



UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN - TIARET
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



Visa du Conseil Scientifique
de la Faculté CSF

POLYCOPIÉ DE COURS

TRAITEMENT DU SIGNAL

Élaboré par Dr. Slimani Helima
Maître de Conférences B

Avant Propos

Ce polycopié constitue un support pour le cours de Traitement du signal destiné aux étudiants de Master en génie mécanique correspondant au programme officiel actuel. Il intéresse notamment les étudiants de la spécialité maintenance industrielle.

Il a été rédigé dans le but de leur permettre d'avoir un outil de travail et de référence recouvrant les connaissances qui leur sont demandées.

Un nombre important de références bibliographiques ont été utilisées pour l'élaboration du présent manuscrit. Il traite les notions de base de l'analyse des signaux et spectres dans le but d'utilisation en maintenance et en détection des défauts.

Je souhaite bien que ce polycopié servira comme un outil de travail précieux pour les étudiants en Génie Mécanique mais aussi pour d'autres spécialités telles que : l'Electronique, Electrotechnique et l'Automatique.

Table des matières

Avant Propos

Nomenclature

Table des matières

Introduction générale 1

Chapitre – I – Généralités sur traitement du signal

1. Introduction	2
2- Objectifs de la théorie du signal.....	2
3-Traitement Des Signaux.....	3
4-Classifications Des Signaux.....	5
5-Principaux Signaux	8
6-Représentation fréquentielle	12

Chapitre – II – Traitement du signal analogique

1. Série de Fourier	13
2. Transformée de Fourier.....	14
3. Convolution.....	17
4. Notion de filtrage	18
5. Notion de modulation.....	22

Chapitre– III – Numérisation.

1. Introduction	26
2. Echantillonnage	27
2. Quantification.....	33
3. Codage.....	35

Chapitre – IV – Traitement du signal numérique

1. Introduction	38
2. Transformée de Fourier d'un signal discret.....	38
3. Notion de transformée de Fourier rapide TFR, Fast Fourier transform FFT.....	42

Bibliographique

Annexes

Nomenclature

<i>RSB</i>	Le rapport signal à bruit
<i>rect</i> $\left(\frac{t}{T}\right)$	La fonction rectangulaire
$\delta(t)$	Impulsion de Dirac
<i>sgn</i> (<i>t</i>)	La fonction signe
<i>Sinc</i> (<i>t</i>)	La fonction sinus cardinal.
<i>TF</i>	Transformée de Fourier
λ	La longueur d'onde
ω	Pulsation
φ	Angle de déphasage
<i>T_e</i>	Période d'échantillonnage
<i>f_e</i>	Fréquence d'échantillonnage
<i>CAN</i>	Convertisseur analogique-numérique
Δ	Le pas de quantification
<i>P_{nq}</i>	La puissance du bruit de quantification
<i>TFD</i>	Transformée de Fourier discret
<i>TFR</i>	Transformée de Fourier rapide.

Introduction générale

Le traitement du signal est devenu une science incontournable de nos jours : l'amélioration des performances des systèmes au cours des 20 dernières années est due à la plus grande partie à l'application des techniques de traitement de signal plutôt qu'au perfectionnement du matériel. Un *RADAR* actuel a des performances sans aucune mesure avec celle d'un *RADAR* de 1960 et cependant sa structure matérielle est sensiblement la même, mais les techniques de traitement de signal faisant appel à des traitements numériques sophistiqués permettent d'extraire de l'écho reçu une quantité beaucoup plus grande d'information.

Le but du traitement du signal est en effet d'extraire le maximum d'information utile sur un signal perturbé par le bruit.

On pense le plus souvent que le bruit est un signal aléatoire qui se superpose au signal utile, en réalité les notions de signal et de bruit sont très relatives.

L'objectif principal de ce cours est la caractérisation d'un signal dans le domaine temporel et fréquentiel pour aboutir à des modèles mathématiques. La description mathématique des signaux permet de concevoir et de caractériser des systèmes de traitement de l'information.

De cela, ce polycopié est composé de quatre chapitres : dans le premier chapitre, nous allons classifier les signaux et définir des notions de puissances. Nous aborderons les phénomènes aléatoires et les signaux dits déterministe.

Le deuxième chapitre est une sensibilisation à la décomposition d'un signal en série de Fourier. Nous aborderons des concepts plus mathématiques de la série de Fourier, de la Transformée de Fourier est les différentes techniques pour séparer le signal utile du signal bruit ainsi leur protection (filtrage, modulation).

Dans le troisième chapitre, nous aborderons la numérisation qui représente la conversion d'un signal analogique à un signal numérique selon les trois étapes : Echantillonnage, Quantification et Codage.

Enfin dans le 4^{ème} chapitre, nous aborderons des applications pour le Traitement du Signal Numérique, où on définit la Transformée de Fourier discrète (TFD) et rapide (TFR).

Chapitre I

Généralités sur le Traitement de Signal

Chapitre I : Généralités sur le Traitement de Signal

1. Introduction

1.1- Définition d'un signal : (Signal) vient du latin *signum* : signe ; variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information.

Un signal est donc une représentation physique de l'information, qu'il envoie de sa source à sa destination. C'est une expression d'un phénomène qui peut être mesurable par un appareil de mesure. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électronique, optique, etc.

Le mot signal est pratiquement toujours associé au mot bruit. Ce dernier est utilisé dans le langage commun, mais il revêt, dans la théorie du signal, un sens bien particulier.

1.2- Définition du Bruit : vient du latin populaire *brugere* : braire et *rugire* : rugir ; perturbation indésirable qui se superpose au signal et aux données utiles, dans un canal de transmission ou dans un système de traitement de l'information.

1.3- Définition (RSB) : le rapport signal à un bruit est le rapport des puissances du signal, P_S , et du bruit, P_B :

$$\text{RSB} = \frac{P_S}{P_B}, \quad (\text{I-1})$$

Ou en dB :

$$\text{RSB}_{\text{dB}} = 10 \cdot \log \left(\frac{P_S}{P_B} \right), \quad (\text{I-2})$$

Où \log est le logarithme décimal.

Le RSB mesure donc la qualité du signal.

2. Objectifs de la théorie du signal

L'objectif fondamental de la théorie du signal est de décrire de façon mathématique ce qu'est un signal ainsi que ses propriétés. Elle offre également les moyens d'analyser la nature des altérations ou modifications subies par les signaux lors de leur passage au travers de blocs fonctionnels (dispositifs généralement électriques ou électroniques).

A ce titre, il convient de distinguer deux branches du traitement du signal qui sont la théorie du signal et la théorie de l'information (Tableau I.1).

Tableau. I.1. Deux branches du traitement du signal.

<i>Théorie du signal</i>	<i>Théorie de l'information</i>
échantillonnage	codage
modulation	cryptographie
Analyse spectrale	
estimation	

La théorie du signal a pour but de décrire avec le plus d'informations possibles la nature du signal capté. Elle utilise un certain nombre de méthodes mathématiques telles que la transformation de Fourier, l'analyse fonctionnelle, l'analyse statistique ou les méthodes d'estimation. La première démarche commence par la reconnaissance du signal. La théorie de l'information concerne la façon de coder un signal ainsi que de le crypter (figure I.1).

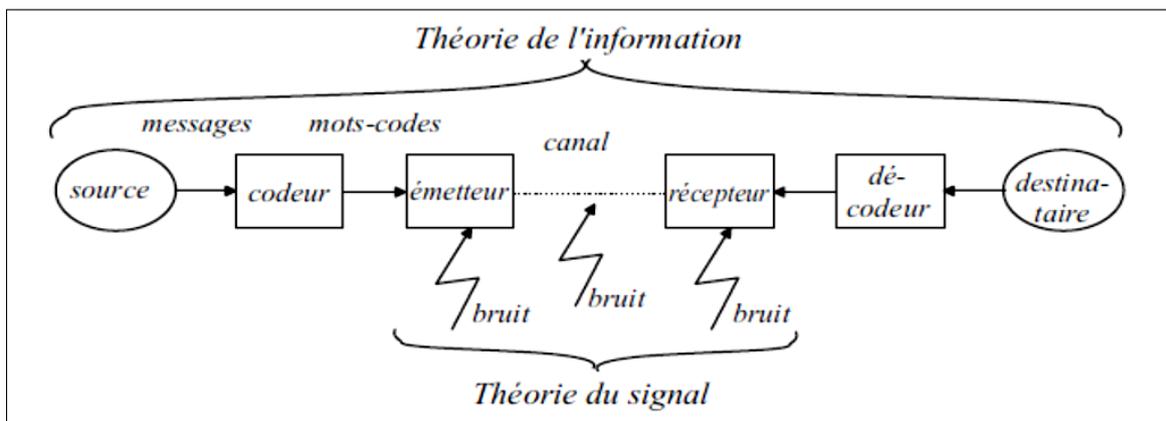


FIG. I.1 – Position des théories de l'information et du signal dans une chaîne de transmission de l'information.

3. Traitement Des Signaux

3.1-Définition : le traitement des signaux est la discipline technique qui, s'appuyant sur la théorie du signal et de l'information, les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information (figure I.2). Elle trouve son application dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation de ces informations.

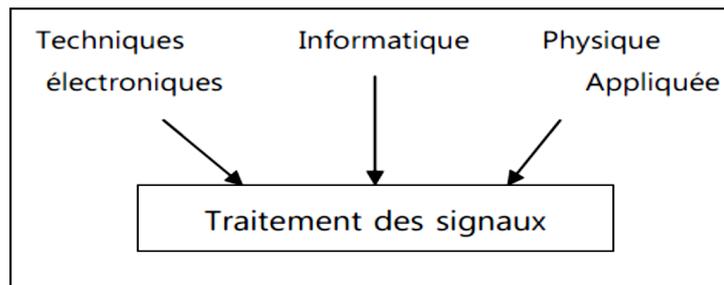


FIG. I.2 – Ressources technologiques de traitement des signaux.

3.2 - Domaines d'application : leur domaine d'application est très varié où on peut citer comme exemple (Télécommunication, Technique de mesures, Etude de vibration mécanique, surveillance de processus industriels, Radar, Acoustique, Traitement d'image, etc...).

3.3- Principales fonctions du traitement de signal

Les principales fonctions du traitement de signal sont :

- **L'analyse :** on cherche à isoler les composantes essentielles d'un signal de forme complexe, afin de mieux comprendre la nature et les origines.
- **La mesure :** mesurer un signal, en particulier aléatoire, c'est essayer d'estimer la valeur d'une grandeur caractéristique qui lui est associée avec un certain degré de confiance.
- **Le filtrage :** c'est une fonction qui consiste à éliminer d'un signal certain composant indésirable.
- **La régénération :** c'est une opération par laquelle on tente de redonner sa forme initiale à un signal ayant subis diverses distorsions.
- **La détection :** par cette opération on tente d'extraire un signal utile du bruit de fond qui lui est superposé.
- **L'identification :** c'est un procédé souvent complémentaire qui permet d'effectuer un classement du signal observé.
- **La synthèse :** opération inverse de l'analyse, consiste à créer un signal de forme appropriée en procédant, par exemple, à une combinaison de signaux élémentaires.
- **Le codage :** outre sa fonction de traduction en langage numérique, est utilisé soit pour lutter contre le bruit de fond, soit pour tenter de réaliser des économies de largeur de bande ou de mémoire d'ordinateur.
- **La modulation et le changement de fréquence :** sont essentiellement des moyens permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission, d'un filtre d'analyse ou d'un rapport d'enregistrement.

4. Classifications Des Signaux

La classification des signaux se base sur différents critères :

4.1- Classification selon le nombre de variables : le modèle mathématique d'un signal est une fonction d'une, deux ou trois variables : $x(t)$; $x(i, j)$; $x(i, j, t)$. Le premier cas est le plus courant : la variable t est usuellement le temps mais elle peut aussi représenter une autre grandeur (une distance par exemple), comme il est représenté dans le tableau I.2.

Tableau. I.2. Classification du signal selon le nombre de variables.

Exemple de signal	N. Variable(s)	Type de signal
Tension électrique $V(t)$ Spectre $X(f)$	1	Monodimensionnel (1-D)
Image $f(x, y)$	2	Bidimensionnel (2-D)
Pression $P(x, y, z)$	3	Tridimensionnel (3-D)
Onde EM. $U(x, y, z, t)$	N	Multidimensionnel

4.2- Classification phénoménologique

On met ainsi en évidence le type d'évolution du signal. Il peut être à caractère prédéterminé où il a un comportement non prévisible.

Un signal déterministe est un signal dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique approprié (figure I.3).

Au contraire, la plupart des signaux d'origine physique ont un caractère non reproductible.

Les signaux porteurs d'information (signaux de parole, d'image, et...) présentent une certaine imprévisibilité, ils seront modélisés par des signaux aléatoires (figure I.4).

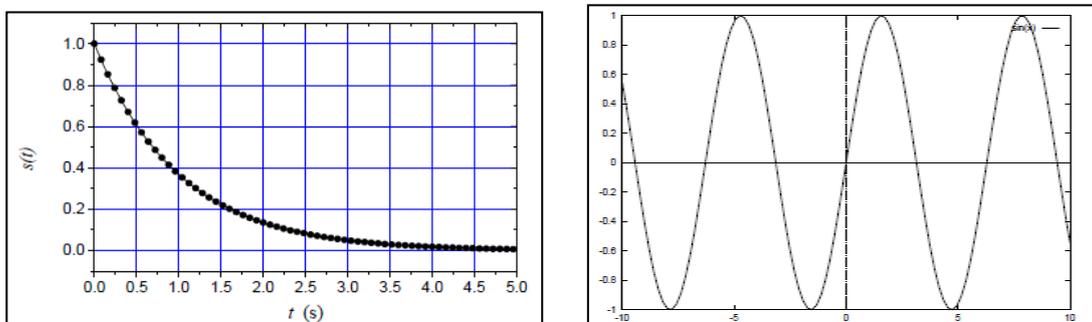


FIG. I.3 – Représentation des signaux déterministes.

