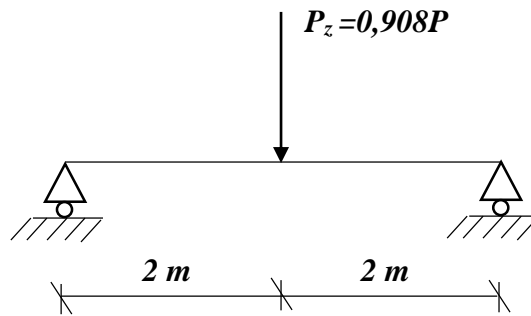
2^{ème} tronçon : $2 \leq x \leq 4$

$$M_f(x) = 0,212P \cdot x - 0,423P(x - 2) \quad \begin{cases} x = 2 \Rightarrow M_f(0) = 0,423P \text{ Kn.m} \\ x = 4 \Rightarrow M_f(2) = 0 \text{ Kn.m} \end{cases}$$

$$T(x) = 0,212P \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow T(0) = 0,212P \text{ Kn} \\ x = 2 \Rightarrow T(2) = 0,212P \text{ Kn} \end{cases}$$



b) Bilan des forces pour le plan « xoz » :



Calcul des réactions d'appuis

En équilibre statique :

$$\sum \vec{F}_x = \sum \vec{F}_y = \sum \vec{M}_y = \vec{0}$$

donc :

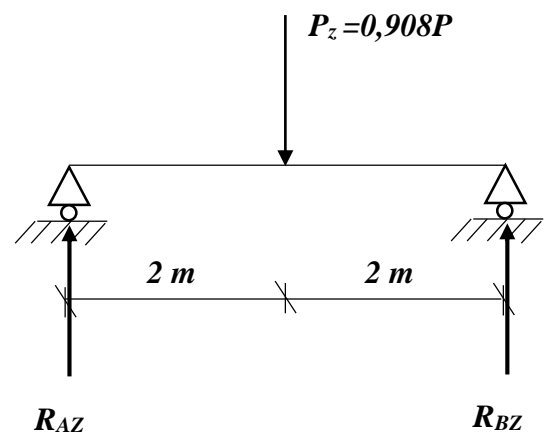
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{AZ} + R_{BZ} = P_z = 0,908P \dots\dots (*)$$

$$\Rightarrow \sum M_z / A = 0 \Rightarrow R_{BZ} \cdot 4 - P_z \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow R_{BZ} = \frac{P_z \cdot 2}{4} = \frac{0,908P \cdot 2}{4} = 0,454P \dots\dots (**)$$

On remplace (**) dans (*) on trouve :

$$R_{AZ} = R_{BZ} = 0,454P$$



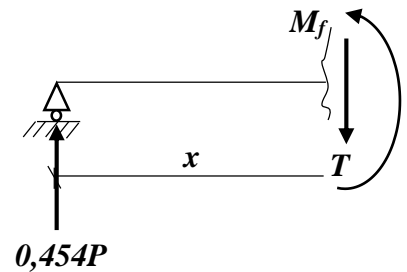
Par la méthode des sections on peut tracer

les diagrammes des efforts internes :

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 2$

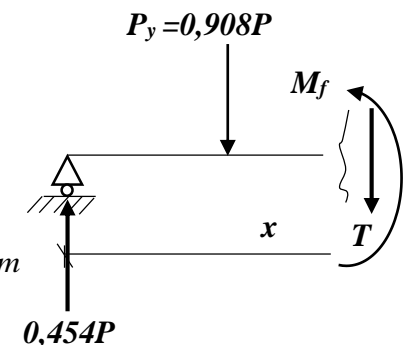
$$M_f(x) = 0,454P \cdot x \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow M_f(0) = 0 \text{ Kn.m} \\ x = 2 \Rightarrow M_f(2) = 0,908P \text{ Kn.m} \end{cases}$$

$$T(x) = 0,454P \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow T(0) = 0,454P \text{ Kn} \\ x = 2 \Rightarrow T(2) = 0,454P \text{ Kn} \end{cases}$$



2^{ème} tronçon : $2 \leq x \leq 4$

$$M_f(x) = 0,454P \cdot x - 0,908P(x - 2) \quad \begin{cases} x = 2 \Rightarrow M_f(0) = 0,908P \text{ Kn.m} \\ x = 4 \Rightarrow M_f(2) = 0 \text{ Kn.m} \end{cases}$$



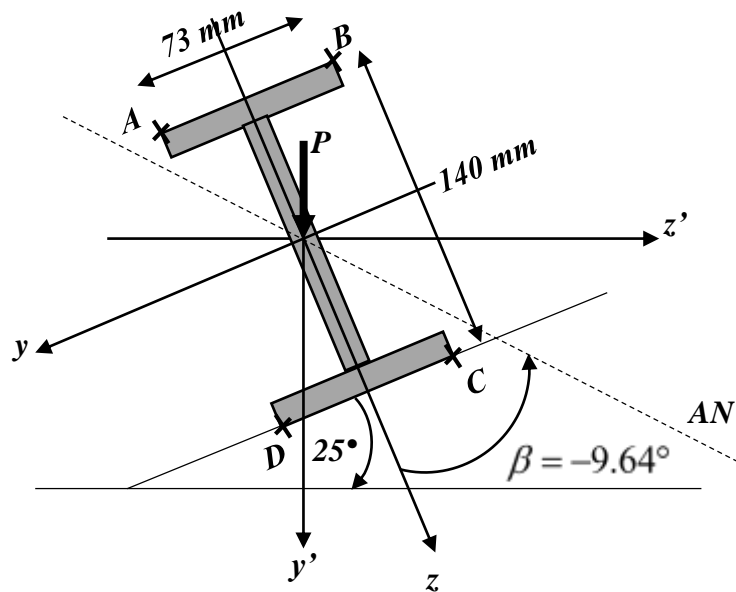


Figure 3.6 Position de l'axe neutre dans le plan.

C'est l'équation d'une droite passant par le centre de gravité de la section.

Le point le plus éloigné de l'axe neutre est le point B (-36,5 ; -70) donc la contrainte maximale située à ce point est donnée par :

$$\sigma_x^B = \frac{M_z}{I_z} y_B + \frac{M_y}{I_y} z_B = \frac{0,423P}{44,9 \cdot 10^4} \cdot (-36,5) + \frac{0,908P}{501,2 \cdot 10^4} \cdot (-70)$$

$$\Rightarrow \sigma_x^B = -0,047P \text{ Kn/mm}^2 = 47,06P \text{ MPa}$$

e) **Calcul à la résistance**

$$\sigma^{\max} \leq [\sigma] \Rightarrow \sigma_x^B \leq [\sigma] \Rightarrow 47,06P \leq 120 \Rightarrow P \leq 2,6 \text{ Kn}$$

2. FLEXION COMPOSEE

Une flexion est dite composée si, dans une section droite de la pièce, les efforts internes (N_x , M_z , T_y , M_y et T_z) agissant sur les axes principaux ne sont pas nuls (figure 3.7.)

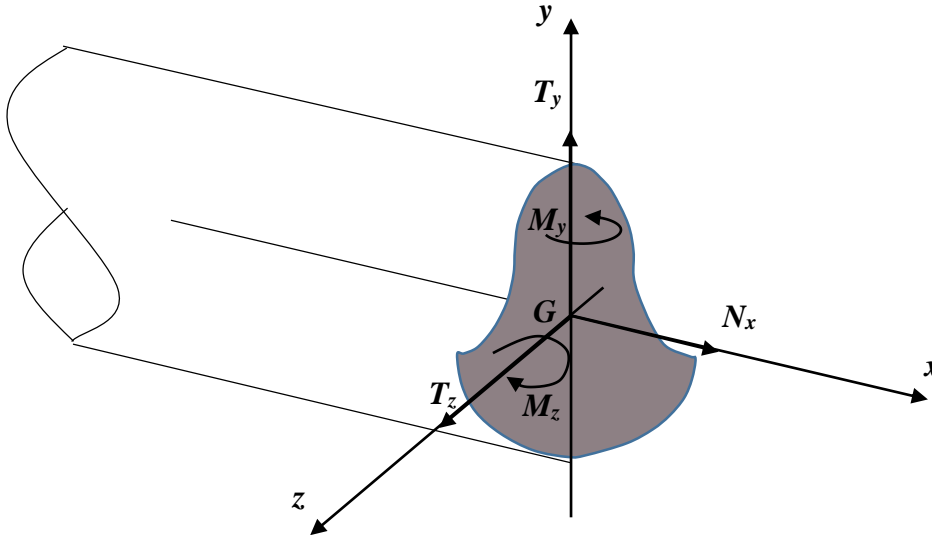


Figure 3.7 Flexion composée.

2.1 CONTRAINTE NORMALE

La contrainte normale est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \dots\dots\dots(3.12)$$

A : étant l'aire de la section droite de la pièce.

Equation de l'axe neutre

Soit un point $P(x_0; y_0)$ appartenant à l'axe AN .Alors :

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_0 + \frac{M_y}{I_y} z_0 = 0 \dots\dots\dots(3.13)$$

D'autre part (fig 3.7)

$$\begin{cases} N = P \\ M_z = P \cdot y_P \\ M_y = P \cdot z_P \end{cases} \dots\dots\dots(3.14)$$

En substituent équation [3.13] dans [3.14], on obtient:

$$1 + \frac{y_P}{i_z^2} y_0 + \frac{z_P}{i_y^2} z_0 = 0 \dots\dots\dots(3.15)$$

Avec:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} \text{ et } i_z^2 = \frac{I_z}{A} \dots\dots\dots(3.16)$$

i_y et i_z sont les rayons de giration.

2.2 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

La contrainte de cisaillement en un point est donnée par :

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \dots\dots\dots(3.17)$$

Avec:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \frac{T_y S_z}{b I_z} \\ \tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y} \end{cases} \dots\dots\dots(3.18)$$

2.3 CALCUL A LA RESISTANCE

Les étapes de calcul de la résistance sont :

- Déterminer les sections dangereuses (zones où les efforts internes sont maximum) et les points dangereux dans la section (Points les plus éloignés de l'axe neutre).
- Calculer la valeur de la contrainte normale et vérifier qu'elle est inférieure à la valeur de la contrainte admissible :

$$\sigma_x \leq \bar{\sigma} \dots\dots\dots(3.19)$$

$\bar{\sigma}$: Contrainte admissible du matériau.

2.4 CALCUL A LA RIGIDITE :

La flèche maximale doit satisfaire la condition :

$$f \leq \bar{f} \dots\dots\dots(3.20)$$

Remarque:

- Dans le cas de la flexion composée, l'axe neutre ne passe pas par le centre de gravité de la section transversale.
- σ_x est maximale pour les points les plus éloignés de l'axe neutre.
- Pour le calcul de la résistance, comme dans le cas de la flexion déviée il suffit de vérifier que : $\sigma_x \leq \bar{\sigma}$. le terme $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$ est négligeable.

2.5 APPLICATION :

Calculer la charge maximale P que peut supporter une console en **IPE140** en respectant les conditions de résistance. $[\sigma]=120 \text{ MPa}$.