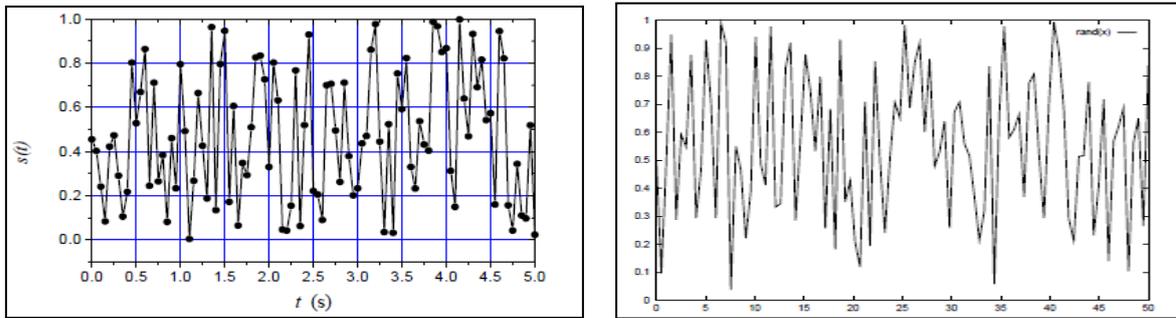


FIG. I.4 – Représentation des signaux Aléatoires.

On a souvent : Signal réel = Signal déterministe + Signal aléatoire.

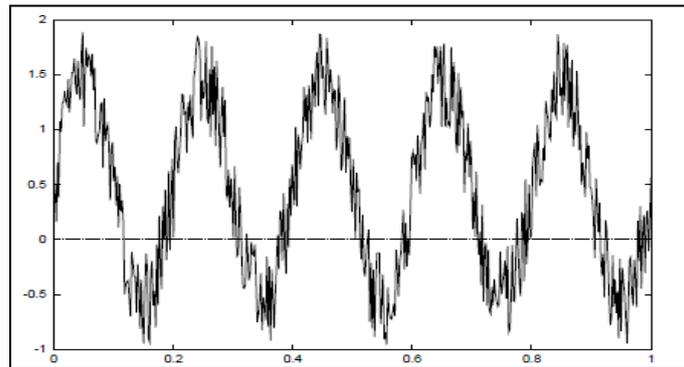


FIG. I.5 – Représentation d'un signal Réel.

4.3- Classification Signaux réels / Signaux complexes

- Si $x(t) \in \mathbb{R}$: signal réel.
- Si $x(t) \in \mathbb{C}$: signal complexe.
- **Notion usuelles :**
- Nombre complexe $j : j^2 = -1$
- Si $x(t) = a(t) + j b(t)$
- $\text{Re}[x(t)] = a(t)$: partie réelle.
- $\text{Im}[x(t)] = b(t)$: partie imaginaire.
- $|x(t)| = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$: Module.
- $\text{Arg}[x(t)] = \text{Artan}(b(t)/a(t))$: Argument.
- $X(t) = |x(t)|e^{j\text{Arg}[x(t)]}$: Autre forme d'écriture.
- $x^*(t) = a(t) - jb(t) = |x(t)|e^{-j\text{Arg}[x(t)]}$ complexe conjugué.

4.4- Classification Energétique

On distingue ici les signaux satisfaisant à une condition d'énergie finie à ceux présentant une puissance moyenne finie et une énergie infinie. On appellera énergie d'un signal $x(t)$ la quantité :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x^2(t)| dt \quad (\text{I-3})$$

Et la puissance moyenne de $x(t)$ la quantité :

$$P_x = T \rightarrow \infty \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x^2(t)| dt \quad (\text{I-4})$$

La première catégorie comprend les signaux de type transitoire qu'ils soient déterministes ou aléatoires (exemple une impulsion carré ou gaussienne) et la deuxième catégorie englobe les signaux de type permanent, périodique, déterministe et les signaux aléatoires permanents.

4.5 - Classification morphologique

Selon que le signal $x(t)$ où la variable t est continu ou discret ($t_k = kT$) on distingue quatre types de signaux (figure I.6):

- Le signal à amplitude et temps continu appelé couramment *signal analogique*.
- Le signal à amplitude discret et temps continu appelé *signal quantifié*.
- Le signal à amplitude continue et temps discret appelé *signal échantillonné*.
- Le signal à amplitude discret et temps discret appelé *signal numérique*.

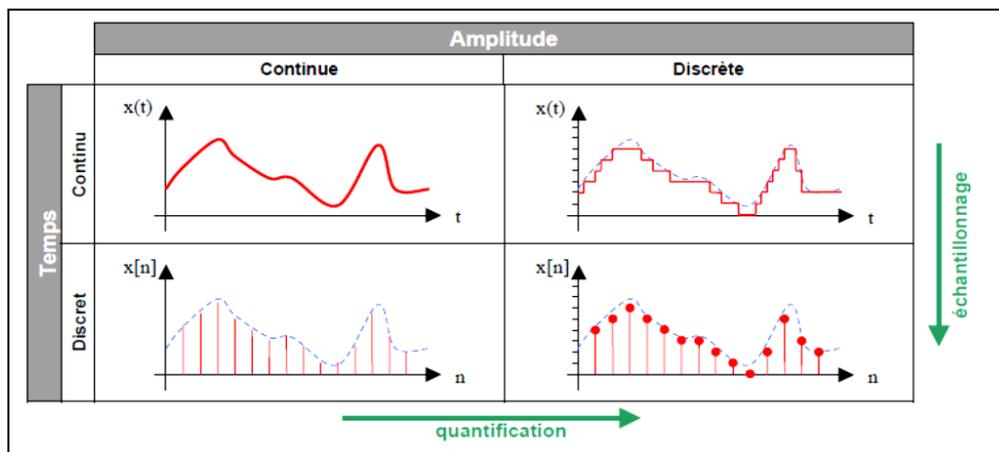


FIG. I.6 – Classification morphologique.

4.6- Classification spectrale

L'analyse spectrale d'un signal (ou la répartition énergétique en fonction de la fréquence) conduit à la classification suivante :

- Signaux de basses fréquences.

- Signaux de hautes fréquences.
- Signaux à bande étroite.
- Signaux à large bande.

La largeur de bande B d'un signal est le domaine principale des fréquences occupé par son spectre. Elle est définie par la relation : $f_2 - f_1$ avec $0 \leq f_1 < f_2$, où f_1 et f_2 sont des fréquences caractéristiques dénotant respectivement les limites inférieure et supérieure prises en compte.

Un signal dont le spectre est nul en dehors d'une bande de fréquences spécifiée B est appelé signal à bande limité ou de spectre à support borné.

On distingue aussi :

■ **Signaux de durée finie**

Les signaux dont l'amplitude s'annule en dehors d'un intervalle de temps T, $x(t) = 0$. Pour $t \in T$ sont appelés signaux de durée limitée ou à support borné.

■ **Signaux bornée en amplitude**

C'est le cas de tous les signaux physiquement réalisable pour lesquels l'amplitude ne peut pas dépasser une certaine valeur limite, souvent imposée par des dispositifs électroniques de traitement. On a dans ce cas :

$$|x(t)| \leq K \text{ pour } -\infty < t < +\infty \quad (\text{I-5})$$

■ **Signaux pairs et impairs**

Un signal est pair si $X(t) = X(-t)$; il est impair si : $X(t) = -X(-t)$

Ce qui implique que tout signal réel peut être décomposé en une partie paire et une partie impaire : $x(t) = X_p(t) + X_i(t)$ (I-6)

■ **Signaux causals**

Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps:

$$X(t) = 0 \text{ pour } t < 0. \quad (\text{I-7})$$

5. Principaux Signaux

Pour étudier ou tester un système électronique, on a recours à des signaux tests connus. Les signaux élémentaires les plus utilisés sont représentés par les fonctions suivantes :

5.1- Fonction rectangulaire

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \left|\frac{t}{T}\right| < \frac{1}{2} \\ 0 \text{ pour } \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{I-8})$$

- Représenté par la figure (I.7)

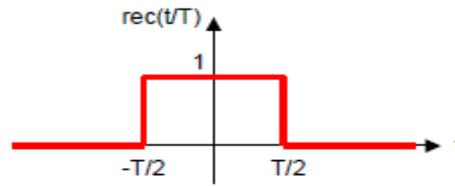


FIG. I.7– Construction d'une Fonction rectangulaire.

On l'appelle aussi fonction porte.

5.2- Fonction Echelon

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (\text{I-9})$$

- Définit par la figure (I.8).

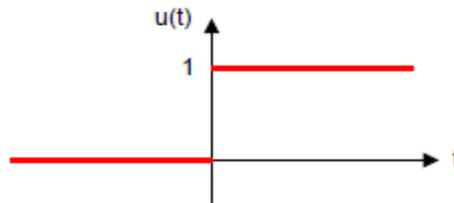


FIG. I.8 – Construction d'une Fonction Echelon.

5.3- Fonction impulsion de Dirac

- L'impulsion de Dirac $\delta(t)$, aussi appelée impulsion unité ou distribution delta, physiquement est la limite quand T tend vers 0 du signal suivant, figure (I.9).

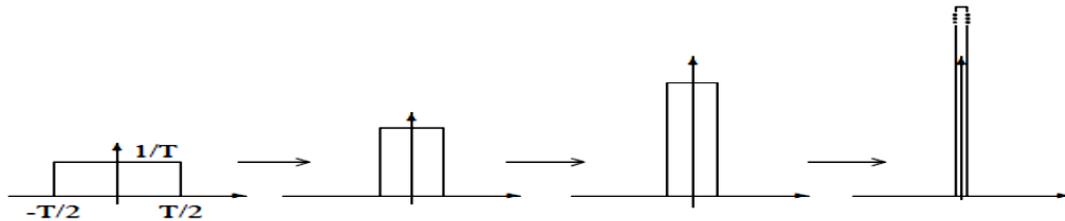


FIG. I.9 – Construction d'une impulsion de Dirac.

Elle est définie par le produit scalaire :

$$x(t) = \langle x, \delta \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt. \quad (\text{I-10})$$

D'une manière générale :

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt \quad (\text{I-11})$$

En particulier, en posant $x(t) = 1$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \quad (\text{I-12})$$

- Représenté par la figure (I.10).

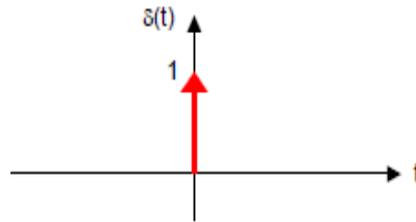


FIG. I.10 – Construction d'une impulsion de Dirac pour $x(t)=1$.

Propriétés :

▀ Soit $x(t)$ une fonction continue en $t = 0$ ou $t = t_0$

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) \quad (\text{I-13})$$

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \quad (\text{I-14})$$

▀ Identité

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (\text{I-15})$$

▀ Translation

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (\text{I-16})$$

$$x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2) \quad (\text{I-17})$$

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2) \quad (\text{I-18})$$

▀ Changement de variable

$$\delta(at) = |a|^{-1} \delta(t) \quad (\text{I-19})$$

Avec en particulier, si $W=2\pi f$ on a :

$$\delta(\omega) = 1/(2\pi) \cdot \delta(f) \quad (\text{I-20})$$

- Suite périodique d'impulsion de Dirac (Peigne de Dirac) figure (I.7).

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (\text{I-21})$$

$$x(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT) \quad (\text{I-22})$$

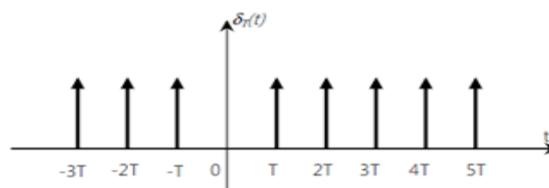


FIG. I.11 – Construction d'un Peigne de Dirac.

5.4- Fonction signe

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour } t < 0 \\ +1 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (\text{I-23})$$

- Représenté par la figure (I.12).

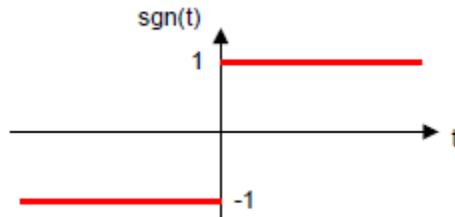


FIG. I.12 – Construction d'une Fonction signe.

Par convention la valeur à l'origine est nulle : $\text{sgn}(t) = 0$ pour $t = 0$.

5.5- Fonction rampe

La fonction rampe peut se définir à partir de la fonction Echelon :

$$r(t) = t \cdot u(t) \quad (\text{I-24})$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (\text{I-25})$$

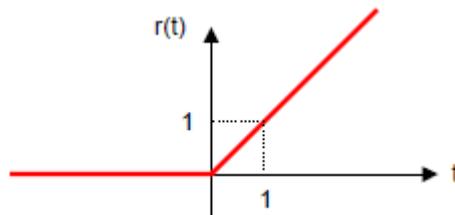


FIG. I.13 – Construction d'une Fonction rampe.