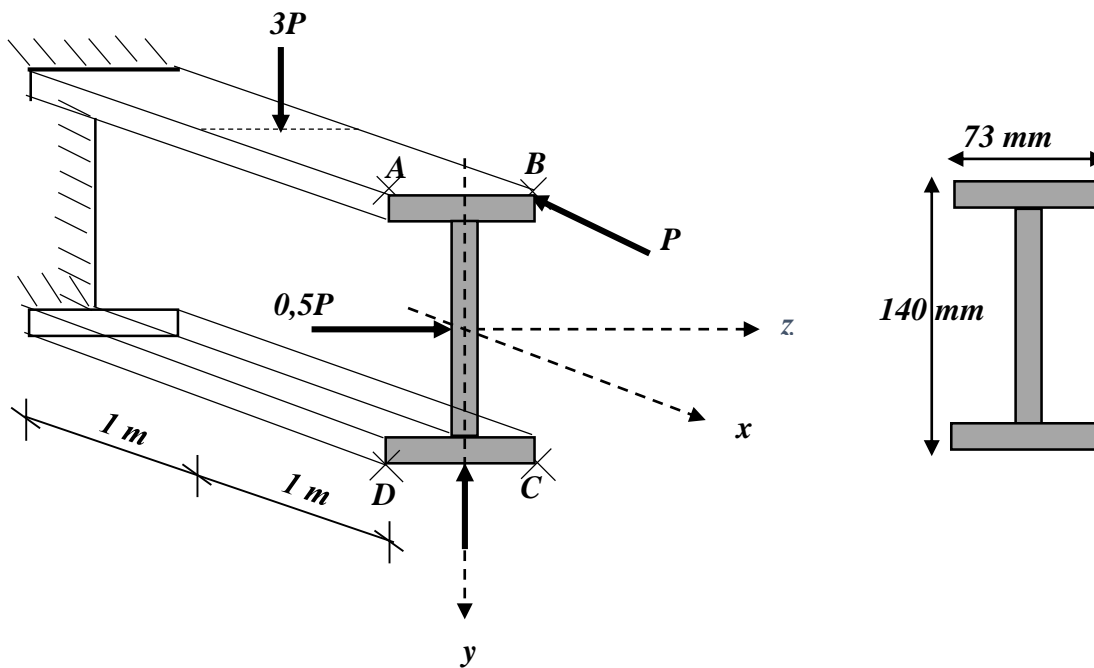


Figure 3.8 Console encastrée à une extrémité

2.5.1 Solution

Caractéristiques géométriques d'un IPE140 : $A=16,4 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$;

$I_y=541,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$; $I_z=44,9 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

a) Bilan des forces pour le plan « xoy » :

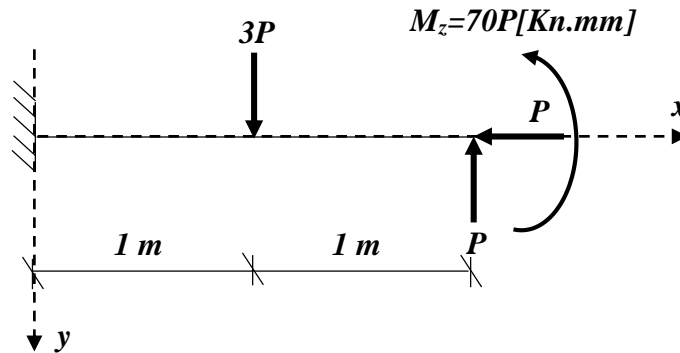


Figure 3.9 Bilan des forces dans le plan « xoy »

Calcul des moments :

$$M_z = P \cdot \frac{140}{2} \Rightarrow M_z = 70P \text{ [Kn.mm]}$$

Calcul des réactions d'appuis (d'encastrement)

En équilibre statique :

$$\sum \vec{F}_x = \sum \vec{F}_y = \sum \vec{M}_z = \vec{0} \text{ donc :}$$

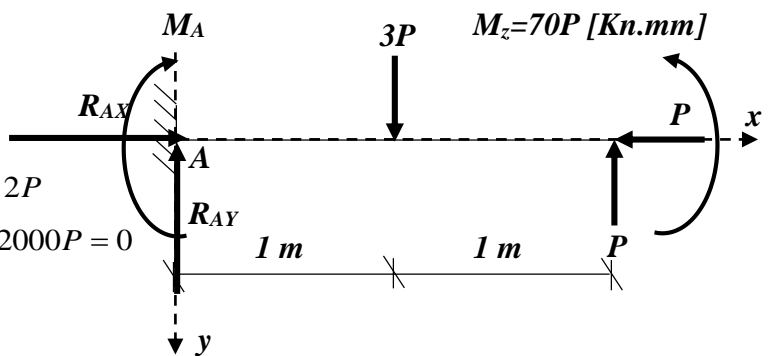
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_x - P = 0 \Rightarrow R_x = P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} - 3P + P = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 2P$$

$$\sum M_z / A = 0 \Rightarrow M_A - 70P + 3000P - 2000P = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 2000P + 70P - 3000P$$

$$\Rightarrow M_A = -930P$$



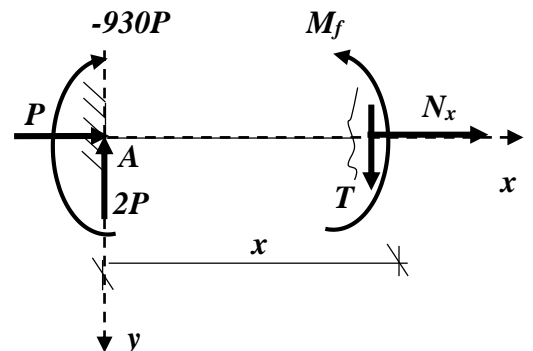
Par la méthode des sections on peut tracer

les diagrammes des efforts internes :

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 1000$

$$\sum F / x = 0 \Rightarrow N + P = 0 \Rightarrow N = -P$$

$$M_f(x) = 2P \cdot x - 930P \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow M_f(0) = -930P \text{ Kn.mm} \\ x = 1000 \Rightarrow M_f(1000) = 1070P \text{ Kn.mm} \end{cases}$$

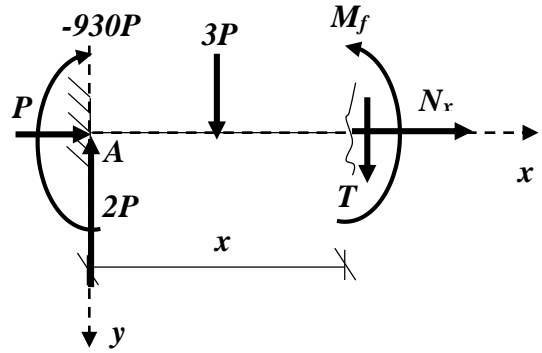


2^{ème} tronçon : $1000 \leq x \leq 2000$

$$\sum F / x = 0 \Rightarrow N + P = 0 \Rightarrow N = -P$$

$$M_f(x) = 2P \cdot x - 930P - 3P(x - 1000)$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow M_f(1000) = 1070P \text{ Kn.mm} \\ x = 1000 \Rightarrow M_f(2000) = 70P \text{ Kn.mm} \end{cases}$$



b) Bilan des forces pour le plan « xoz » :

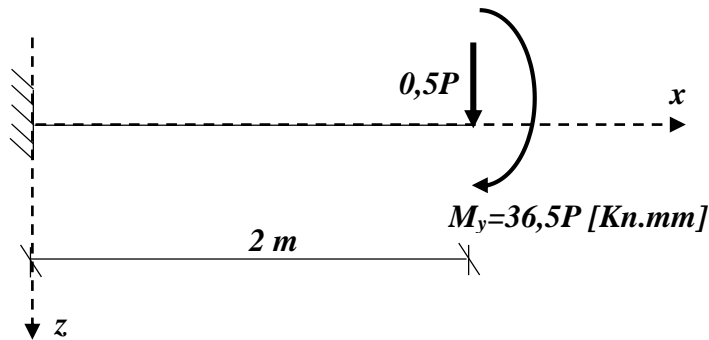


Figure 3.10 Bilan des forces dans le plan « xoz »

Calcul des moments :

$$M_y = P \cdot \frac{73}{2} \Rightarrow M_z = 36,5P [\text{Kn.mm}]$$

Calcul des réactions d'appuis (d'encastrement)

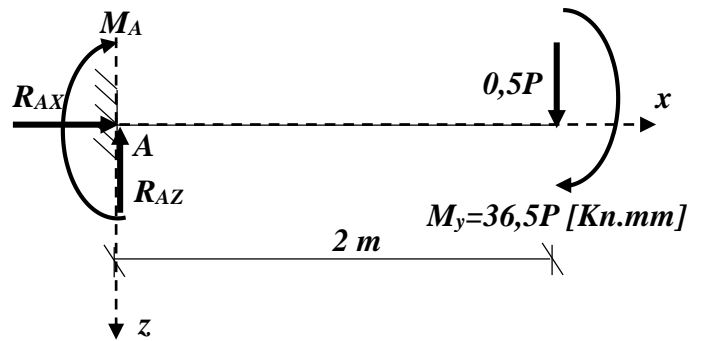
En équilibre statique :

$$\sum \vec{F}_x = \sum \vec{F}_z = \sum \vec{M}_y = \vec{0} ; \text{ donc:}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

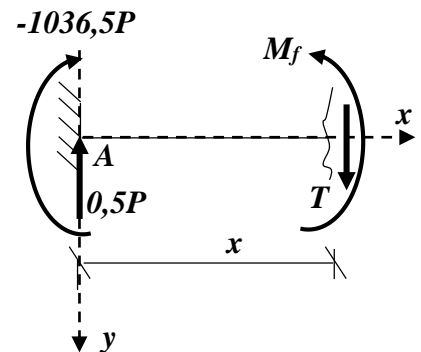
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow R_{Az} - 0,5P = 0 \Rightarrow R_{Az} = 0,5P$$

$$\begin{aligned} \sum M_y / A = 0 &\Rightarrow M_A + 36,5P + 0,5P \cdot 2000 = 0 \\ &\Rightarrow M_A = -1036,5P \end{aligned}$$



Par la méthode des sections on peut tracer

les diagrammes des efforts internes :



1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 2000$

$$M_f(x) = -1036P + 0,5P \cdot x \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow M_f(0) = -1036,5P \text{ Kn.mm} \\ x = 2000 \Rightarrow M_f(2000) = -36,5P \text{ Kn.mm} \\ x = 1000 \Rightarrow M_f(1000) = -536,5P \text{ Kn.mm} \end{cases}$$

c) Diagrammes des efforts internes

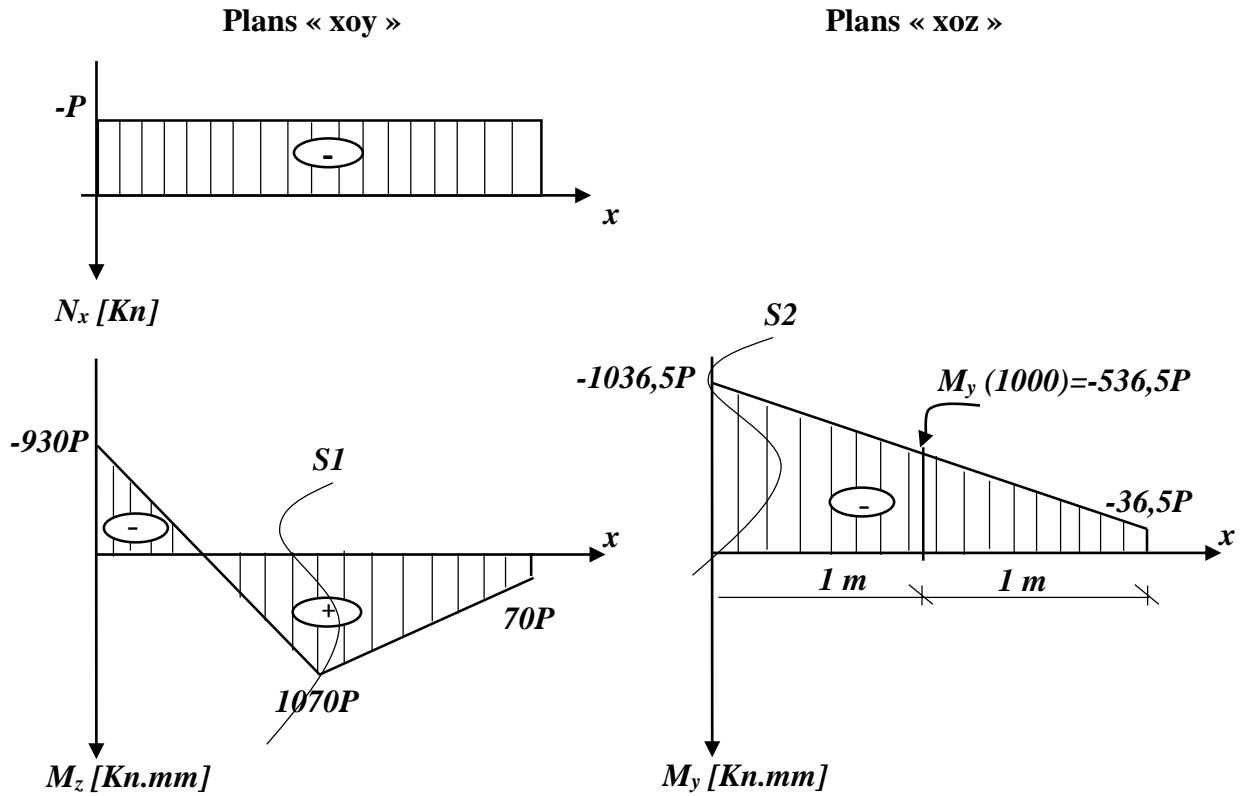


Figure 3.11 Diagrammes des efforts internes

d) Equation de l'axe neutre

A partir des diagrammes des efforts internes on remarque qu'il existe deux (02) sections dangereuses : *S1* et *S2*.

$$S_1 : \begin{cases} N_x = -P \\ M_z = -930P \\ M_y = -1036,5P \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} N_x = -P \\ M_z = 1070P \\ M_y = -536,5P \end{cases}$$

Pour la section *S1* :

$$\text{On a: } \sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Donc pour $x=0$

$$\sigma(0) = 0 \Rightarrow \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_0 + \frac{M_y}{I_y} z_0 = 0 \Rightarrow \frac{-P}{A} - \frac{930P}{I_z} y_0 - \frac{1036,5P}{I_y} z_0 = 0$$

Pour tracer l'axe neutre il suffit de définir deux points appartenant à cet axe ;

- on prend le point $E (y_0 ; z_0)$ de $y_0 = 0$ et on calcul la valeur de z_0 . Alors

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{-P}{A} - \frac{930P}{I_z} (0) - \frac{1036,5P}{I_y} z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{P}{A} \cdot \frac{-I_y}{1036,5P} = \frac{-I_y}{1036,5A}$$

$$z_0 = \frac{-541,2 \cdot 10^4}{16,4 \cdot 10^2 \cdot 1036,5} = -3,18$$

Donc $E (0 ; -3,18)$.

- On prend le point $G (y_0 ; z_0)$ de $z_0 = 0$ et on calcul la valeur de y_0 . Alors

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{-P}{A} - \frac{930P}{I_z} y_0 - \frac{1036,5P}{I_y} (0) = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{P}{A} \cdot \frac{-I_z}{930P} = \frac{-I_z}{930A}$$

$$y_0 = \frac{-44,9 \cdot 10^4}{16,4 \cdot 10^2 \cdot 930} = -0,29$$

Donc $G (-0,29 ; 0)$.

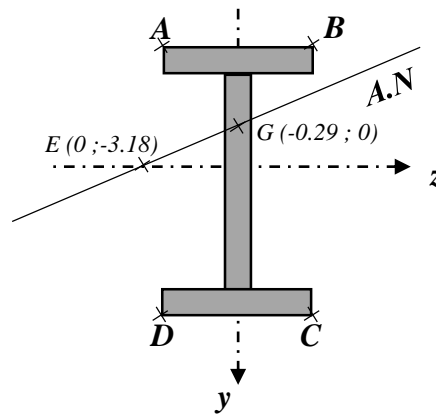


Figure 3.12 Position de l'axe neutre pour $S1$.

Le point le plus éloigné de l'axe neutre est le point $C (-70 ; -36,5)$ donc la contrainte maximale est située à ce point est donnée par :

$$\sigma_x^C = \frac{-P}{16,4 \cdot 10^2} - \frac{930P}{44,9 \cdot 10^4} (70) - \frac{1036,5P}{541,2 \cdot 10^4} (36,5)$$

$$\sigma_x^C = 0,152589P \approx 0,153P$$

e) Condition de résistance

$$\sigma^{\max} \leq [\sigma] \Rightarrow \sigma_x^C \leq 120 \Rightarrow 0,153P \leq 120 \Rightarrow P \leq 784,31N$$

$$P \leq 0,78KN \dots\dots\dots(1)$$

Pour la section S2 :

$$\text{On a: } \sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Donc pour $x=0$

$$\sigma(0) = 0 \Rightarrow \frac{N_x}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_0 + \frac{M_y}{I_y} z_0 = 0 \Rightarrow \frac{-P}{A} + \frac{1070P}{I_z} y_0 - \frac{536,5P}{I_y} z_0 = 0$$

Pour tracer l'axe neutre il suffit de définir deux points appartenant à cet axe ;

- on prend le point E' ($y_0 ; z_0$) de $y_0 = 0$ et on calcul la valeur de z_0 . Alors

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{-P}{A} + \frac{1070P}{I_z} (0) - \frac{536,5P}{I_y} z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{P}{A} \cdot \frac{-I_y}{536,5P} = \frac{-I_y}{536,5.A}$$

$$z_0 = \frac{-541,2 \cdot 10^4}{16,4 \cdot 10^2 \cdot 536,5} = -6,15$$

Donc $E' (0 ; -6,15)$.

- On prend le point G' ($y_0 ; z_0$) de $z_0 = 0$ et on calcul la valeur de y_0 . Alors

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{-P}{A} + \frac{1070P}{I_z} y_0 - \frac{536,5P}{I_y} (0) = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{P}{A} \cdot \frac{I_z}{1070P} = \frac{I_z}{1070.A}$$

$$y_0 = \frac{44,9 \cdot 10^4}{16,4 \cdot 10^2 \cdot 1070} = 0,26$$

Donc $G' (0,26 ; 0)$.

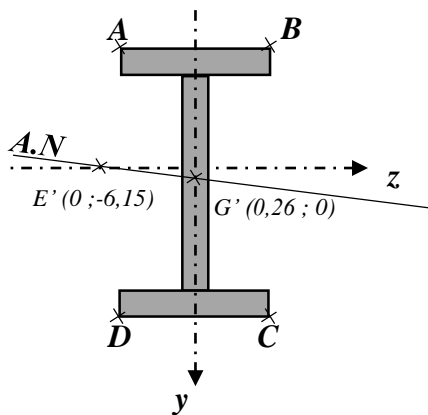


Figure 3.13 Position de l'axe neutre pour S2.

Le point le plus éloigné de l'axe neutre est le point $B (-70 ; 36,5)$ donc la contrainte maximale est située à ce point est donnée par :

$$\sigma_x^B = \frac{-P}{16,4 \cdot 10^2} + \frac{1070P}{44,9 \cdot 10^4} (-70) - \frac{536,5P}{541,2 \cdot 10^4} (36,5)$$

$$\sigma_x^B = 0,17P \approx 0,171P$$

f) Condition de résistance

$$\sigma^{\max} \leq [\sigma] \Rightarrow \sigma_x^B \leq 120 \Rightarrow 0,171P \leq 120 \Rightarrow P \leq 701N$$

$$P \leq 0,701KN \dots\dots\dots(2)$$

A partir d'équations (1) et (2) on trouve que :

$$P \leq 0,701KN$$

3. FLEXION-TORSION

Une pièce est en flexion –torsion si elle est soumise simultanément à la flexion et à la torsion pure.

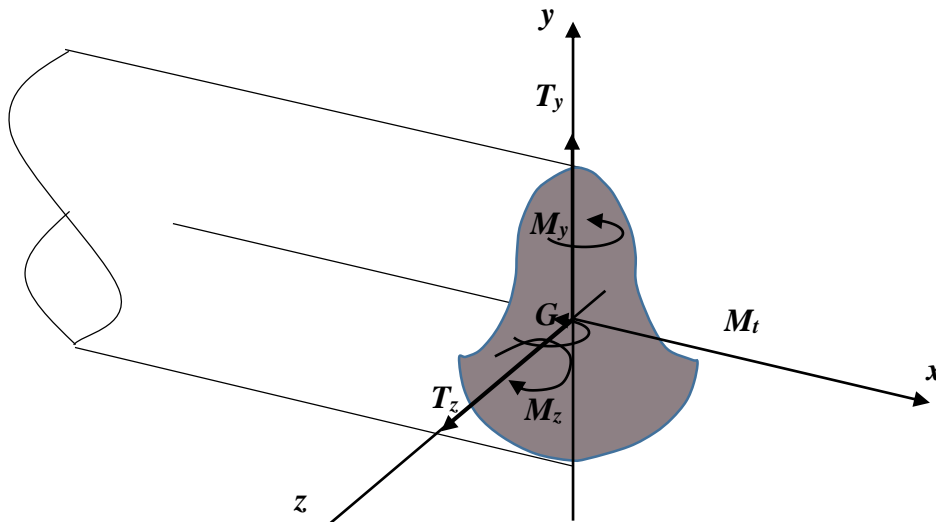


Figure 3.14 Flexion-torsion.

3.1 CONTRAINTE NORMALE

La contrainte normale est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \dots\dots\dots(3.21)$$

A : étant l'aire de la section droite de la pièce.

3.2 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

La contrainte de cisaillement en un point est donnée par :

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_t^2} \dots\dots\dots(3.22)$$

Avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = \frac{T_y S_z}{b I_z} \\ \tau_{xz} = \frac{T_z S_y}{b I_y} \\ \tau_t = \frac{M_t}{I_0} R \end{array} \right. \dots\dots\dots(3.23)$$

M_t : moment de torsion.

I_0 : moment d'inertie polaire.

R : rayon de la barre.

3.3 CALCUL A LA RESISTANCE

Les étapes de calcul de la résistance sont :

- Déterminer les sections dangereuses (zones où les efforts internes sont maximum) et les points dangereux dans la section (Points les plus éloignés de l'axe neutre).
- Evaluer la valeur de la contrainte normale, de la contrainte de cisaillement due à la torsion et vérifier si les valeurs calculées sont inférieures à la valeur de la contrainte admissible du matériau:

$$\sigma_x \leq \bar{\sigma} \quad \text{et} \quad \tau_t \leq \bar{\tau} \dots\dots\dots(3.24)$$

$\bar{\tau}$: Contrainte de cisaillement admissible du matériau.

Remarque :

- La condition de résistance est satisfaite si les conditions aux points les plus éloignés de l'axe neutre sont vérifiées.
- La contrainte de cisaillement due à la torsion n'est pas négligeable.
- Le calcul des sections circulaires creuses est similaire à celui des sections pleines.