5.6- Fonction sinus cardinal.

$$\text{Sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (\text{I-26})$$

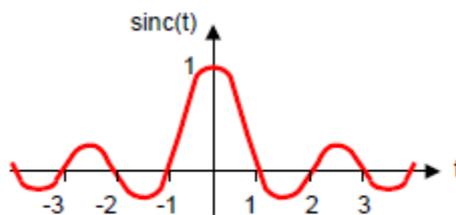


FIG. I.14 – Construction d'une Fonction sinus cardinal.

Cette fonction joue un rôle très important en traitement du signal.

6. Représentation fréquentielle

On a pour habitude de décrire les signaux en fonction de la variable temporelle t car notre perception des phénomènes physiques nous y incite. En électronique, la connaissance des propriétés spectrales d'un signal est primordiale. Ainsi, on utilise souvent une représentation en fonction de la fréquence pour caractériser un signal ou un système. Les outils de traitement des signaux nous aident dans cette tâche, ce qui va être présenté dans le prochain chapitre.

Chapitre II

Traitement du Signal Analogique

Chapitre II : Traitement du Signal Analogique

II. Série de Fourier

La série de Fourier joue un rôle considérable en électronique, et d'une manière générale dans l'étude des systèmes dynamiques. Son intérêt provient de l'interprétation physique que l'on peut avoir du théorème de Fourier : cela conduit à la notion fondamentale de spectre. Le spectre est la représentation graphique d'un signal non plus dans le domaine temporel, mais dans le domaine fréquentiel.

L'équivalence entre représentation temporelle et représentation fréquentielle est essentielle pour l'étude du traitement du signal.

II.1. Définition

La décomposition en *série de Fourier* permet de décomposer un signal en somme de sinusoides. On utilise principalement les séries de Fourier dans le cas des signaux périodiques. Elles permettent ainsi de passer facilement du domaine temporel au domaine fréquentiel. Pour pouvoir être décomposable, un signal doit être à variations bornées.

Pour tout signal $s(t)$ réel où $s(t) = s(t + T_0)$, on peut écrire :

$$S(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (\text{II-1})$$

Tel que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ avec :

$$S_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) dt \quad (\text{II-2})$$

$$A_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (\text{II-3})$$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (\text{II-4})$$

- On appelle le signal de pulsation ω_0 le *fondamental*.
- On appelle les signaux de pulsation $n.\omega_0$ les *harmoniques de rang n*.
- La valeur de S_0 représente la *valeur moyenne* de $s(t)$.

II.2. Développement en termes complexes

En introduisant la notation complexe de $\cos(n\omega_0 t)$ et $\sin(n\omega_0 t)$, il est possible d'obtenir une écriture complexe de la série de Fourier.

On pose :

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \quad (\text{II-5})$$

$$\sin(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2} \quad (\text{II-6})$$

On obtient alors :

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{II-7})$$

$$\text{Avec } S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) dt \quad (\text{II-8})$$

Les coefficients complexes S_n sont reliés aux coefficients A_n et B_n par les relations

Suivantes :

$$\begin{cases} S_n = \frac{A_n - jB_n}{2} \\ S_{-n} = \frac{A_n + jB_n}{2} \end{cases} \forall n > 0 \quad (\text{II-9})$$

II.3. Transformée de Fourier

C'est une généralisation de la décomposition de série de Fourier à tous les signaux déterministes. Elle permet d'obtenir une représentation en fréquence (représentation spectrale) de ces signaux. Elle exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude, de la phase et de l'énergie (ou de la puissance) des signaux considérés.

II.3.1. Définition

Soit $s(t)$ un signal déterministe. Sa transformée de Fourier est une fonction, généralement complexe, de la variable f et définie par :

$$S(f) = \text{TF}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{II-10})$$

Si cette transformée existe, la transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$S(t) = \text{TF}^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad (\text{II-11})$$

On appelle **spectre** de s le module de la transformée de Fourier de s .

II.3.2. Propriétés

Tableau. II.1. Propriétés de la Transformée de Fourier.

Propriétés	$s(t)$	$S(f)$
Linéarité	$\alpha \cdot s(t) + \beta \cdot r(t)$	$\alpha \cdot S(f) + \beta \cdot R(f)$
Translation	$S(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} S(f)$
	$e^{-j2\pi f t_0} s(t)$	$S(f-f_0)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$ avec $a \neq 0$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f) \cdot R(f)$
	$s(t) \cdot r(t)$	$S(f) * R(f)$
Dualité	$S(t)$	$s(-f)$

II.3.3. Transformée de Fourier de Dirac

$$\begin{array}{lcl}
 s(t) & \xrightarrow{\text{TF}} & S(f) \\
 \delta(t) & \longrightarrow & 1 \\
 \delta(t-\tau) & \longrightarrow & e^{-j\pi f \tau} \\
 e^{-j2\pi f_0 t} & \longrightarrow & \delta(f-f_0)
 \end{array}$$

II.3.4. Egalité de Parseval

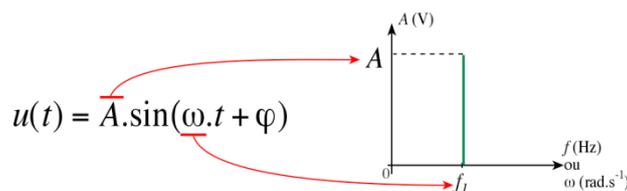
Il est intuitif de penser que l'énergie totale d'un signal ne dépend pas du mode de représentation choisie. Elle reste la même, qu'il s'agit d'une représentation temporelle ou d'une représentation fréquentielle.

Cette équivalence est donnée par le théorème de Parseval.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \tag{II-12}$$

II.4. Spectre de fréquences

Un signal sinusoïdal $u(t)$ peut être représenté par un trait de hauteur (ordonnée) son amplitude et d'abscisse sa fréquence f ou sa pulsation ω .



Un signal $s(t)$ peut, après avoir été décomposé en une série de Fourier, être représenté de cette façon. C'est ce que l'on appelle la représentation en fréquence ou la représentation spectrale ou le **spectre** de $s(t)$.

II.4.1. Exemples

Exemple 1 : signal carré

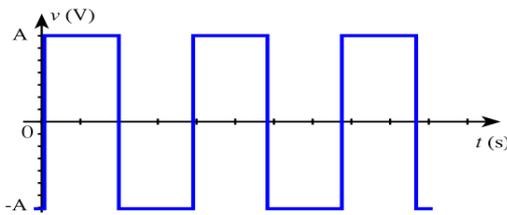


Fig. II.1. Représentation temporelle (chronogramme).

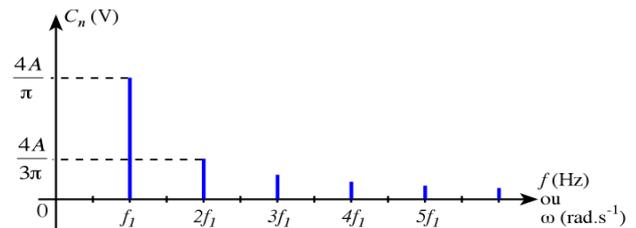


Fig. II.2. Représentation fréquentielle (spectre).

Décomposition en série de Fourier :

$$v(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right]$$

Exemple 2 : signal triangulaire

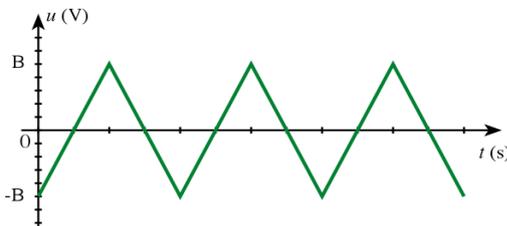


Fig. II.3. Représentation temporelle (chronogramme).

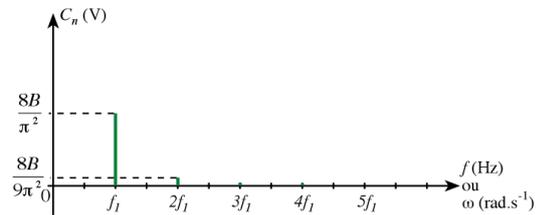


Fig. II.4. Représentation fréquentielle (spectre).

Décomposition en série de Fourier

$$v(t) = -\frac{8B}{\pi^2} \left[\cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega t}{5^2} + \dots \right]$$

Exemple 3 : signal Sinus

Calculons la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal : $s(t) = S \cos \omega_0 t$

$$S(f) = \text{TF}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{II-13}$$

$$= S \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{II-14}$$

$$\text{Avec } \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \tag{II-15}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right) e^{-j2\pi f t} dt \tag{II-16}$$

$$= \frac{S}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt \right] \tag{II-17}$$

$$S(f) = \frac{S}{2} (\text{TF}[e^{j2\pi f_0 t}] + \text{TF}[e^{-j2\pi f_0 t}]) \tag{II-18}$$

D'où

$$\text{TF}[S \cos 2\pi f_0 t] = \frac{S}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \tag{II-19}$$

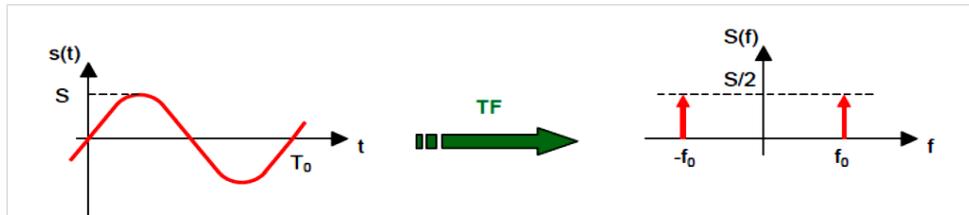


FIG.II.5- Représentation temporelle et fréquentielle du signal sinus.

☞ Remarque :

Si le signal $x(t)$ n'est pas périodique, alors on utilise la **Transformée de Fourier** pour calculer le spectre du signal : on peut ainsi obtenir le domaine fréquentiel $X(f)$ à partir de la représentation temporelle $x(t)$.

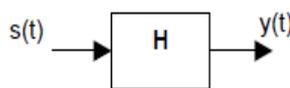
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi f t} dt \tag{II-20}$$

On peut aussi passer du domaine fréquentiel au domaine temporel. En connaissant $X(f)$, on peut en déduire $x(t)$ par la **Transformée de Fourier Inverse** :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df \tag{II-21}$$

II.5. Convolution

II.5.1. Définition : le produit de convolution d'un signal $s(t)$ par un autre $h(t)$ noté par le symbole $*$, est défini par les intégrales :



$$S(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(k) h(t - k) dk \tag{II-22}$$

Avec :

$S(t)$: la fonction d'entrée.

$h(t)$: réponse impulsionnelle.

$Y(t)$: signal de sortie.

II.5.2. Propriétés du produit de convolution.

- Commutativité

$$S(t)*h(t)=h(t)*S(t) \quad (\text{II-23})$$

-Associativité

$$f(t)*[S(t)*h(t)]=[f(t)*S(t)]*h(t) \quad (\text{II-24})$$

-Distributivité par rapport à l'addition

$$f(t)*[S(t)+h(t)]=[f(t)*S(t)] + [f(t)*h(t)] \quad (\text{II-25})$$

- Élément neutre

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = f(t) \quad (\text{II-26})$$

Si la réponse impulsionnelle d'un système est une impulsion de Dirac, le signal de sortie est une image fidèle du signal d'entrée.

- Transformée de Fourier

$$TF [f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau]e^{-j\omega t} dt \quad (\text{II-27})$$

Si on inverse l'ordre des intégrations et si on désigne par $F_2(j\omega)$ la transformée de Fourier de $f_2(t)$, l'expression précédente devient :

$$TF [f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}f_1(\tau)d\tau = F_2(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{II-28})$$

$$TF [f_1(t) * f_2(t)] = TF [f_1(t)] \cdot TF [f_2(t)] = F_1(j\omega).F_2(j\omega) \quad (\text{II-29})$$

La transformée de Fourier du produit de convolution est égale au produit simple des transformées de Fourier de ces deux fonctions et vice versa.

II.6. Notion de filtrage

II.6.1. Généralités

En électronique, on a souvent besoin de traiter des signaux provenant de différentes sources (capteurs de température, signaux audio ou vidéo, etc...). A ces signaux peut se superposer un bruit indésirable provenant soit du canal de transmission, soit des composants qui constituent le circuit électronique : c'est le cas du bruit généré par une simple résistance ou par un amplificateur.

Dans tous les cas, on a affaire à un signal réel qui contient plusieurs fréquences et qu'on peut étudier en effectuant une décomposition spectrale.

II.6.2. Fonction de filtrage

Le filtrage d'un signal électrique est l'opération qui consiste à séparer les composantes spectrales de ce signal selon leurs fréquences. Il peut s'agir soit :

- ✓ D'éliminer ou d'affaiblir des fréquences parasites indésirables
- ✓ D'isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles.

D'une manière générale, on peut considérer un filtre comme un circuit qui apporte une modification de l'amplitude et (ou) de la phase des composantes spectrales d'un signal. Le filtre est donc un sélecteur de fréquence et la bande de fréquence transmise s'appelle la bande passante du filtre.

On classe les filtres en deux grandes familles :

- ✓ **Les filtres analogiques :** réalisés à partir de composants passifs (résistance, inductance, condensateur) ou actifs.
- ✓ **Les filtres numériques :** Réalisés à partir de structure intégrée micro programmable.

II.6.3. Fonction de transfert

Le comportement d'un filtre est défini par l'étude fréquentielle de la fonction de transfert entre la tension de sortie et la tension d'entrée du filtre.

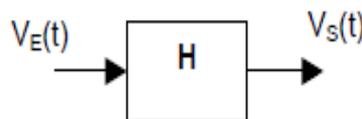


FIG. II.6- Fonction de transfert d'un filtre.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_S(j\omega)}{V_E(j\omega)} \quad (\text{II-30})$$

$$|\underline{H}|_{dB} = 20 \log \left| \frac{V_S}{V_E} \right| \quad (\text{II-31})$$

$$\varphi = \text{Arg}[\underline{H}(j\omega)] \quad (\text{II-32})$$

II.6.4. Types de filtre

Un filtre idéal transmet sans déformation tout signal dont la fréquence appartient à la bande passante, dans ce cas le rapport de l'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée reste constante. On peut classer les filtres en quatre catégories suivant les fréquences qui sont favorisées et les fréquences qui sont atténuées.

II.6.4.1. Le filtre passe-bas : Laisse passer les fréquences inférieures à une limite appelée fréquence de coupure f_C qui est définie comme la fréquence pour laquelle l'amplitude du signal est atténués de -3 dB.

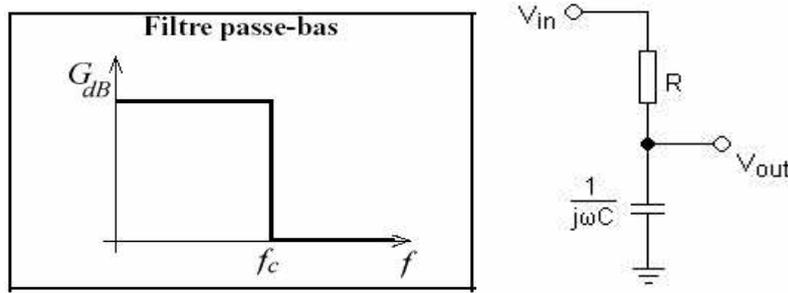


FIG. II.7- Comportement d'un filtre passe-bas.

$$H(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1+jRC\omega} \tag{II-33}$$

$\omega = 2\pi f$ Avec $V_{OUT} = V_0$ et $V_{in} = V_i$

Si $f \rightarrow 0$ alors $\lim(H(j\omega)) = 1$ donc $V_0 = V_i$

Si $f \rightarrow \infty$ alors $\lim(H(j\omega)) = 0$ donc $V_0 = 0$

II.6.4.2. Le filtre passe-haut : Favorise le passage des fréquences supérieures à la fréquence de coupure f_c . Il atténue les autres (les basses fréquences). Autrement dit, il «laisse passer ce qui est haut». C'est un atténuateur de graves pour un signal audio. On pourrait aussi l'appeler coupe-bas.

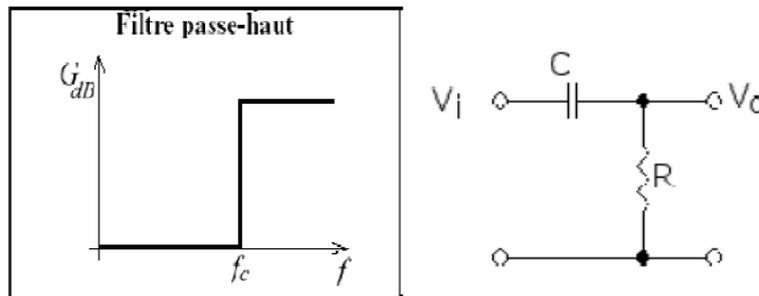


FIG. II.8- Comportement d'un filtre passe-haut.

$$H(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} \tag{II-34}$$

Si $f \rightarrow 0$ alors $\lim(H(j\omega)) = 0$ donc $V_0 = 0$

Si $f \rightarrow \infty$ alors $\lim(H(j\omega)) = 1$ donc $V_0 = V_{in}$

II.6.4.3. Le filtre passe -bande : est un filtre ne laissant passer qu'une bande ou intervalle de fréquences compris entre une fréquence de coupure basse et une fréquence de coupure haute du filtre.

Il cumule le fonctionnement du filtre passe-bas et du filtre passe-haut.

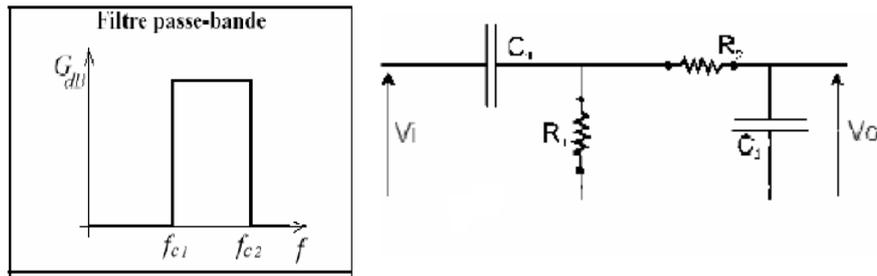


FIG. II.9- Comportement d'un filtre passe-bande.

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{jR_1C_1W}{1+jR_1C_1W} \times \frac{1}{1+jR_2C_2W} \tag{II-35}$$

II.6.4.4. Le filtre coupe-bande : Aussi appelé filtre réjecteur de bande est un filtre empêchant le passage d'un intervalle de fréquences.

Il est composé d'un filtre passe-haut et d'un filtre passe-bas dont les fréquences de coupure sont souvent proches mais différentes, la fréquence de coupure du filtre passe-bas est systématiquement inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut.

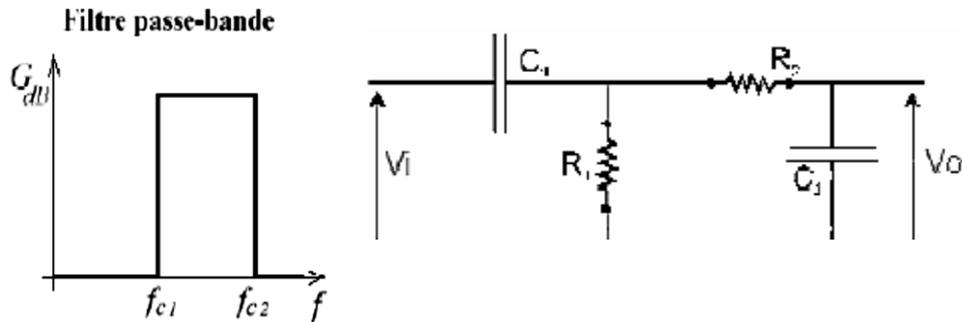


FIG. II.10- Comportement d'un filtre coupe-bande.

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1-LC\omega^2}{1+j(\frac{LW}{R})-LC\omega^2} \tag{II-36}$$

Si $f \rightarrow 0$ alors L'impédance de $L = 0 \Omega$ donc $V_o = V_i$

Si $f \rightarrow \infty$ alors L'impédance de $C = 0 \Omega$ donc $V_o = V_i$

Entre les fréquences de coupure le circuit LC est résistif et V_i est atténué.

II.7. Notion de Modulation

II.7.1. Introduction

Le principe de modulation d'un signal est essentiellement utilisé pour la transmission des signaux. Il permet d'adapter le message à transmettre au canal de transmission.

Par exemple, en radio, le message transmis par voie hertzienne est un message audio dont le spectre sera compris dans la bande [20 Hz, 20 kHz].

L'objectif est de se servir d'un signal de fréquence importante pour transmettre le message afin de réduire à des proportions raisonnables la taille des antennes.

II.7.2. Définitions

II.7.2.1- Modulation : La modulation est le mécanisme par lequel le signal est transformé de sa forme originale en une forme adaptée au canal de transmission.

La radio, la télévision, les lignes téléphoniques utilisent le procédé de modulation. Le signal HF utilisé pour transporter le message est appelé la *porteuse*.

Pour transporter un message, on ne peut jouer que sur deux paramètres :

- L'amplitude U_{Max} : on effectue alors une modulation d'amplitude.
- La phase ϕ : on effectue alors une modulation angulaire (*phase* ou *fréquence*).

☞ *Remarque :*

La démodulation est l'opération inverse de la modulation. Elle consiste à reconstruire le signal modulant à partir du signal modulé. La qualité d'une modulation est déterminée par la facilité à récupérer le signal modulant et par son immunité aux bruits.

II.7.2.2-Porteuse : la porteuse est une onde sinusoïdale, qui verra un de ses paramètres (amplitude, fréquence ou phase) être modifié par le signal modulant. Le paramètre qui varie définit le type de modulation.

On dit : **La porteuse est modulée par un signal modulant.**

II.7.2.3- Signal modulant : C'est l'information à transmettre. Ce signal modifie un des paramètres (amplitude, fréquence ou phase) de la porteuse.

On dit : **Le signal modulant module la porteuse.**

II.7.2.4-Signal modulé : C'est le signal résultant de la modulation.

II.7.2.5-Canal : Le canal est le milieu dans lequel se propage le signal. Ce terme indique aussi la plage de fréquence utilisée. La largeur du canal dépend du type d'application: 8 MHz pour un canal TV, 250 kHz pour un canal audio FM et 12,6 kHz en téléphonie.

La réception d'un tel signal nécessite des antennes dont les dimensions sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde du signal (en général de l'ordre de $\frac{1}{2}$).

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (\text{II-37})$$

☞ *Exemple:*

Pour $f = 20 \text{ kHz}$: $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{20 \cdot 10^3} = 1.5 \cdot 10^4 \text{ m} = 15 \text{ Km}$!!!!! Impossible à réaliser.

II.8. Schéma bloc d'un modulateur.

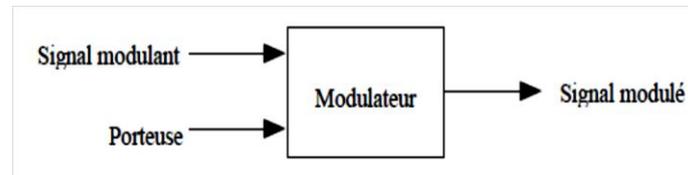


FIG. II.11- Schéma bloc d'un modulateur.

La porteuse est de forme sinusoïdale.

Le signal modulant peut être analogique de forme quelconque, ou numérique.

Le paramètre de la porteuse qui varie détermine le type de modulation, soit une modulation d'amplitude, de fréquence ou de phase.

Pour la modulation d'amplitude, on distingue des cas particuliers, comme la modulation d'amplitude à porteuse supprimée, à bande latérale unique et à bande latérale résiduelle.

Applications :

- Adaptation d'un signal à un canal de transmission ;
- Partage d'un canal de transmission unique entre plusieurs signaux (multiplexage) ;
- Détection ou mesure de signaux bas de fréquences de faible amplitude dans un environnement bruité.

II.9. Types de modulation.

L'équation qui permet de calculer une forme d'onde sinusoïdale est :

$$U = U_{\text{MAX}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (\text{II-38})$$

Avec :

U : valeur instantanée de la tension

U_{MAX} : valeur de crête de la tension

ω : Pulsation ($\omega = 2\pi f$)

t : le temps considéré

φ : Angle de déphasage à l'origine en radian.

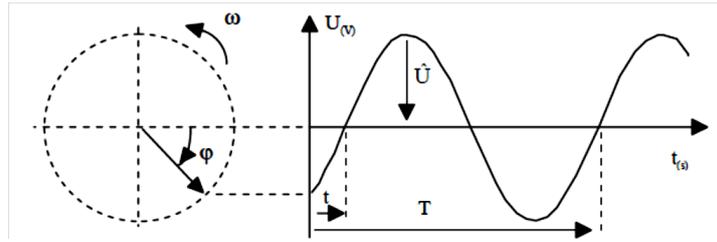


FIG. II.13- Représentation d'un signal sinusoïdale.

- Si le signal modulant fait varier U_{MAX} c'est une **modulation d'amplitude**.
- Si le signal modulant fait varier f (dans le facteur ω) c'est une **modulation de fréquence**.
- Si le signal modulant fait varier ϕ c'est une **modulation de phase**.

II.9.1. Modulation d'amplitude.

Moduler l'amplitude d'un signal consiste alors à ajouter une composante continue (U_0) au signal modulant $U_m(t)$ à transmettre, puis de multiplier la tension résultante par la tension $U_p(t)$ de la porteuse.

Le décalage en tension U_0 est indispensable pour éviter la *surmodulation* et permettre ensuite la restitution du signal initial par démodulation.

Donc nous avons :

$$U_m(t) = U_m \cos(2\pi f_m t) \tag{II-39}$$

$$\dot{U}_m(t) = U_m(t) + U_0 = U_m \cos(2\pi f_m t) + U_0 \tag{II-40}$$

(m) représente le Rapport U_m/U_0 est appelé le Taux de modulation.

Le signal modulé est obtenu à l'aide d'un Multiplieur figure (II.14) qui réalise le produit du signal de la porteuse par le signal modulant décalé d'un coefficient K dépendant du multiplieur.