3.4 APPLICATION :

Calculer le diamètre de la pièce en respectant les conditions de résistance.

$$\bar{\sigma} = 120 \text{ MPa} \text{ et } \bar{\tau} = 90 \text{ MPa}$$

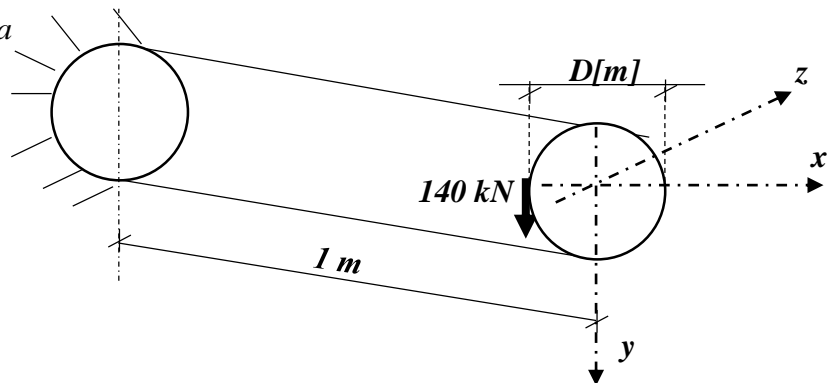


Figure 3.15 Console en flexion-torsion.

3.4.1 Solution

a) Système équivalent

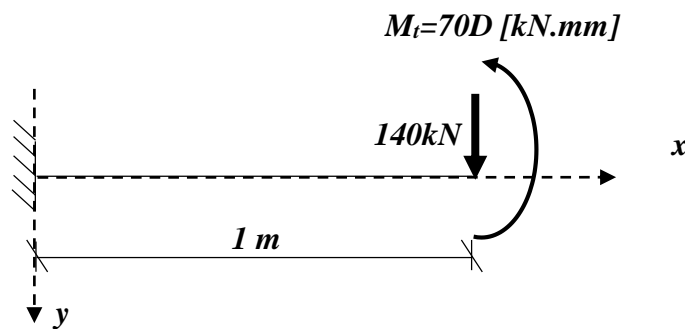


Figure 3.16 Système équivalent

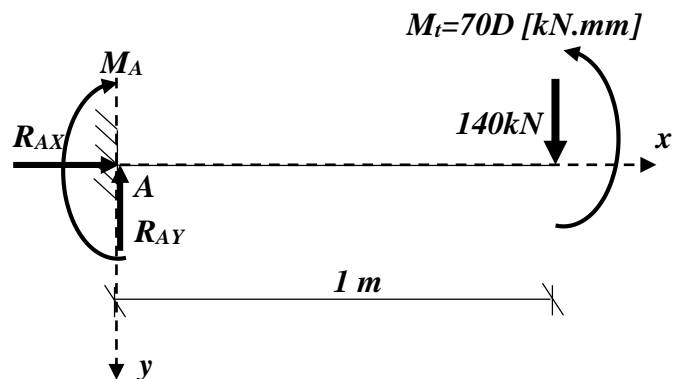
Calcul des moments :

$$M_t = 140 \cdot \frac{D}{2} \Rightarrow M_t = 70D [\text{Kn.mm}]$$

Calcul des réactions d'appuis (d'encastrement)

En équilibre statique :

$$\sum \vec{F}_x = \sum \vec{F}_z = \sum \vec{M}_y = \vec{0} ; \text{ donc:}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{AX} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{AY} - 140 = 0 \Rightarrow R_{AY} = 140 \text{ kN}$$

$$\sum M_z / A = 0 \Rightarrow M_A + 140 \cdot 1 = 0$$

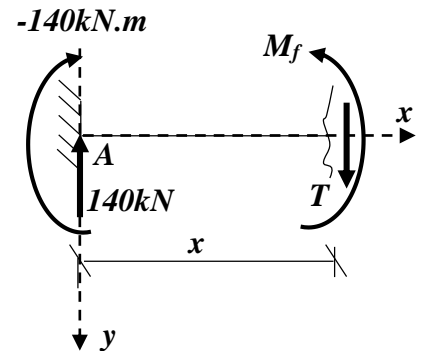
$$\Rightarrow M_A = -140 \text{ kN.m}$$

Par la méthode des sections on peut tracer

les diagrammes des efforts internes :

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 1$

$$M_f(x) = 140 \cdot x - 140 \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow M_f(0) = -140 \text{ kN.m} \\ x = 1 \Rightarrow M_f(1) = 0 \text{ kN.m} \end{cases}$$



b) Diagrammes des efforts internes

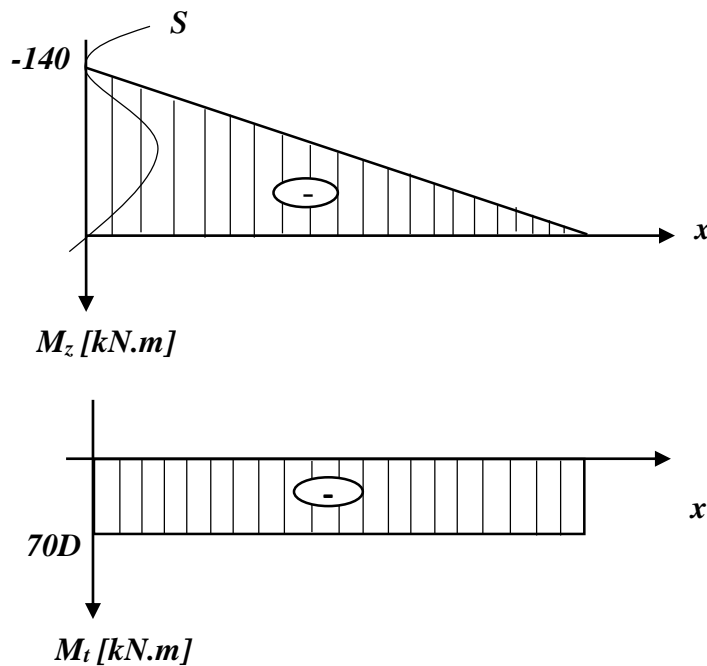


Figure 3.17 Diagrammes des efforts internes

c) Contrainte normale :

La contrainte normale maximale est donnée par l'équation :

$$\sigma_x^{\max} = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{140 \cdot 10^6}{\frac{\pi}{64} D^4} \cdot \frac{D}{2} = \frac{1,426 \cdot 10^9}{D^3} \leq 120 \Rightarrow D \geq 228,2 \text{ mm}$$

d) Contrainte tangentielle

La contrainte tangentielle due à la torsion est donnée par l'équation :

$$\tau_t = \frac{M_t}{I_0} R$$

$$M_t^{\max} = 70D \cdot 10^6 \text{ kN.m};$$

$$R^{\max} = \frac{D}{2}; \quad I_0 = \frac{\pi}{32} D^4$$

$$\tau_t^{\max} = \frac{M_t^{\max}}{I_0} R^{\max} \Rightarrow \tau_t^{\max} = \frac{70D \cdot 10^3}{\frac{\pi}{32} D^4} \frac{D}{2} = \frac{356,507 \cdot 10^3}{D^2} \leq 90$$

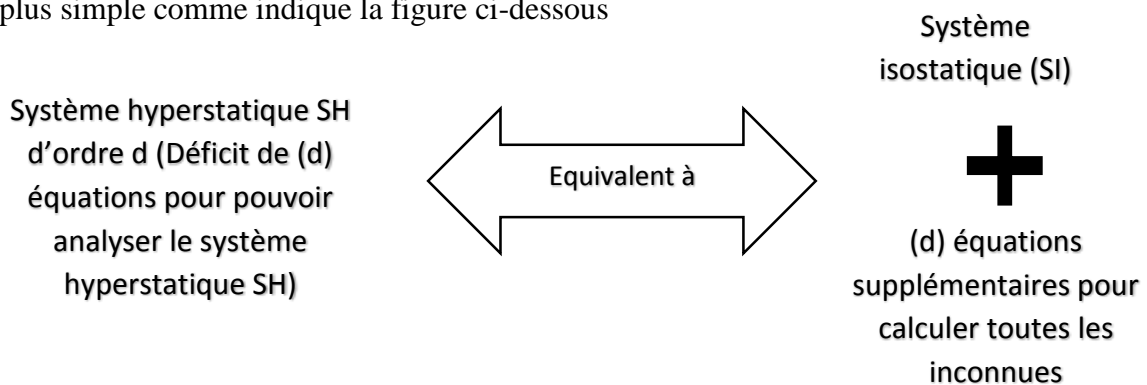
$$\Rightarrow D \geq 62,95 \text{ mm}$$

$$D' \text{ ou } D \geq 228,2 \text{ mm} \Rightarrow D \geq 230 \text{ mm}$$

CHAPITRE 4 RESOLUTION DES SYSTEMES HYPERSTATIQUES

INTRODUCTION

Un système est dite hyperstatique si le nombre d'inconnues de liaison est supérieur au nombre d'équations issues de la statique. Cette différence est appelée le degré d'hyperstaticité du système. Pour étudier et analyser une structure de degré d'hyperstaticité d , il est nécessaire d'établir équations supplémentaires (dites équations de compatibilités). Les méthodes consistent à choisir un système de base à partir duquel on détermine le système isostatique (SI) le plus simple comme indique la figure ci-dessous



En raison de l'interdépendance entre les efforts et les déplacements, il en résulte deux manières d'aborder le calcul des structures hyperstatiques, c'est-à-dire : soit en s'intéressant aux efforts (dans les liaisons surabondantes), soit en s'intéressant aux déplacements (méthode des déplacements).

1. CALCUL DU DEGRE D'HYPERSTATICITE :

Généralement, le nombre de liaisons surabondantes représente le degré d'hyperstaticité. Il existe deux raisonnements pour calculer ce degré:

1.1 RAISONNEMENT SUR APPUIS:

Le degré d'hyperstaticité $d_h = n - 2$. Si la poutre comporte un encastrement alors le degré d'hyperstaticité est augmenté d'une unité $d_h = d_h \text{ calculé} + 1$

Avec : n est le nombre des appuis



Figure 4.1 Degré d'hyperstaticité (raisonnement sur appuis)

1.2 RAISONNEMENT SUR TRAVÉE:

Le degré d'hyperstaticité $d_h = n - 1$. Si la poutre comporte un encastrement alors le degré d'hyperstaticité est augmenté d'une unité $d_h = d_h \text{ calculé} + 1$

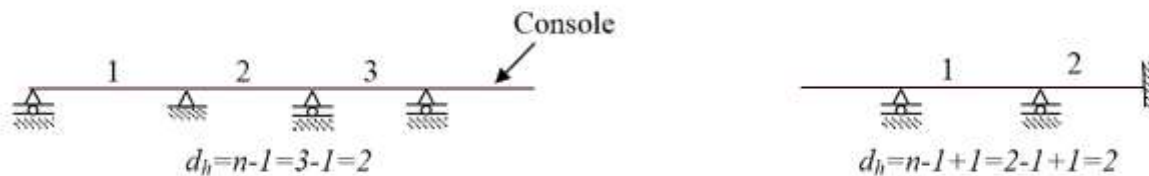


Figure 4.2 Degré d'hyperstaticité (raisonnement sur travée)

2. METHODE DES FORCES (OU DES COUPURES)

La méthode des forces (ou des coupures) est une des méthodes générales de calcul des systèmes hyperstatiques. Elle consiste à choisir, et déterminer, des inconnues hyperstatiques qui, une fois calculées, permettent de trouver les efforts en tout point de la structure devenue isostatique. Elle est basée sur le principe de superposition des effets des actions, et constitue une analyse globale élastique, limitée dans le cadre de ces notes, aux structures planes chargées dans leur plan dont la section des poutres est telle que le centre de torsion coïncide avec le centre de gravité.

2.1 DEFINITIONS

Une structure est dite statiquement déterminée ou isostatique lorsque toutes les réactions d'appui et tous les efforts intérieurs peuvent être déterminés par les seules équations de la statique. Dans le cas contraire, lorsqu'il y a trop peu d'équations, la structure est dite statiquement indéterminée ou hyperstatique. Le degré d'indétermination statique ou degré

d'hyperstaticité h d'une structure est alors égal au nombre de coupures simples nécessaires pour la rendre isostatique.