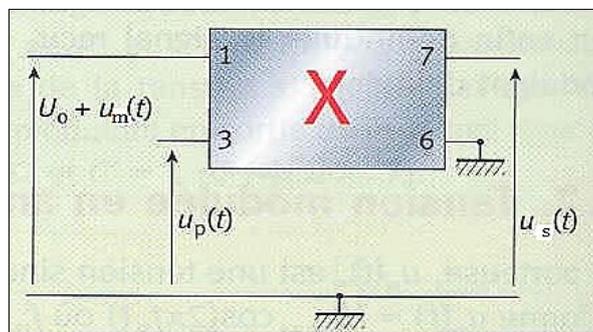


FIG. II.14- Le montage multiplieur de tension.

$$U_S(t) = K \times U_P(t) \times (U_m(t) + U_0) \tag{II-41}$$

$$= K \times U_P \cos(2\pi f_p t) \times (U_m \cos(2\pi f_m t) + U_0) \tag{II-42}$$

$$= K \frac{U_m U_P}{2} \cos(2\pi(f_p + f_m)t) + K \frac{U_m U_P}{2} \cos(2\pi(f_p - f_m)t) + k U_0 U_P \cos(2\pi f_p t) \tag{II-43}$$

Posons :

$$A = K U_0 U_P \text{ et } m = U_m / U_0$$

$$U_S(t) = \frac{Am}{2} \cos(2\pi(f_p + f_m)t) + \frac{Am}{2} \cos(2\pi(f_p - f_m)t) + A \cos(2\pi f_p t) \tag{II-44}$$

Le signal modulé est donc équivalent à la somme de trois tensions alternatives sinusoïdales de fréquence et d'amplitudes respectives figure (II.15) :

$$(f_p + f_m, \frac{Am}{2}), ((f_p - f_m, \frac{Am}{2}), (f_p, A).$$

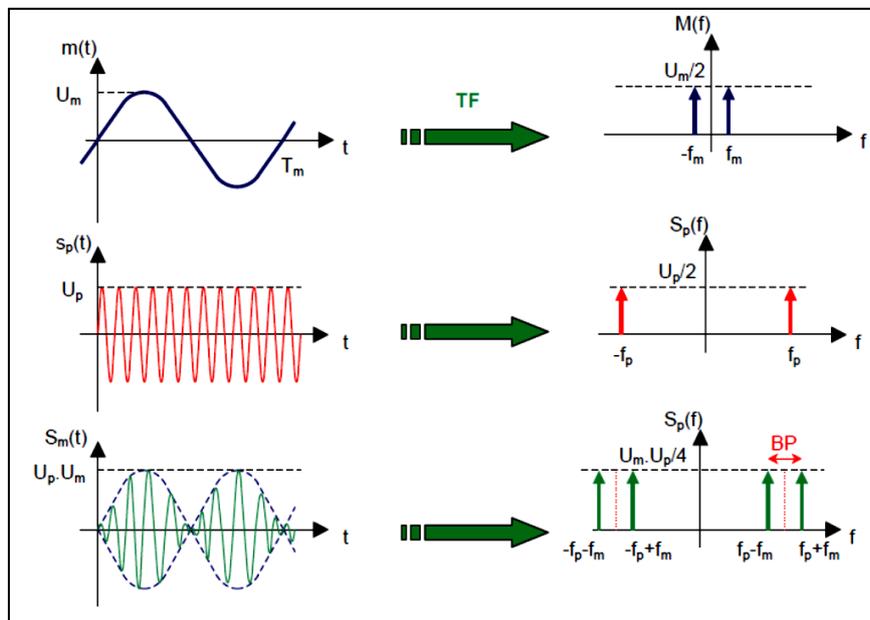


FIG. II.15- Représente la modulation d'un signal.

II.9.2. Méthode de Trapèze

Pour vérifier qu'une modulation est bonne, on peut utiliser la méthode de Trapèze, elle consiste à visualiser la tension modulée $U_S(t)$ en fonction de la tension modulante décalée $U_m(t) + U_0$

- $m < 1 \rightarrow$ Bonne modulation.
- $m = 1 \rightarrow$ modulation critique
- $m > 1 \rightarrow$ surmodulation (mauvaise qualité).

Chapitre III

Numérisation

Chapitre III : Numérisation

III.1. Introduction

Les signaux physiques sont analogiques, et nécessitent donc une numérisation afin d'être traités sur ordinateur. La numérisation consiste à mesurer le signal physique (une tension électrique généralement) à des intervalles de temps réguliers, et coder cette mesure sur un nombre fini de bits. La première partie est l'échantillonnage proprement dit (les mesures sont appelés échantillons) pour rendre le signal discret. La grandeur caractéristique de l'échantillonnage est la fréquence d'échantillonnage, ou sa cadence, la seconde partie c'est la quantification pour associer à chaque échantillon une valeur. Enfin le codage pour associer un code à chaque valeur.

Des composants spécialisés assurent la conversion dans un système numérique des données analogiques recueillies par divers capteurs (cellule photo-sensible, thermomètre, etc...).

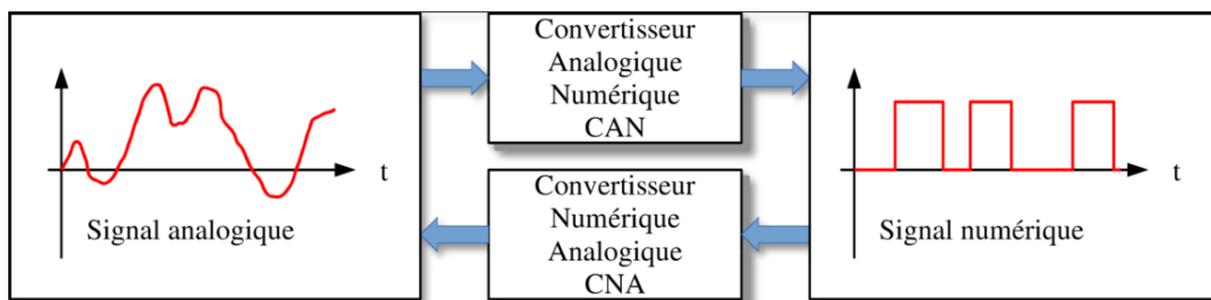


FIG.III.1- Convertisseur Analogique Numérique et Convertisseur Numérique Analogique.

III.2. Objectifs de la numérisation

- ▀ Les systèmes informatiques permettent :
 - ✓ de transformer le signal analogique qui contient une quantité infinie d'amplitudes en un signal numérique contenant lui une quantité finie de valeurs.
 - ✓ d'emmagasiner de grandes quantités d'information sur des volumes de faibles dimensions : mémoire flash, disque dur, support optique, etc...
 - ✓ de dupliquer exactement et facilement les informations numériques et cela pour un moindre coût.
 - ✓ de distribuer largement les informations grâce aux réseaux informatiques et notamment grâce à Internet.

- ✓ de créer des informations de synthèse, telles que les statistiques et les index, qui impliquent une grande quantité de calculs auxquels on n'envisagerait pas d'employer des humains.
- ✓ La transmission de données numériques traitées pour obtenir une occupation maximale du spectre disponible nécessite sur les canaux de transmission une bande passante moindre que leur contrepartie analogique.

III.3. Echantillonnage

III.3.1. Définition : l'échantillonnage consiste à prélever à des instants précis, le plus souvent équidistants, les valeurs instantanées d'un signal. Le signal analogique $s(t)$, continu dans le temps, est alors représenté par un ensemble de valeurs discrètes :

$$S_e(t) = S(n.T_e) \quad (\text{III-1})$$

Avec n : entier et T_e : période d'échantillonnage.

Cette opération est réalisée par un échantillonneur souvent symbolisé par un interrupteur.

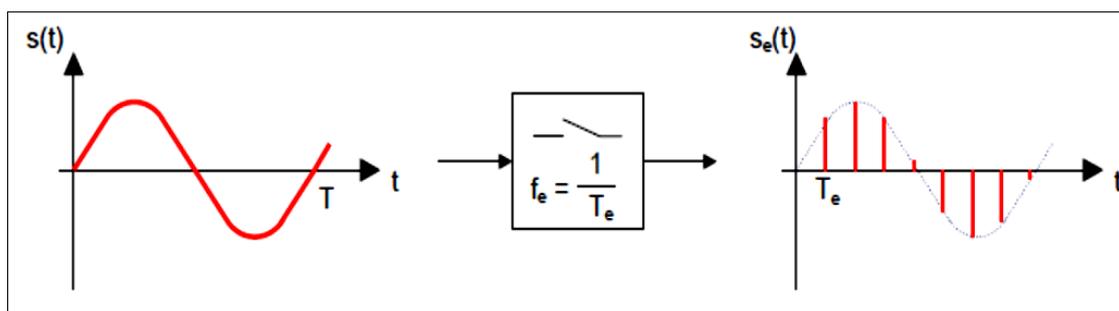


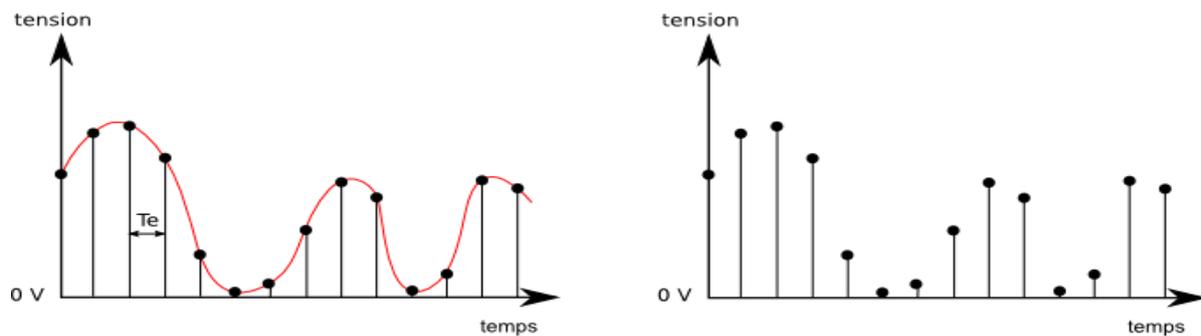
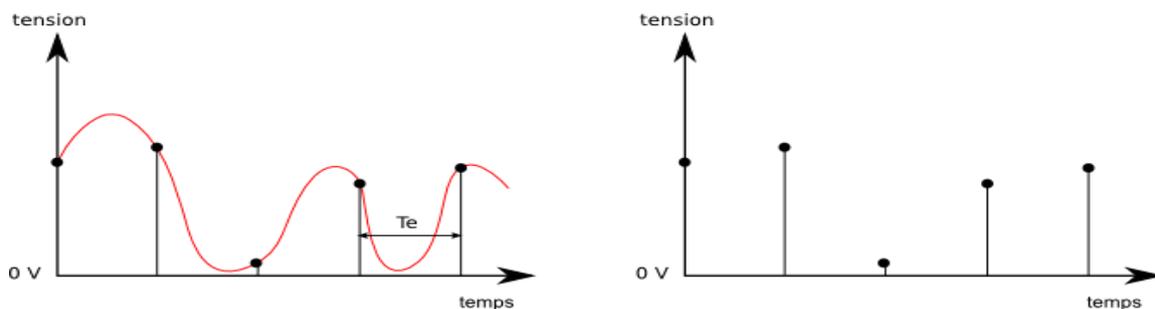
FIG.III- 2- Représentation de l'échantillonnage.

Le nombre d'échantillons par unité de temps s'appelle cadence d'échantillonnage ou taux d'échantillonnage. Quand l'échantillonnage se fait à intervalle régulier, on parle de fréquence d'échantillonnage.

III.3.2. Rapidité ou choix de la fréquence d'échantillonnage.

Le premier paramètre à fixer est la vitesse à laquelle seront prélevés les échantillons pour que la reconstruction du signal de sortie soit fidèle au signal d'entrée. La fréquence d'échantillonnage doit être suffisamment grande. En effet, si celle-ci est trop faible, les variations rapides du signal ne pourront être retranscrites.

Voici deux exemples d'échantillonnage du même signal pour deux fréquences :

FIG.III- 3- Signal échantillonné à T_{e1} .FIG.III- 4- Signal échantillonné à $T_{e2} > T_{e1}$.

Dans le premier exemple, la fréquence d'échantillonnage choisie permet de reproduire les variations du signal. Par contre dans le second exemple, il est clair que les échantillons recueillis ne sont pas suffisants pour reconstruire le signal d'origine.

III.3.3. Théorème de Shannon

Le théorème de Shannon permet de connaître la fréquence d'échantillonnage à choisir pour un signal donné :

Pour reconstruire un signal de sortie de manière fidèle au signal d'entrée, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale contenue dans le signal d'entrée.

$$f_e > 2f_M \quad (\text{III-2})$$

Si cette règle n'est pas respectée, des fréquences parasites qui n'appartiennent pas au signal de départ apparaissent. Ce phénomène est le repliement spectral ou aliasing.

Exemple 1 : Cas d'un signal sinusoïdal

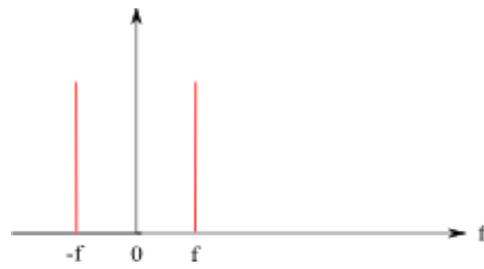


FIG.III-5- Spectre d'un signal sinusoidal.

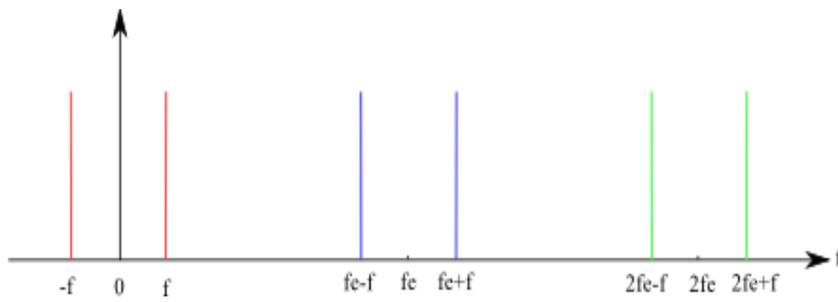


FIG.III-6- Spectre du signal sinusoidal échantillonné à $f_e > 2f_{max}$

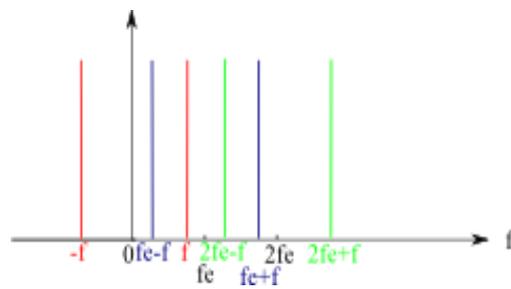


FIG.III-7- Spectre du signal sinusoidal échantillonné à $f_e < 2f_{max}$.

Exemple 2 : Cas d'un signal quelconque.

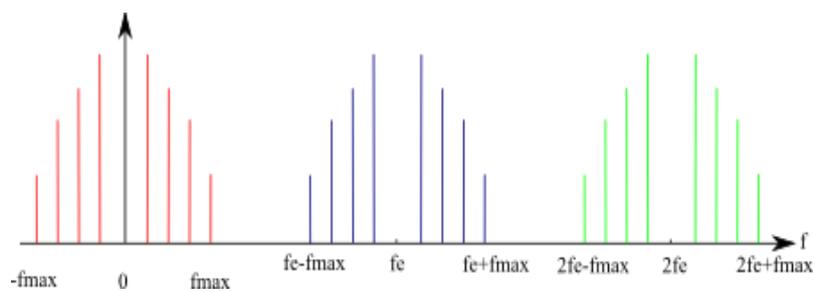


FIG.III-8- Spectre d'un signal quelconque échantillonné à $f_e > 2f_{max}$.

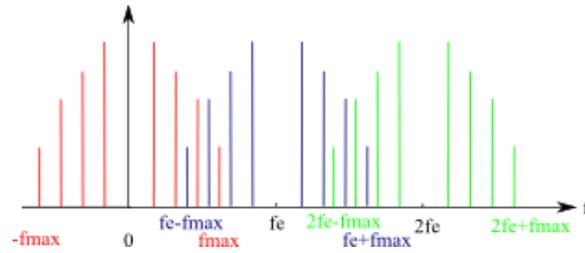


FIG.III-9- Spectre d'un signal f_c ne respecte pas le critère de Shannon.

Lorsque le critère de Shannon n'est pas respecté, la fréquence d'échantillonnage est très proche de la fréquence maximale du signal et on observe le mélange des fréquences hautes et des fréquences plus basses.

On observe que dans les deux exemples ci-dessus, il devient impossible d'effectuer une séparation correcte des fréquences lorsque le critère de Shannon n'est pas respecté.

III.3.4. Echantillonnage idéal

L'échantillonnage idéal est modélisé par la multiplication du signal continu $s(t)$ et d'un peigne de Dirac de période T_e .

$$S_e(t) = S(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = S(t) \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = S(nT_e) \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) \quad (III-3)$$

Le spectre du signal échantillonné est donc le suivant :

$$S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f) * \delta(f - nf_e) \rightarrow S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} S(f - nf_e) \quad (III-4)$$

On obtient donc un spectre infini qui provient de la périodisation du spectre du signal d'origine autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage.

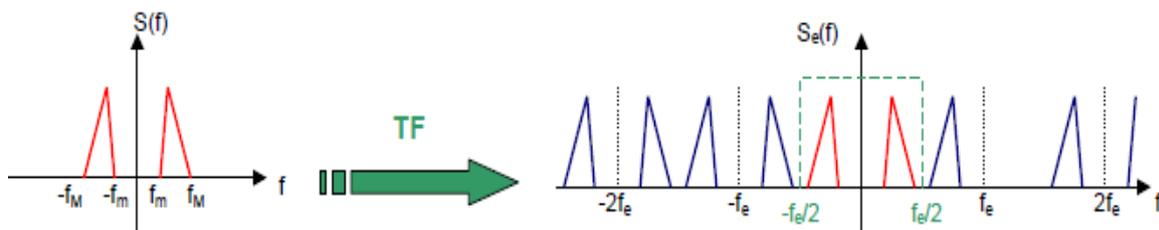


FIG.III. 10- Spectre d'un signal échantillonné.

☞ Remarque :

✓ On voit sur le spectre du signal échantillonné qu'il est possible de restituer le signal original par un simple filtrage passe-bas.

✓ Si f_M , la fréquence maximale du spectre du signal à échantillonner, est supérieure à $f_e/2$, la restitution du signal original sera impossible car il va apparaître un recouvrement spectral lors de l'échantillonnage. On dit qu'on est en sous-échantillonnage.

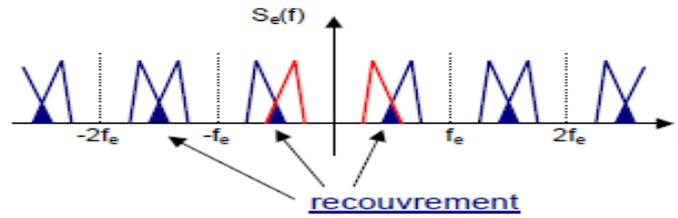


FIG.III. 11- Spectre d'un signal échantillonné si $f_M > f_e/2$ et ne respectant pas le critère de Shannon.

Lorsqu'il y a recouvrement spectrale, nous avons vu qu'il était impossible de reconstruire correctement le signal. Pourtant dans la plupart des situations, le spectre du signal à échantillonner s'étale sur tout le domaine des fréquences (tout en diminuant du côté des hautes fréquences), mais il n'existe pas une fréquence maximale f_{max} au-delà de laquelle l'énergie est nulle.

Il y a donc un problème pour choisir la fréquence d'échantillonnage. On se fixe donc en pratique une fréquence f_{max} à partir de laquelle, on estime la représentation de notre signal satisfaisante pour les applications que l'on veut en faire. Puis on effectue un filtrage passe-bas (à f_{max}) avant l'échantillonnage afin de remédier aux repliements de spectre. On appelle ce filtre un **filtre anti repliement**.

III.3.5. Echantillonnage réel

En pratique, l'échantillonnage s'effectue en commandant un interrupteur par un train d'impulsions étroites. Il est donc impossible d'obtenir des échantillons de durée quasiment nulle. La modélisation de l'échantillonnage par un peigne de Dirac est donc erronée. En fait, chaque impulsion va avoir une durée très courte τ . L'échantillonnage peut donc être modélisé par la multiplication du signal par une suite de fonction rectangle (ou porte) de largeur τ .



FIG.III. 12- Suite de fonction rectangle de largeur τ .

L'expression du signal d'échantillonnage devient donc :

$$Y(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT_e}{\tau}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{k \rightarrow -\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) \quad (\text{III-5})$$

Et par conséquent, sa transformée de Fourier est égale à :

$$y(f) = \tau \text{sinc}(\tau f) \cdot \frac{1}{T_e} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_e) \quad (\text{III-6})$$

Comme l'expression du signal échantillonné est :

$$S_e(t) = s(t) \cdot y(t) \quad (\text{III-7})$$

Sa transformée de Fourier devient :

$$S_e(f) = S(f) \times Y(f) = S(f) * \frac{\tau}{T_e} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\tau f) \cdot \delta(f - kf_e) \quad (\text{III-8})$$

$$S_e(f) = \frac{\tau}{T_e} \text{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f - kf_e) \quad (\text{III-9})$$

On retrouve la même allure de spectre modulé en amplitude par une fonction en sinus cardinale.

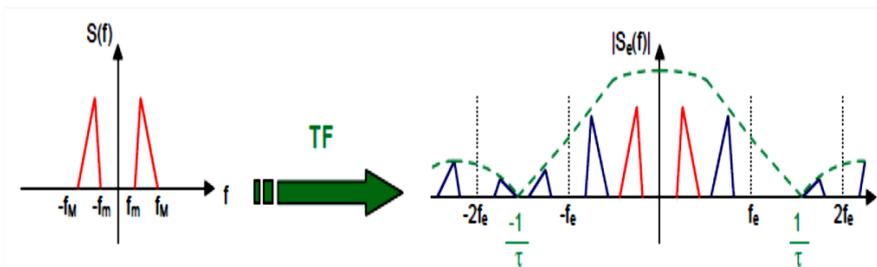


FIG.III. 13- Allure du spectre modulé en amplitude par une fonction en sinus cardinale.

☞ *Remarque :*

- ✓ Pour se rapprocher d'un échantillonnage idéal et qu'ainsi le signal soit facilement reconstituible, il faut que τ soit le plus petit possible.
- ✓ Dans le cas où τ est du même ordre de grandeur que f_e , il faudra $f_e \gg 2f_M$.

III.3.6. Echantillonnage-blocage

En pratique, on n'échantillonne pas un signal pour le reconstruire juste après.

L'échantillonnage est utilisé pour prélever le signal à des instants multiples de T_e et ensuite convertir les échantillons sous forme d'un code binaire (8, 12, 16 bits, etc ...). Cette conversion est effectuée par l'intermédiaire d'un convertisseur analogique-numérique (CAN).

Cette conversion n'est pas instantanée. Si le signal à convertir varie trop rapidement, il est nécessaire de procéder au blocage du signal pour avoir une conversion sans erreur. On

utilise donc un *échantillonneur-bloqueur* qui mémorise la tension à convertir et la maintient constante pendant toute la durée de conversion.

L'effet de blocage peut être modélisé par une fonction porte décalée de $\tau/2$:

$$y(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \text{rect} \left[\frac{t - \frac{\tau}{2} - kT_e}{\tau} \right] = \text{rect} \left[\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau} \right] * \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) \quad (\text{III-10})$$

L'échantillonnage-blocage consiste donc à la multiplication du signal par $y(t)$. La transformée de Fourier du signal échantillonné est donc :

$$S_e(f) = \frac{\tau}{T_e} \text{sinc}(\tau f) \cdot \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f - k f_e) \cdot e^{-j\pi f \tau} \quad (\text{III-11})$$

III.4. Quantification

III.4.1. Introduction

La deuxième étape de la numérisation est la quantification, elle consiste à "découper" l'amplitude du signal en valeurs discrètes.

La « plage » de mesure du CAN est alors découpée en tranches appelées pas ou résolution du CAN (Δ).

Le pas d'un CAN est la plus petite variation de tension que la CAN peut repérer.

Exemple :

La plage d'étude du CAN est 10 V, il effectue une quantification sur 2 bits ($n = 2$).

$$\text{pas} = \frac{\text{plage de mesure}}{2^n} = \frac{10}{4} = 2,5V \quad (\text{III-12})$$

III.4.2. Unités

Les unités les plus utilisées dans le monde numérique :

■ **Le bit :** c'est l'unité de base, elle correspond à l'unité de mémoire la plus petite sur un ordinateur elle peut prendre deux valeurs : (0 ou 1).

➤ 1 bit : on peut mémoriser deux états : 0 et 1

➤ 2 bits : $2^2 = 4$ états 00, 01, 10, 11

➤ 3 bits : $2^3 = 8$ états 000, 001, 010, 100, 011, 110, 101, 111

La formule générale : pour n bits on a 2^n états différents.

■ **L'octet :** 1 octet = 8 bit soit : $2^8 = 256$ valeurs différentes.

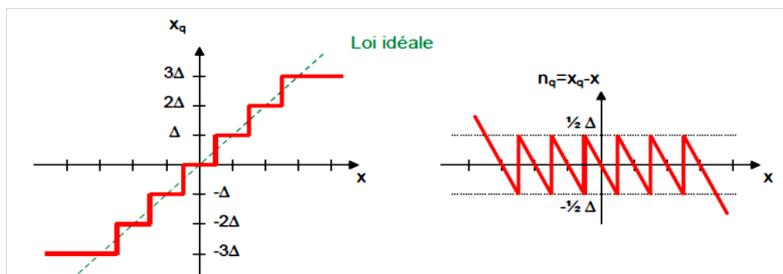
La loi de quantification est imposée par le système de traitement ; une contrainte importante pour un système de traitement numérique consiste à commettre des erreurs de calcul qui soient négligeables vis-à-vis de l'incertitude sur le signal lui-même; cet objectif doit

être atteint malgré le caractère non-stationnaire de certains signaux, tel que le signal vocal par exemple.

L'erreur qui résulte de la quantification d'un signal déterministe est aussi déterministe ; ses propriétés peuvent donc, en principe, être établies par une approche déterministe. En réalité, les signaux tels que, par exemple, le signal vocal, doivent être considérés comme étant aléatoires : la suite des erreurs de quantification est par conséquent aussi aléatoire, et l'on parle alors de *bruit de quantification*.

III.4.3. Quantification uniforme

La loi de quantification uniforme utilise le pas de quantification (Δ) constant entre chaque valeur x_q .



Le bruit de quantification n_q est dans ce cas un signal aléatoire. Ces caractéristiques sont donc définies par ses propriétés statistiques. On peut alors démontrer que la puissance du bruit de quantification est égale à :

$$P_{n_q} = \frac{\Delta^2}{12} \quad (\text{III-13})$$

Si sa densité de probabilité est uniforme, le rapport signal sur bruit dû à la quantification est donc égale à :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log \left[12 \left(\frac{V_{seff}}{\Delta} \right)^2 \right] \quad (\text{III-14})$$

$$V_{PE} = 2^n \times \Delta \quad (\text{III-15})$$

$$\Delta = \frac{V_{PE}}{2^n} \quad (\text{III-16})$$

V_{PE} la plage de mesure, ainsi on peut écrire :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log 12 + 20 \log \left(2^n \frac{V_{seff}}{V_{PE}} \right) = 10 \log 12 + 20 \log 2^n + 20 \log \left(\frac{V_{seff}}{V_{PE}} \right) \quad (\text{III-17})$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx 6.02n + 10.8 + 20 \log \left(\frac{V_{seff}}{V_{PE}} \right) \quad (\text{III-18})$$

Ainsi, dans le cas d'un convertisseur analogique-numérique (CAN), chaque fois que l'on rajoutera un bit dans le résultat de conversion, on améliorera le rapport signal sur bruit dû à la quantification d'environ 6 dB.