Rappelons que l'hyperstaticité d'une structure peut provenir de liaisons surabondantes avec le monde extérieur (hyperstaticité extérieure), auquel cas les coupures simples seront relatives aux appuis. Mais que l'hyperstaticité peut aussi provenir de liaisons surabondantes à l'intérieur de la structure même (hyperstaticité intérieure), auquel cas les coupures simples seront relatives aux efforts intérieurs M, N, V .

Le degré d'hyperstaticité total h est, bien sûr, égal à la somme du degré intérieur h_i et extérieur h_e .

Chaque coupure simple i modifiant le système en supprimant la liaison relative à une composante de réaction inconnue ou à un effort intérieur (en réalité deux efforts égaux et opposés) inconnu, fait disparaître cette composante ou cet effort qui correspond à une inconnue hyperstatique. Le nombre total h de coupures simples à effectuer pour rendre la structure isostatique est donc égal au nombre d'inconnues hyperstatiques du problème.

La structure isostatique déduite de la structure réelle sera appelée structure isostatique de référence S_0 . Il y a évidemment plusieurs structures isostatiques de référence possibles, pour la même structure de départ, puisque les coupures simples peuvent s'effectuer dans des sections quelconques. Il faudra néanmoins, faire particulièrement attention, en effectuant les coupures, à ne pas aboutir à un mécanisme.

On appellera X_j ($j=1, 2, \dots, h$) les inconnues hyperstatiques. Aux coupures associées à ces efforts, peuvent exister, dans la structure isostatique de référence S_0 , sous un chargement de celle-ci, des déplacements d_i ($i=1, 2, \dots, h$) appelés déplacements relatifs des bords de la coupure i . L'objectif de la méthode des forces (ou des coupures) est de déterminer les h inconnues hyperstatiques X_j d'une structure dont le degré d'hyperstaticité est h .

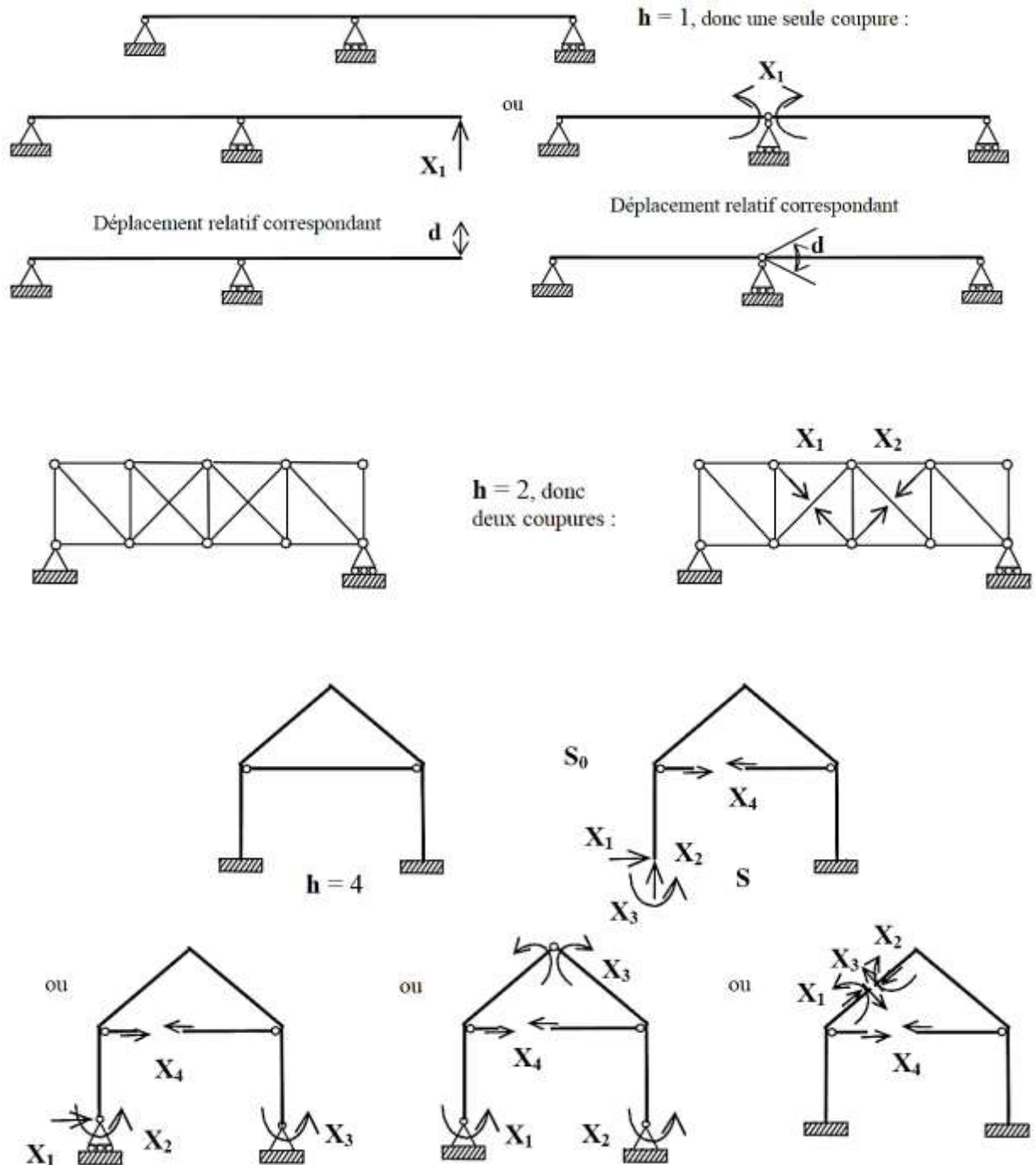


Figure 4.3 Représentation de la méthode des forces

2.2 COEFFICIENTS DE FLEXIBILITÉ F_{IJ} ET COEFFICIENTS F_{IP}

On appelle coefficient de flexibilité f_{ij} , le déplacement relatif des bords de la coupure i dans la direction i , dû à une force unité $X_j = 1$ agissant sur la coupure j , dans la direction j .

Dans cette définition, les termes force et déplacement doivent être considérés au sens généralisé. Ainsi, en cas de coupure relative à un appui, X_j peut désigner une force proprement

dite unitaire ou un moment unitaire, et en cas de coupure interne, X_j peut désigner une paire d'efforts intérieurs (M , N , ou V) unitaires. De même, f_{ij} peut représenter le déplacement proprement dit, ou la rotation, associé à une coupure d'appui, ou le déplacement proprement dit relatif, ou la rotation relative, associé à une coupure interne.

Exemple :

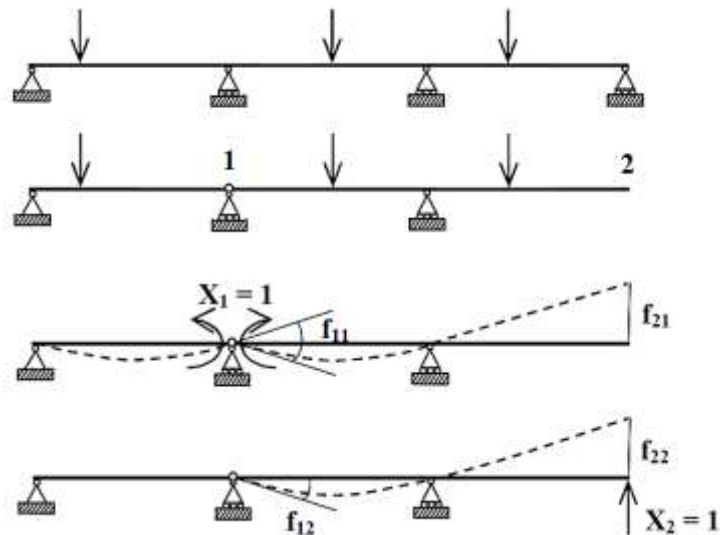


Figure 4.4 Coefficient de flexibilité

Le coefficient de flexibilité f_{ij} représentant un déplacement dans la structure isostatique de référence, peut être calculé par le théorème de la force unité :

$$f_{ij} = \int_0^{sr} \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int_0^{sr} \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_0^{sr} \frac{V_i V_j}{GA'} dx \dots \dots \dots (4.1)$$

Où : N_i , M_i , V_i sont les équations des efforts intérieurs, dans la structure iso de référence, sous à une charge virtuelle unitaire X_i appliquée en i (afin d'y obtenir le déplacement relatif) ; et : N_j , M_j , V_j sont les équations des efforts intérieurs, dans la structure iso de référence, sous l'inconnue hyperstatique unitaire X_j appliquée en j .

Il est important de noter qu'en vertu du théorème de réciprocité de **Betty-Maxwell**,
 $f_{ij} = f_{ji} \dots \dots \dots (4.2)$

On appelle coefficient f_{ip} , le déplacement relatif des bords de la coupure i dans la direction i , produit par les forces extérieures appliquées.

Dans cette définition, les termes force et déplacement doivent être considérés au sens généralisé. Ainsi, f_{ip} peut représenter le déplacement proprement dit, ou la rotation, associé à une coupure d'appui, ou le déplacement proprement dit relatif, ou la rotation relative, associé à une coupure interne.

Exemple :

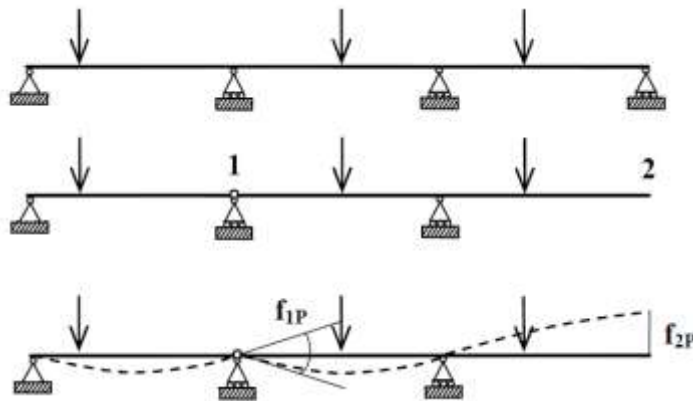


Figure 4.5 Déplacement représenté par coefficient de flexibilité f_{ip}

Le coefficient de flexibilité f_{ip} représentant un déplacement dans la structure isostatique de référence, peut être calculé par le théorème de la force unité :

$$f_{ip} = \int_0^{str} \frac{N_i N_p}{EA} dx + \int_0^{str} \frac{M_i M_p}{EI} dx + \int_0^{str} \frac{V_i V_p}{GA'} dx \dots\dots\dots(4.3)$$

Où : N_i, M_i, V_i sont les équations des efforts intérieurs, dans la structure iso de référence, sous à une charge virtuelle unitaire X_i appliquée en i (afin d'y obtenir le déplacement relatif) ; et : N_P, M_P, V_P sont les équations des efforts intérieurs, dans la structure iso de référence, dus à l'ensemble des forces extérieures appliquées.