☞ *Remarque :*

En traitement du signal, on considère la puissance d'un signal aux bornes d'une résistance de 1 Ω . La puissance est donc égale au carré de la valeur efficace.

Exemple :

Si l'on veut numériser une sinusoïde et que l'on fixe $V_{PE} = 2 \cdot V_{max}$

Dans ce cas :

$$V_{Seff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \quad \text{Et} \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx 6.02n + 10.8 + 20\log\left(\frac{V_{max}}{2\sqrt{2}V_{max}}\right)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} \approx 6.02n + 1.77$$

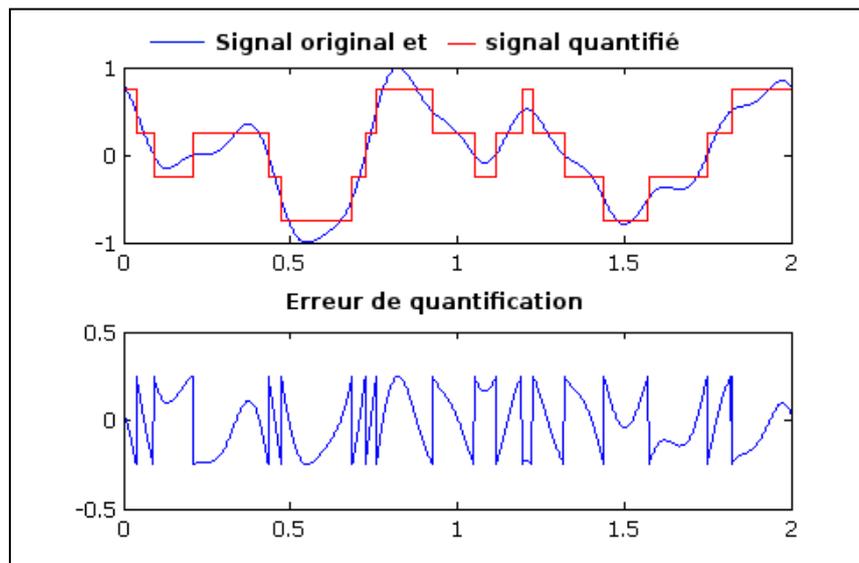


FIG.III. 14 – Représentation du signal quantifié en plus d'un bruit.

III.5. Codage

Le codage consiste à associer à un ensemble de valeurs discrètes un code composé d'éléments binaires.

La précision ou résolution du signal obtenu en sortie va dépendre du convertisseur utilisé, autrement dit de l'électronique mise en œuvre. La limite théorique de la résolution est définie par le nombre de bits du convertisseur analogique numérique.

Les codes les plus connus : code binaire naturel, code binaire décalé, code complément à 2, code DCB, code Gray.

L'exemple de la figure 15 montre un signal analogique codé sur 1 bit, seules deux valeurs sont possibles pour ce bit soit « 0 » soit « 1 ». La précision est alors très faible et ne permet pas un résultat satisfaisant.

Lorsque le codage s'effectue sur 2 bits, chaque bit pouvant prendre deux valeurs (« 0 » ou « 1 »), 2^2 valeurs seront stockées soit un pas de quantification de 2,5 V (10 /4)

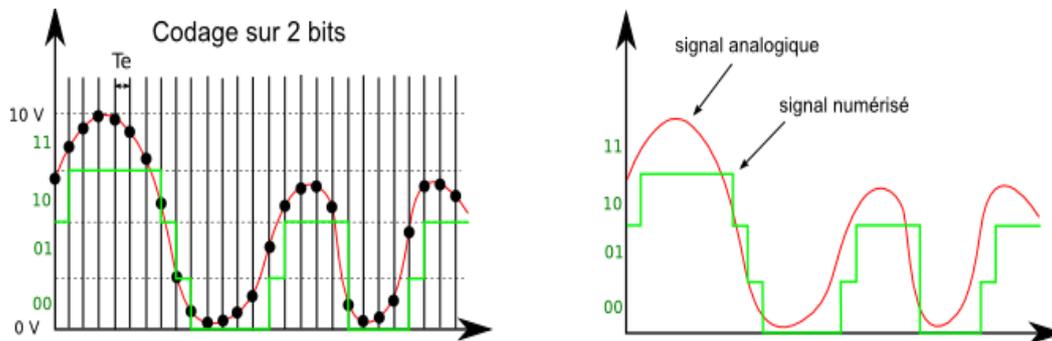


FIG.III. 15- Signal analogique codé sur 2 bits.

Dans cet exemple, le signal a une amplitude de 10 volts et la plage d'étude est découpé en 4 tranches chacune sera associé par un nombre binaire avec deux chiffres car nous avons une quantification de 2 bits :

- 0 à 2,5 V, le code sera « 00 »
- 2,5 V à 5 V, le code sera « 01 »
- 5 V à 7,5 V, le code sera « 10 »
- 7,5 V à 10 V, le code sera « 11 »

Plus le nombre de bits sera important et meilleure sera la précision.

Dans la suite, on regarde les mesures qui on été échantillonnées et on regarde dans quelle tranche se situe et on attribue le nombre binaire correspondant.

Code = 10 11 11 11 11 11 11 10 01 00 00

Enfin, on voit bien notre signal numérique en vert qui varie de façon discrète par palier c'est bien un signal numérique.

▀ L'effet de la quantification sur la qualité de la numérisation :

Voici deux exemples de codage sur 3 et 4 bits à fréquence d'échantillonnage fixe.

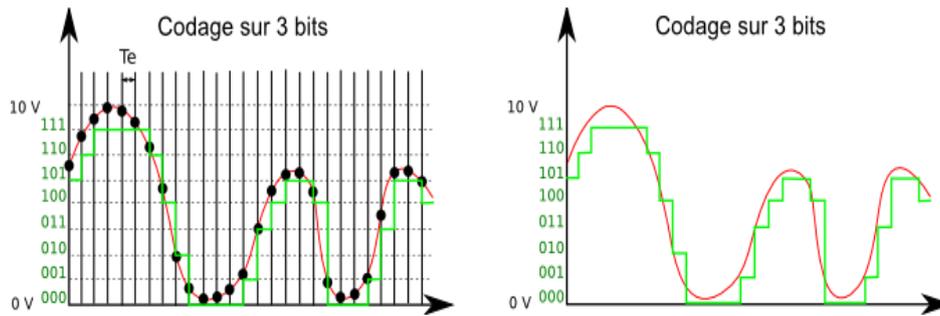


FIG.III. 16- Signal analogique codé sur 3 bits.

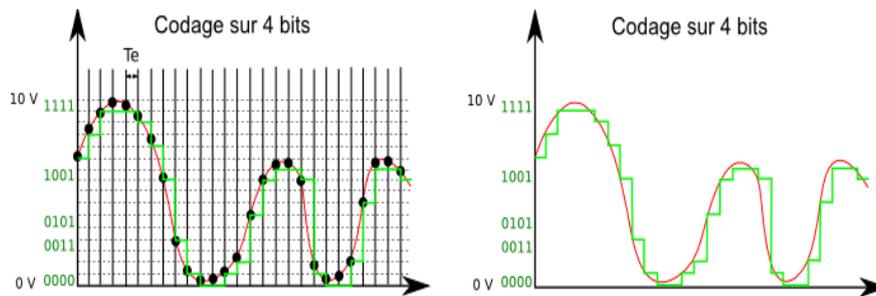


FIG.III. 17- Signal analogique codé sur 4 bits.

L'amplitude du signal numérique se rapproche de l'amplitude du signal analogique lorsque le nombre de bits de la quantification augmente c'est-à-dire lorsque la résolution du CAN ou le pas a diminué.

Une résolution trop grande (quantification avec peu de bits) génère du bruit.

Chapitre IV

Traitement du Signal Numérique

Chapitre IV : Traitement du Signal Numérique

IV.1. Introduction

Le traitement numérique de l'information apporte de nombreux avantages techniques ainsi qu'une flexibilité accrue dans beaucoup de domaines. Le traitement du signal par transformée de Fourier pose cependant un certain nombre de problèmes. En effet un ordinateur ne peut traiter que des signaux numériques, ceux-ci sont obtenus après un *échantillonnage* et une *quantification*. Leur étude devra tenir compte des effets induits sur le spectre par ces deux techniques.

De plus, un calcul de transformée de Fourier est une somme d'une infinité d'échantillons. Le temps nécessaire ainsi que la mémoire de l'ordinateur vont forcément emmener certaines contraintes à ce niveau.

IV.2. Transformée de Fourier d'un signal discret

Lorsqu'on désire calculer la transformée de Fourier d'une fonction $x(t)$ à l'aide d'un ordinateur, ce dernier n'ayant qu'un nombre fini de mots de taille finie, on est amené à :

- Discrétiser la fonction temporelle,
- Tronquer la fonction temporelle,
- Discrétiser la fonction fréquentielle.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi f t} dt \quad (\text{IV-1})$$

En approchant l'intégrale par une somme d'aires de rectangles de durée T_e et en limitant la durée d'intégration à l'intervalle $[0, (N - 1) T_e]$, on obtient :

$$X(f) \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e) e^{-j2\pi f n T_e} \quad (\text{IV-2})$$

Ce qui donne pour les valeurs de fréquences $f_k = kf_e/N$:

$$X(F) \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{N} f_n T_e} \approx T_e \sum_{n=0}^{(N-1)} x(nT_e) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (\text{IV-3})$$

Ce n'est pas une approximation sophistiquée de $X(f)$, mais elle est très utilisée en pratique sous le nom de TFD car il existe un algorithme de calcul efficace appelé FFT (Fast Fourier Transform) ou TFR (Transformée de Fourier rapide).

La TFD est par ailleurs utilisée, lorsque l'on travaille avec des suites numériques sans lien avec un signal physique, pour définir une représentation de la suite sur une base de fonctions fréquentielles.

IV.2.1. Définition de la TFD

On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite de N termes $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, la suite de N termes $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$, définis par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(n-1)} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (\text{IV-4})$$

En pratique, les N termes $x(n)$ peuvent être N échantillons d'un signal analogique échantillonné :

$x_n = x(nT_e)$, et les N termes $X(k)$ correspond à une approximation (à un facteur multiplicatif T_e près) de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $f_k = kf_e/N$, avec k entre 0 et $(N-1)$, c'est à dire f entre 0 et f_e .

Si cette série converge, la transformée de Fourier inverse est définie par :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{(n-1)} X(k) e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (\text{IV-5})$$

$$\text{TFD}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$$

On prend un de ces éléments on l'appelle X_L tel que $0 \leq L \leq n-1$ ou L la position de X_i

$$X_L = \sum_{K=0}^1 X_K \omega^{-KL} \quad (\text{IV-6})$$

$$\omega = e^{j\frac{2\pi}{n}} \quad (\text{IV-7})$$

Exemple :

Calcul de TFD pour $n=2$:

$$\text{TFD}(x_0, x_1) = (X_0, X_1)$$

$$L=0 \Rightarrow X_0 = \sum_{K=0}^1 x_K \omega^{-K(0)} = \omega^{j\pi} = -1 \quad (\text{IV-8})$$

$$= \sum_{K=0}^1 x_K (-1)^{(0)} = \sum_{K=0}^1 x_K (1) = \sum_{K=0}^1 x_K = x_0 + x_1 \quad (\text{IV-9})$$

$$\text{D'où } X_0 = x_0 + x_1 \quad (\text{IV-10})$$

$$L=1 \Rightarrow X_1 = \sum_{K=0}^1 x_K \omega^{-K(1)} = \sum_{K=0}^1 x_K (-1)^{-K} \quad (\text{IV-11})$$

$$= x_0(-1)^0 + x_1(-1)^{-1} = x_0 + x_1(-1) = x_0 - x_1 \quad (\text{IV-12})$$

$$\text{TFD}(x_0, x_1) = (X_0, X_1) = (x_0 + x_1, x_0 - x_1) \quad (\text{IV-13})$$

$$\text{Ex : TFD}(1,2) = (X_0, X_1) = (1 + 2, 1 - 2) = (3, -1) \quad (\text{IV-14})$$

IV.2.2. Propriétés

Tableau. IV.1. Propriétés de la transformée de Fourier discret

Propriétés	$x[n]$	$X(F)$
Linéarité		
Translation	$x(n-k)$	
		$X(f-f_0)$
Convolution		

IV.2.3. Relation avec la série de Fourier:

Avec la position du facteur d'échelle $1/N$ choisie dans la définition (IV.2.1) de la TFD, les valeurs $X(k)$ représentent, aux repliements de spectre près, les coefficients du développement en série de Fourier du signal périodique, quand ce signal ne présente pas de discontinuité. Si ce n'est pas le cas, des différences importantes apparaissent. En effet, on montre qu'à un point de discontinuité t_0 de la fonction périodique $x(t)$, le développement en série de Fourier de $x(t)$ prend une valeur égale à la moyenne des limites à gauche et à droite de $x(t)$ quand t tend vers t_0 . Par contre, la TFD inverse restitue exactement les échantillons du signal d'origine et par suite les valeurs $X(k)$ comprennent la TFD de la distribution des discontinuités avec le signe inverse et le facteur $1/2$.