2.3 EQUATION GENERALE DE LA METHODE DES FORCES

Considérons, à présent, la structure isostatique de référence chargée successivement et séparément par chaque inconnue hyperstatique X_j et par les forces réelles appliquées :

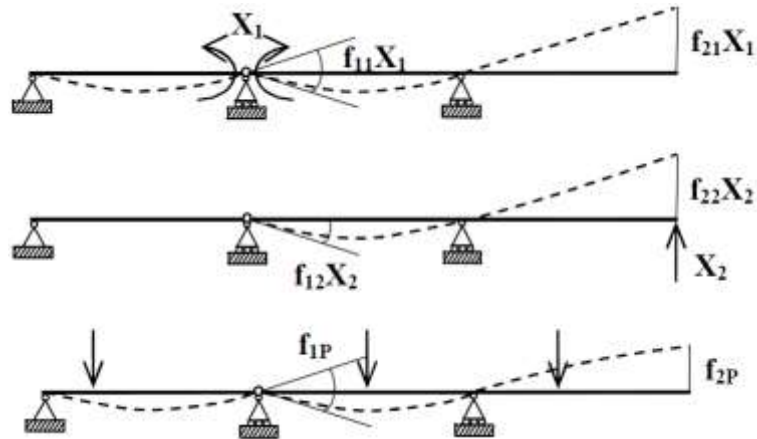


Figure 4.6 Structure isostatique de référence

En vertu du principe de superposition, nous pouvons considérer la structure hyperstatique (de degré h) réelle comme la superposition des $(h+1)$ états de la structure isostatique de référence, à condition d'imposer que les déplacements relatifs totaux des bords des coupures soient nuls, puisque dans la structure réelle, il n'y a pas de coupure. Si nous considérons la coupure i dans la direction i , elle sera le siège d'un déplacement relatif total d_i , somme des déplacements produits par chaque force inconnue X_j , soit $f_{ij} \cdot X_j$, et du déplacement dû aux forces extérieures appliquées, soit f_{ip} . Ce déplacement relatif devant être nul, on pourra donc écrire :

$$\sum_{j=1}^h f_{ij} \cdot X_j + f_{ip} = 0 \text{ pour tout } i=1,2,\dots,h \dots\dots\dots(4.4)$$

On obtient ainsi, par cette condition, un système de h équations à h inconnues X_j . Ces équations traduisent la condition de compatibilité des déplacements aux h coupures et constituent les équations de la méthode des forces.

Ces dernières peuvent également s'écrire sous forme matricielle : $[F].[X] = [A]$, avec :

- $[F]$: la matrice de flexibilité de la structure (tableau des coefficients f_{ij}), carrée $h \times h$ et symétrique ;
- $[X]$: le vecteur des inconnues hyperstatiques X_j ;
- $[A]$: le vecteur des déplacements f_{ip} changés de signe.

Une fois les h inconnues déterminées, la structure à résoudre est devenue isostatique. La

détermination des efforts intérieurs M, N, V dans la structure complète peut alors se faire de deux manières :

- soit en procédant, comme pour toute structure isostatique, par coupes et schémas rendus libres ;
- soit par superposition des diagrammes des $(h+I)$ structures isostatiques de référence, en remplaçant les forces unitaires par les valeurs des inconnues hyperstatiques.

2.4 DETERMINATION NUMERIQUE DES COEFFICIENTS F_{IJ} ET F_{IP}

Pour les poutres essentiellement fléchies, il est usuel de négliger les déformations dues aux efforts normaux et aux efforts tranchants devant celles dues aux moments de flexion. Dans ce cas, les expressions des coefficients f_{ij} et f_{ip} se ramènent

$$\text{à : } f_{ij} = \int_0^{str} \frac{M_i M_j}{EI} dx \text{ et à : } f_{ip} = \int_0^{str} \frac{M_i M_p}{EI} dx \dots\dots\dots(4.5)$$

Lorsqu'il s'agit de câbles ou de barres de treillis, ces éléments sont, uniquement ou principalement, le siège d'efforts normaux. Les expressions des f_{ij} et f_{ip} se réduiront alors à :

$$f_{ij} = \int_0^{str} \frac{N_i N_j}{EA} dx \text{ et } f_{ip} = \int_0^{str} \frac{N_i N_p}{EA} dx \dots\dots\dots(4.6)$$

Par ailleurs, on remarquera que toute intégrale intervenant dans les calculs des coefficients f_{ij} et f_{ip} , fait appel à deux efforts pouvant être de signes différents. Les coefficients f_{ij} et f_{ip} pourront donc être négatifs pour i et j .

Dans les applications numériques, le moment d'inertie de la section d'une poutre ou l'aire de la section d'un câble, sont souvent constants sur la longueur de l'élément. De plus, au vu des chargements habituellement considérés, les moments varient linéairement ou paraboliquement et les efforts normaux sont souvent constants ou peuvent être considérés comme tels. Il a, dès lors, été intéressant de calculer une série d'intégrales de type $\int_0^L M \cdot m \cdot dx$ en fonction des grandeurs caractéristiques des diagrammes rectangulaires, triangulaires, trapézoïdaux, et paraboliques, indépendamment des grandeurs EI ou EA (les fonctions M et m doivent être considérées avec leur signe relatif).

2.5 APPLICATION :

Soit la poutre droite hyperstatique représentée ci-dessous :

- 1- Calculer le degré d'hyperstaticité.
- 2- Déterminer les réactions aux appuis.

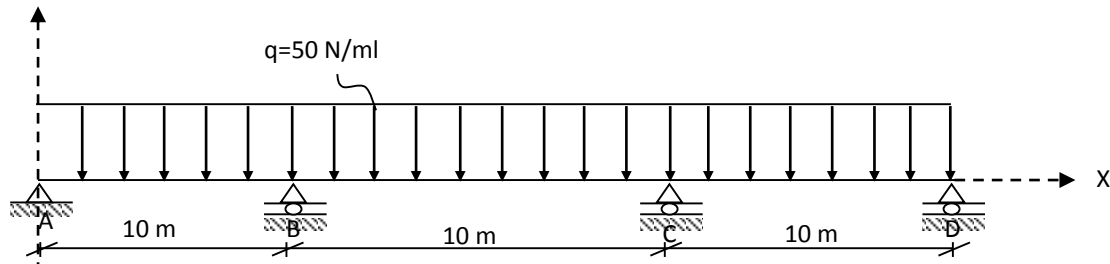


Figure 4.7 Console encastrée à une extrémité

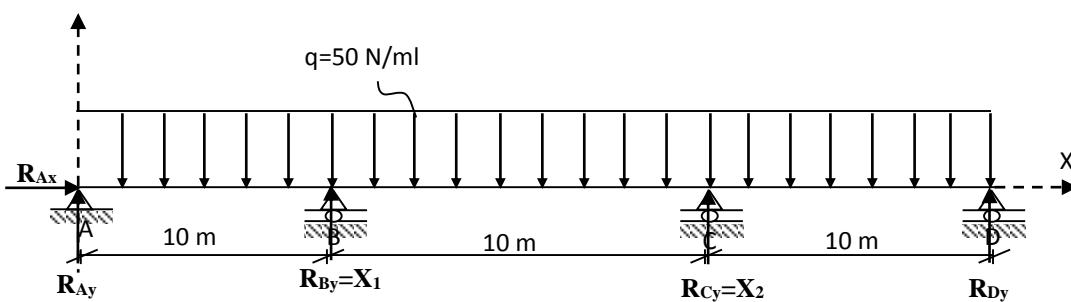
2.5.1 Solution

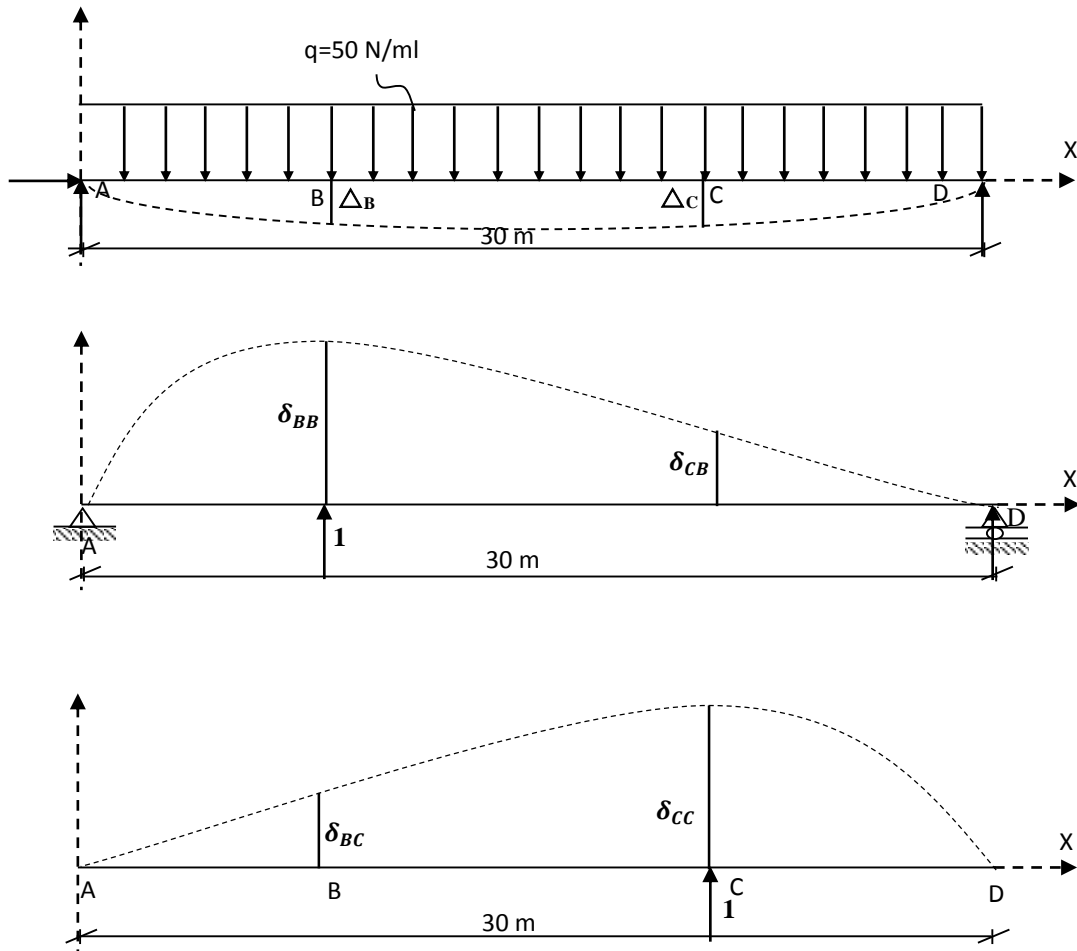
Le degré d'hyperstaticité :

$h = r - s$ avec : $r = 5$: nombre des inconnues ; $S = 3$: nombre des équations

Donc : $h = 5 - 3 = 2$

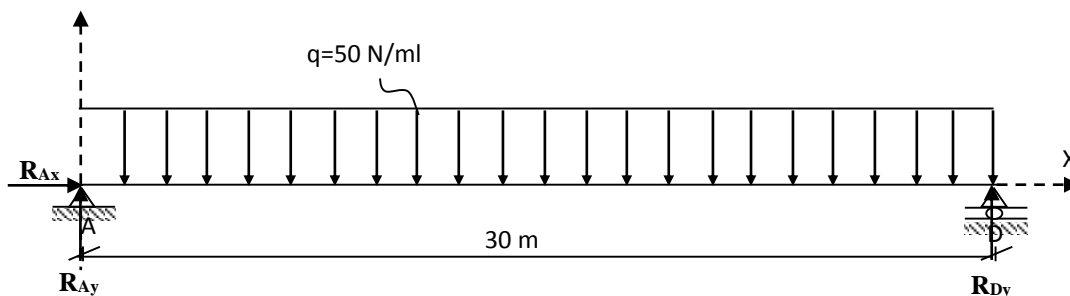
Détermination des réactions d'appuis :





$$\begin{cases} \Delta_B = R_{By} \cdot \delta_{BB} + R_{Cy} \cdot \delta_{BC} \\ \Delta_C = R_{By} \cdot \delta_{CB} + R_{Cy} \cdot \delta_{CC} \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation, on commence par le calcul de Δ_B
 $\Delta_B = ?$



En équilibre statique :

$$\sum \vec{F}_x = \sum \vec{F}_z = \sum \vec{M}_y = \vec{0} ; \text{ donc:}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{Dy} - 1500 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 1500 - R_{Dy}$$

$$\sum M_z / A = 0 \Rightarrow R_{Dy} \cdot 30 - 1500 \cdot 15 = 0 \Rightarrow R_{Dy} = 750 N$$

$$\Rightarrow R_{Ay} = R_{Dy} = 750 N$$

$$\Delta_B = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx$$

$$M(x) = ?$$

$$1^{er} \text{ tronçon} : 0 \leq x \leq 30$$

$$M(x) = 750 \cdot x - 50 \cdot \frac{x^2}{2} = 750 \cdot x - 25 \cdot x^2$$

$$m^*(x) = ?$$

$$1^{er} \text{ tronçon} : 0 \leq x \leq 10$$

$$m^*(x) = \frac{2}{3} \cdot x$$

$$2^{ème} \text{ tronçon} : 10 \leq x \leq 30$$

$$m^*(x) = \frac{2}{3} \cdot x - 1 \cdot (x - 10) = \frac{-x}{3} + 10$$

$$\Delta_B = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{10} (750 \cdot x - 25 \cdot x^2) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot x\right) \cdot dx + \int_{10}^{30} (750 \cdot x - 25 \cdot x^2) \cdot \left(10 - \frac{x}{3}\right) \cdot dx \right]$$

$$\Delta_B = \frac{1375000}{3EI}$$

$$\Delta_C = ?$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx$$

$$M(x) = 750 \cdot x - 50 \cdot \frac{x^2}{2} = 750 \cdot x - 25 \cdot x^2$$

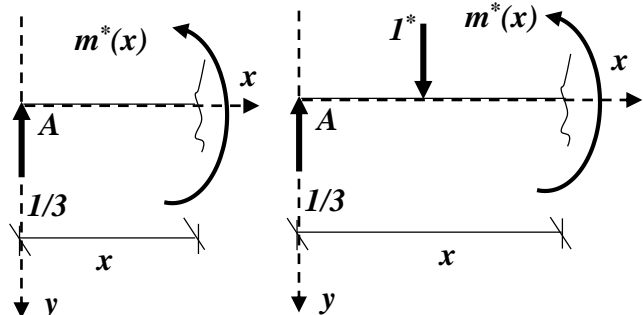
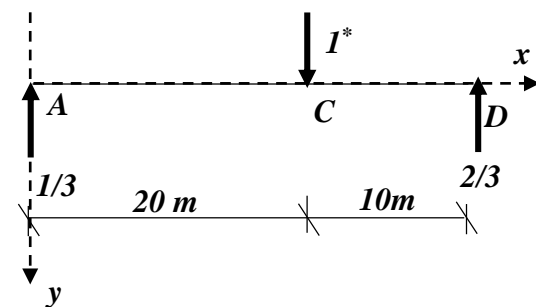
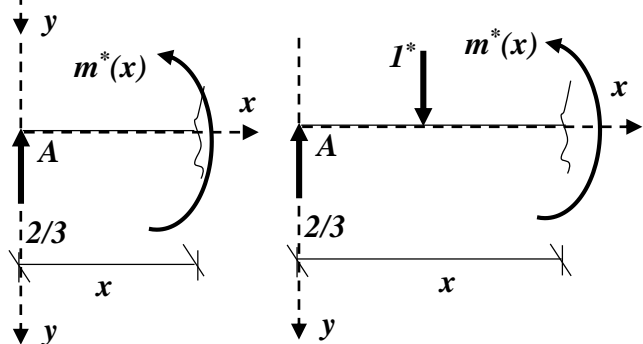
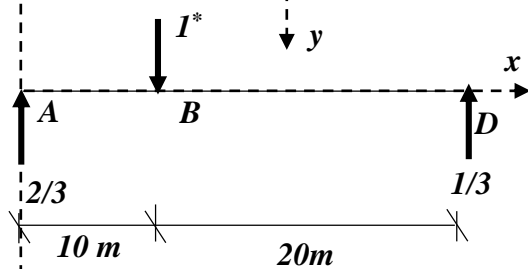
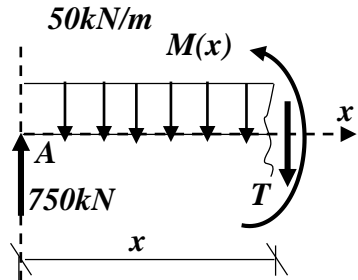
$$m^*(x) = ?$$

$$1^{er} \text{ tronçon} : 0 \leq x \leq 20$$

$$m^*(x) = \frac{x}{3}$$

$$2^{ème} \text{ tronçon} : 20 \leq x \leq 30$$

$$m^*(x) = \frac{x}{3} - 1 \cdot (x - 20) = \frac{-2 \cdot x}{3} + 20$$



$$\Delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{20} (750 \cdot x - 25 \cdot x^2) \cdot \left(\frac{x}{3}\right) \cdot dx + \int_{20}^{30} (750 \cdot x - 25 \cdot x^2) \cdot \left(20 - \frac{2x}{3}\right) \cdot dx \right]$$

$$\Delta_C = \frac{1375000}{3EI}$$

$$\delta_{BB} = ?$$

$$\delta_{BB} = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx$$

$$M(x) = ?$$

$$1^{er} \text{ tronçon : } 0 \leq x \leq 10$$

$$M(x) = \frac{-2x}{3}$$

$$2^{ème} \text{ tronçon : } 10 \leq x \leq 30$$

$$M(x) = \frac{-2x}{3} + x - 10 = \frac{x}{3} - 10$$

$$m^*(x) = ?$$

$$1^{er} \text{ tronçon : } 0 \leq x \leq 10$$

$$m^*(x) = \frac{-2x}{3}$$

$$2^{ème} \text{ tronçon : } 10 \leq x \leq 30$$

$$m^*(x) = \frac{-2x}{3} + 1 \cdot (x - 10) = \frac{x}{3} - 10$$

$$\delta_{BB} = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx$$

$$\delta_{BB} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{10} \left(\frac{-2 \cdot x}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2 \cdot x}{3}\right) \cdot dx + \int_{10}^{30} \left(\frac{x}{3} - 10\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - 10\right) \cdot dx \right]$$

$$\delta_{BB} = \frac{12000}{27EI}$$

$$\delta_{BC} = ?$$

$$\delta_{BC} = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx$$

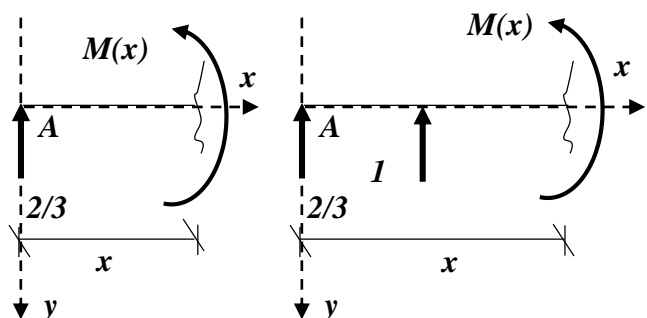
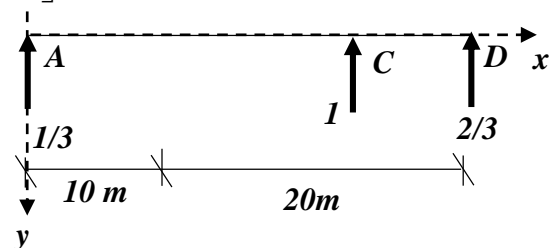
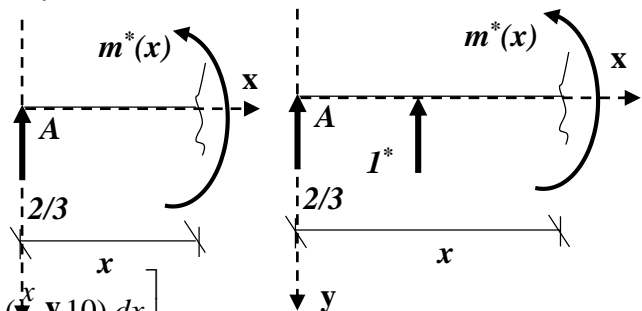
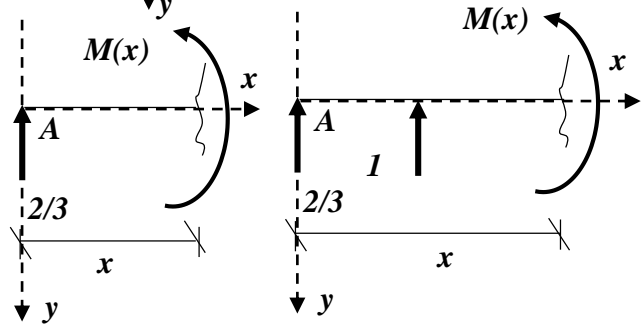
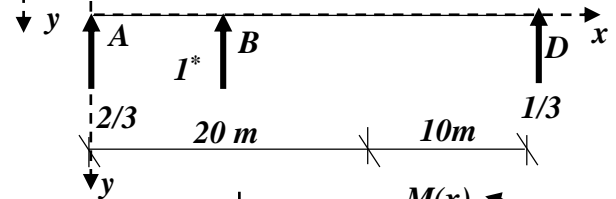
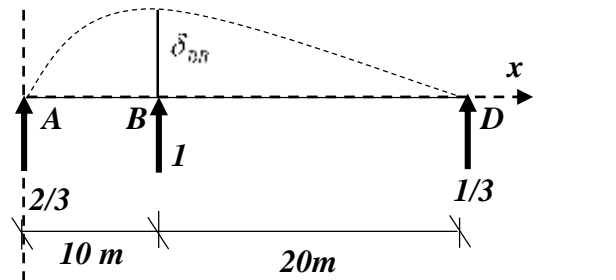
$$M(x) = ?$$

$$1^{er} \text{ tronçon : } 0 \leq x \leq 20$$

$$M(x) = \frac{-x}{3}$$

$$2^{ème} \text{ tronçon : } 20 \leq x \leq 30$$

$$M(x) = \frac{-x}{3} + 1 \cdot (x - 20) = \frac{2 \cdot x}{3} - 20$$



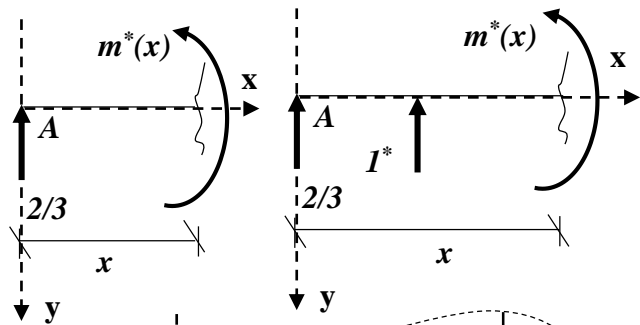
$$m^*(x) = ?$$

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 10$

$$m^*(x) = \frac{-2x}{3}$$

2^{ème} tronçon : $10 \leq x \leq 30$

$$m^*(x) = \frac{-2x}{3} + 1 \cdot (x - 10) = \frac{x}{3} - 10$$

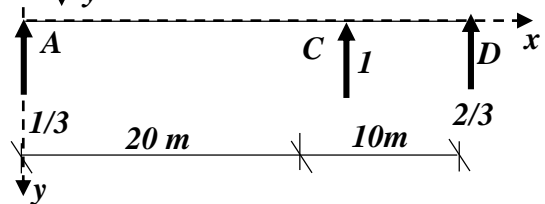
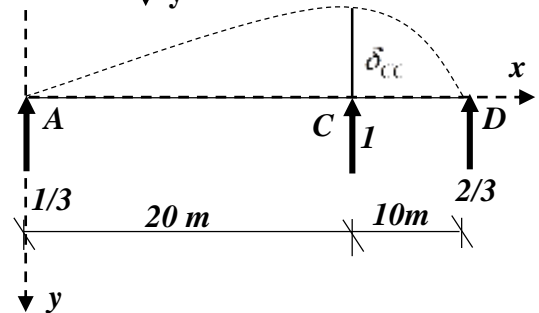


$$\delta_{BC} = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{10} \left(\frac{-x}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2x}{3}\right) \cdot dx + \int_{10}^{20} \left(\frac{2x}{3} - 20\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - 10\right) \cdot dx \right] +$$

$$\int_{20}^{30} \left(\frac{2x}{3} - 20\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - 10\right) \cdot dx$$

$$\delta_{BC} = \frac{10500}{27EI}$$



$$\delta_{CC} = ?$$

$$\delta_{CC} = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx$$

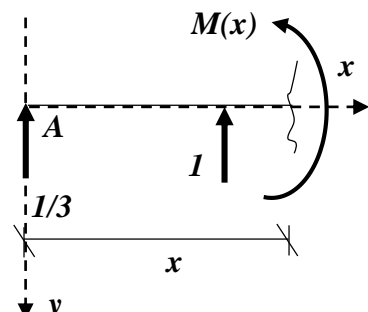
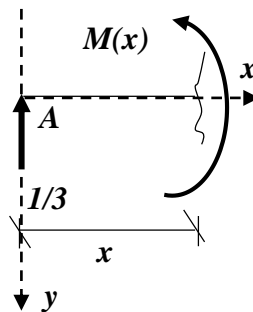
$$M(x) = ?$$

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 20$

$$M(x) = \frac{-x}{3}$$

2^{ème} tronçon : $20 \leq x \leq 30$

$$M(x) = \frac{-x}{3} + x - 20 = \frac{2x}{3} - 20$$



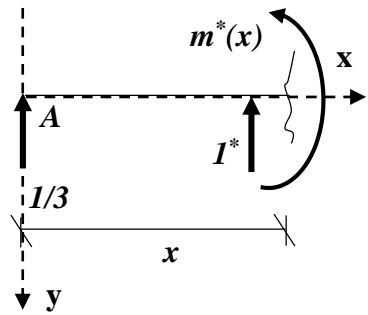
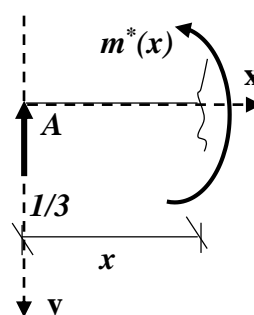
$$m^*(x) = ?$$

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 20$

$$m^*(x) = \frac{-x}{3}$$

2^{ème} tronçon : $20 \leq x \leq 30$

$$m^*(x) = \frac{-x}{3} + 1 \cdot (x - 20) = \frac{2x}{3} - 20$$



$$\delta_{CC} = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{20} \left(\frac{-x}{3}\right) \cdot \left(\frac{-x}{3}\right) \cdot dx + \int_{20}^{30} \left(\frac{2x}{3} - 20\right) \cdot \left(\frac{2x}{3} - 20\right) \cdot dx \right]$$

$$\delta_{CC} = \frac{12000}{27EI}$$

$$\delta_{CB} = ?$$

$$\delta_{CB} = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx$$

$$M(x) = ?$$

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 10$

$$M(x) = \frac{-2x}{3}$$

2^{ème} tronçon : $20 \leq x \leq 30$

$$M(x) = \frac{-2x}{3} + 1 \cdot (x - 10) = \frac{x}{3} - 10$$

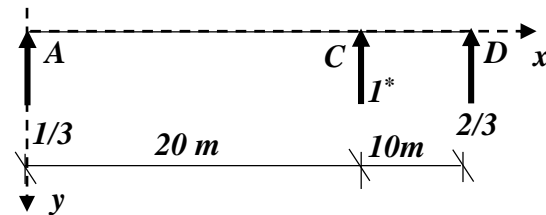
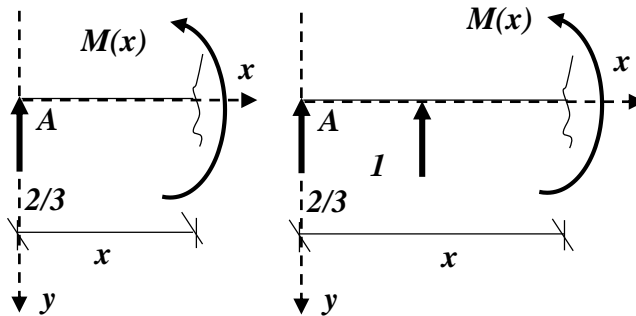
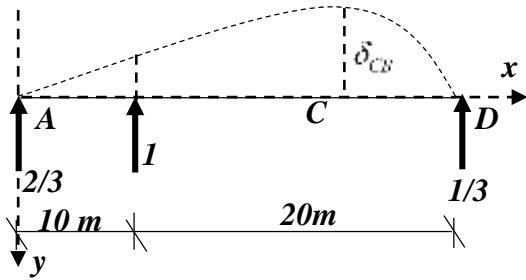
$$m^*(x) = ?$$

1^{er} tronçon : $0 \leq x \leq 20$

$$m^*(x) = \frac{-x}{3}$$

2^{ème} tronçon : $20 \leq x \leq 30$

$$m^*(x) = \frac{-x}{3} + 1 \cdot (x - 20) = \frac{2x}{3} - 20$$

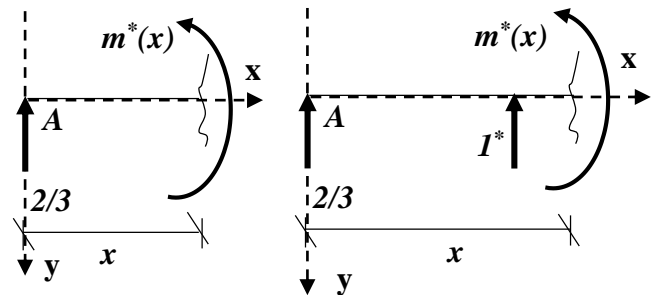


$$\delta_{CB} = \frac{1}{EI} \int_0^{30} M(x) \cdot m^*(x) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{10} \left(\frac{-x}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2x}{3}\right) \cdot dx + \int_{10}^{20} \left(\frac{-x}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - 10\right) \cdot dx \right]$$

$$+ \int_{20}^{30} \left(\frac{2x}{3} - 20\right) \cdot \left(\frac{x}{3} - 10\right) \cdot dx$$

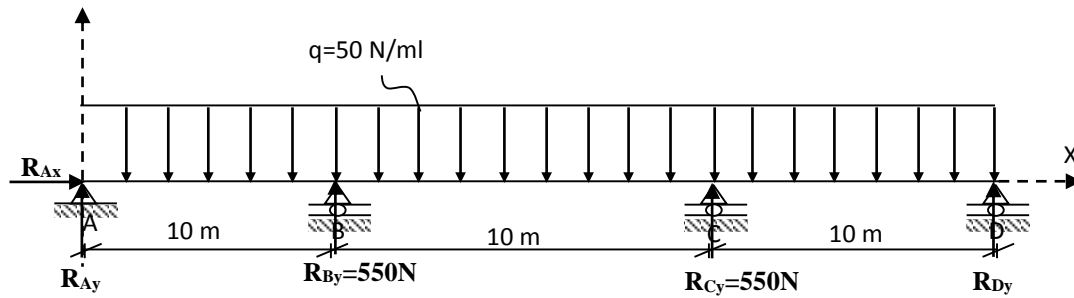
$$\delta_{CB} = \frac{10500}{27EI}$$



$$\text{Alors : } \Delta_B = \Delta_C = \frac{1375000}{3EI}; \quad \delta_{BB} = \delta_{CC} = \frac{12000}{27EI}; \quad \delta_{CB} = \delta_{BC} = \frac{10500}{27EI}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \Delta_B = R_{By} \cdot \delta_{BB} + R_{Cy} \cdot \delta_{BC} \\ \Delta_C = R_{By} \cdot \delta_{CB} + R_{Cy} \cdot \delta_{CC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1375000}{3EI} = B_y \cdot \frac{12000}{27EI} + C_y \cdot \frac{10500}{27EI} \\ \frac{1375000}{3EI} = B_y \cdot \frac{10500}{27EI} + C_y \cdot \frac{12000}{27EI} \end{cases}$$

On trouve : $\begin{cases} R_{By} = 550N \\ R_{Cy} = 550N \end{cases}$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} + 550 + 550 + R_{Dy} - 1500 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 1500 - 1000 - R_{Dy}$$

$$\sum M_z / A = 0 \Rightarrow R_{Dy} \cdot 30 + 550 \cdot 20 + 550 \cdot 10 - 1500 \cdot 15 = 0 \Rightarrow R_{Dy} = \frac{1500 \cdot 15 - 550 \cdot 20 - 550 \cdot 10}{30}$$

$$\Rightarrow R_{Dy} = 200N \quad ; \quad R_{Ay} = 200N \quad ; \quad R_{Ax} = 0N$$

CONCLUSION GENERALE

Ce polycopié de cours et d'exercices constitue une suite à la Résistance de matériaux enseignée en quatrième semestre, on abordera les sollicitations composées, les méthodes énergétiques et les systèmes hyperstatiques. L'objet de ce polycopié est de servir de guide selon le canevas de la troisième année Licence spécialité génie mécanique aux étudiants de génie mécanique et aux personnes souhaitant avoir une vue d'ensemble sur la résistance des matériaux.

Des références bibliographiques sont données ci-après pour permettre au lecteur d'approfondir chaque sujet abordé.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [01] **S. Timoshenk.** « Résistance des matériaux – Tome 1: Théorie élémentaire et problèmes ». 3^{ème} Ed. Dunod, Paris, 1968, 420p1405.
- [02] **A. Bazergui** « Résistance des matériaux », 3^{ème} Ed, Ecole Polytechnique de Montréal, 2002.
- [03] **M. Khelifa.** « Résistance des matériaux Cours et exercices corrigés », Ed Casteilla, - 9, rue Michael Faraday, 78180 Montigny-le-Bretonneux.2010
- [04] **K. Hadjazi.** « Résistance des matériaux ». Cours _Université d'Oran 2013
- [05] **Ir. Jacques Dehard.** « Calcul des structures hyperstatiques; La méthode des forces » Méthode des forces - Deh 2007
- [06] **S. Laroze** « Mécanique des structures – Tome 2 : Poutres ». Cépaduès-Editions. France, 2005
- [07] **A.Delaplace, F. Gatuingt, F. Ragueneau.** « Mécanique des structures –Résistance des matériaux ». Dunod, Paris, 2008
- [08] **R. El Fatmi** « Cours de résistance des matériaux : mécanique des poutres ». Ecole Polytechnique de Tunisie.
- [09] **P. Agati - N. Mattera.** « Manique appliques, Résistance des matériaux, Mécanique des fluides et Thermodynamique ».DUNOD, Paris, 1996
- [10] **Jean-Claude Doubrère.** « Résistance des matériaux Cours et exercices corrigés » 11^{ème} édition. Paris 2010.
- [11] **R. Montagner.** « Cours de Résistance des matériaux» 2^{ème} édition. Paris 1988.