IV.2.4. Fenêtres de pondération

De nombreuses fenêtres de pondération ont été proposées pour l'analyse spectrale. Ces fenêtres sont utilisées pour limiter (tronquer) la durée temporelle du signal $x(t)$ à analyser. En notant $x(t)$ le signal, $F(t)$ la fenêtre, et $x_{tr}(t)$ le signal tronqué, on obtient la relation suivante :

$$x_{tr} = x(t)F(t) \quad (\text{IV-6})$$

Et dans le domaine fréquentiel :

$$X_{tr} = X(f) * F(f) \quad (\text{IV-7})$$

Pour une même durée temporelle NT_e , on compare les différentes fenêtres essentiellement par leurs propriétés fréquentielles. Idéalement, on aimerait que la troncation du signal en temps ne modifie pas son contenu fréquentiel, c'est-à-dire que $X(f) = X_{tr}(f)$, ce qui suppose que $F(f) = \delta(f)$. En pratique, ce n'est pas possible et les fenêtres $F(f)$ présentent un lobe principal de largeur non nulle centré autour de la fréquence nulle et en

général des lobes secondaires de hauteur non nulle. On peut caractériser une fenêtre par des paramètres tels que :

- La largeur du lobe principal, mesurée à 3 dB d'atténuation par rapport à l'amplitude à la fréquence $f = 0$, ou bien à mi-hauteur.
- La hauteur maximale des lobes secondaires (quand ils existent).

Ces paramètres influencent respectivement la résolution et la dynamique de l'analyse spectrale.

La résolution est la capacité à distinguer 2 fréquences proches. La dynamique est la capacité à mesurer des composantes fréquentielles d'amplitudes très différentes sans que la plus forte ne masque la plus faible.

De manière générale, la largeur du lobe principal est inversement proportionnelle à la durée temporelle de la fenêtre.

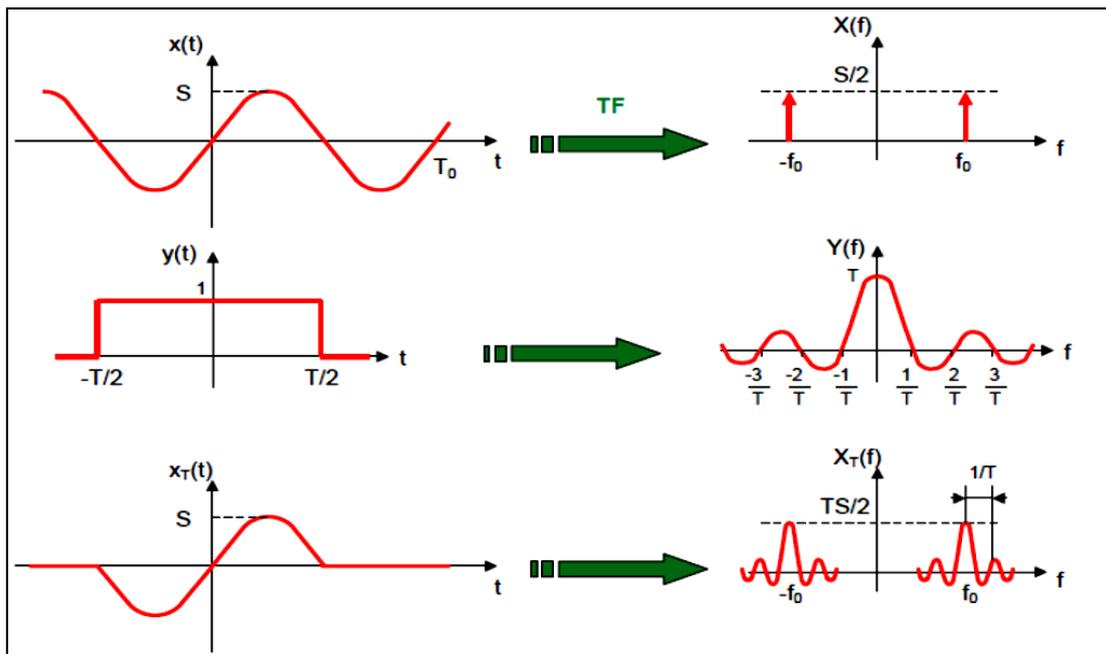


FIG. IV.2. Fenêtrage.

☞ Remarque :

1- On constate que le fait de tronquer le signal tend à élargir les raies contenues dans le spectre. Plus la fenêtre sera large, plus les raies seront étroites et tendront vers les Dirac originaux.

On le conçoit aisément dans le domaine temporel puisque plus la fenêtre est large et plus le signal tronqué se rapprochant du signal d'origine.

2- Si on ne conserve qu'une période (environ) de la sinusoïde, les deux sinus cardinaux se chevaucheront bien avant d'avoir atteint des amplitudes négligeables. Ainsi, plus on voudra une résolution importante en fréquence plus il faudra conserver un nombre important de périodes temporelles du signal à analyser. La qualité de la représentation spectrale sera d'autant plus grande que la période d'acquisition T sera longue.

3- La fenêtre rectangulaire n'est pas forcément la meilleure. Dans le domaine temporel, elle interrompt brusquement le signal à ces extrémités générant artificiellement des hautes fréquences.

Dans le domaine fréquentiel, la fonction sinus a des lobes non négligeables loin de la fréquence $f = 0$ qui déforme le spectre.

IV.3. Notion de transformée de Fourier rapide TFR (Fast Fourier transform FFT)

La Transformée de Fourier Rapide (notée par la suite FFT) est simplement une TFD calculée selon un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations et, en particulier, le nombre de multiplications à effectuer.

Il faut noter cependant, que la réduction du nombre d'opérations arithmétiques à effectuer, n'est pas synonyme de réduction du temps d'exécution. Tout dépend de l'architecture du processeur qui exécute le traitement.

Pour calculer une TFD, on doit calculer N valeurs $X(k)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N-1)} x(n)e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} \quad (\text{IV-8})$$

Et ceci pour $k \in [0, N - 1]$.

Si on effectue le calcul directement sans algorithme efficace, on doit effectuer :

$$\begin{cases} N^2 \text{ multiplication complexes} \\ N(N - 1) \text{ additions complexes} \end{cases}$$

Il existe différents algorithmes de FFT. Le plus connu est sûrement celui de **Cooley-Tukey** (appelé aussi à entrelacement temporel ou à *decimation in time*).

IV.3.1. Présentation de l'algorithme de Cooley-Tukey

On pose :

$$X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{nk} \quad (\text{IV-9})$$

Avec

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

Propriétés de W_N :

$$\omega_N^{2nk} = e^{\frac{-2j\pi nk}{N/2}} = \omega_{N/2}^{nk} \quad (\text{IV-10})$$

$$\omega_N^{nk+N/2} = e^{\frac{-2j\pi(nk+\frac{N}{2})}{N}} = -\omega_N^{nk} \quad (\text{IV-11})$$

La condition d'utilisation est d'avoir un nombre d'échantillons puissance de 2 : $N = 2^m$

Si on effectue un dédoublement temporel en séparant les indices pairs et impairs :

$$\begin{cases} x1[n] = x[2n] \\ x2[n] = x[2n + 1] \end{cases} \quad (\text{IV-12})$$

En exploitant les propriétés de W_N , on trouve alors :

$$\text{Pour } 0 \leq K \leq \frac{N}{2} - 1 \begin{cases} X[K] = X1[K] + \omega_N^K X2[K] \\ X\left[K + \frac{N}{2}\right] = X1[K] - \omega_N^K X2[K] \end{cases} \quad (\text{IV-13})$$

Remarque :

Le coût de calcul passe de l'ordre de N^2 à $N \log_2(N)$.

Bibliographie

1. T. Dumartin « *Rappels Traitement du Signal* » Note de cours, Licence Professionnel Optronique Année 2004 – 2005.
 2. E. Losson, O. Horn, G. Bourhis et A. Fattouh « *T. P. Traitement du Signal Maîtrise E.E.A* », Année Universitaire 2004/2005.
 3. Essid Chaker« *Systèmes et Signaux : Partie1* ».
 4. G. CHAGNON « *Cours de Génie Electrique* » Licence Professionnelle de Génie Industriel Université Paris VI-Jussieu ; CFA Mecavenir Année 2003-2004.
 5. Gérard Scorletti. « *Traitement du Signal* »Ecole Centrale de Lyon, 2013, pp.193.
 6. Frédéric SUR. « *Initiation au traitement du signal et applications* » Notes de cours, Département Génie Industriel École des Mines de Nancy Version 0.4, 2009-2012.
 7. G. Dauphin « *Traitement du signal* » Notes de cours, 12 octobre 2015.
 8. S. Natkin « *Introduction au traitement du signal* » Notes de cours Avril 2003.
 9. Fabrice HEITZ « *Introduction au traitement du signal* » cours, Université de Strasbourg / I Cube CNRS Janvier 2015.
 10. Jean-Philip pemuller « *Analyse spectrale* »Notes de cours juillet 2002.
 11. Christian JUTTEN « *Théorie du signal* » Cours de deuxième année (3i4) du département 3i, Université Joseph Fourier - Polytech' Grenoble,novembre 2009.
 12. B. Gosselin « *La Quantification des Signaux* »Notes de Cours, Faculté polytechnique de Mons, 2002.
 13. P. Ribière « *Modulation et démodulation d'amplitude* » Collège Stanislas Année Scolaire 2016/2017.
 14. James Broesch « *Comprendre le traitement numérique de signal* » Edition Publitrone/Elektor.
 15. Francis Cottet « *Traitement du signal Aide-mémoire* » Edition Dunod.
 16. James L. Crowley et Antoine Roueff « *Filtrage et traitement du signal* » Cours RICM-2-HR20MTS janvier 2001.
 17. Gérard Scorletti « *Traitement du Signal* » Ecole Centrale de Lyon, Cours STI tc2, pp.193, 2013.
 18. Claude Divoux « *Représentation fréquentielle d'un signal* »BTS CIM 2005.
-

19. Maurice Bellanger « *Traitement numérique du signal* » Théorie et pratique 8^e édition Dunod, Paris, 2006.
 20. G. BAUDOIN et J.-F. BERCHER « *ÉLÉMENTS DE TRAITEMENT DU SIGNAL* » École Supérieure d'Ingénieurs en Électrotechnique et Électronique» Septembre 1998.
 21. Serge DOS SANTOS « *traitement du signal* » cours, Département Génie des Systèmes Industriels, Institut National des Sciences Appliquées Centre Val de Loire - Blois – Bourges, Année 2015-2016.
 22. http://www.univ-tours.fr/m-dos-santos-serge-204687.kjsp?RH=ACCUEIL_FR
 23. https://sites.google.com/site/sfagispages/Cours_TS_2016_INSACVL.pdf
 24. H. Klee and R. Allen. « *Simulation of Dynamic Systems* » CRC Press, 2011. Disponible à la bibliothèque Michel Serres, Ecole Centrale de Lyon, côte 003.3 KLE.
 25. Frederic LAUNAY « *cours traitement du signal* » Département R&T – IUT de Poitiers site de Chatellerault, 2007.
 26. Jean AUVRAY « *Traitement du Signal* » cours.
 27. PICINBONO « *Introduction à la théorie du signal* » ed : DUNOD.
 28. J MAX « *Méthodes et techniques du traitement de signal* » ed : MASSON 2 Tomes.
-

Annexe 1 : Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$\delta_T(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

La décomposition en série de Fourier donne :

$$\text{SdF}[\delta_T(t)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn2\pi f_n t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn2\pi \frac{t}{T}} \quad \text{avec} \quad S_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn2\pi f_n t} dt$$

$$\text{d'où } S_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \cdot e^{-jn2\pi f_n t} dt$$

sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$, $\delta_T(t) = 1$ pour $t = 0$ et 0 ailleurs.

$$\text{donc } S_n = \frac{1}{T} e^{-jn2\pi f_n t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

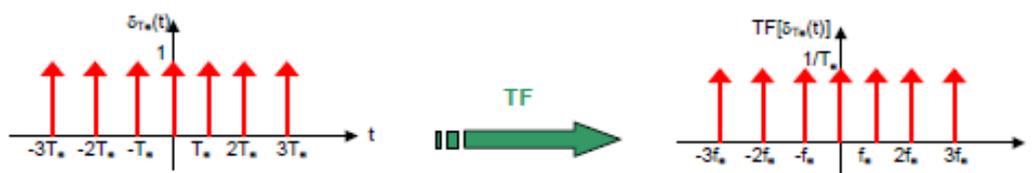
donc la décomposition en série de Fourier du peigne de Dirac vaut :

$$\text{SdF}[\delta_T(t)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jn2\pi f_n t} = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{jn2\pi f_n t}$$

Comme $\text{TF}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \delta(f + f_0)$:

$$\text{TF}[\delta_T(t)] = \frac{1}{T} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0)$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac (en temps) est un peigne de Dirac (en fréquence).



Annexe 2 : Transformée de Fourier de la fonction porte

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \left|\frac{t}{T}\right| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour } \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

La transformée de Fourier donne :

$$\text{TF}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\text{d'où } \text{TF}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \left[\frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi ft} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{j2\pi f} \left[e^{j2\pi f T/2} - e^{-j2\pi f T/2} \right]$$

$$\text{TF}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \frac{1}{\pi f} \left[\frac{e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}}{2j} \right] = \frac{1}{\pi f} \sin(\pi f T)$$

$$\text{comme } \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\boxed{\text{TF}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = T \text{sinc}(Tf)}$$

La transformée de Fourier d'une fonction porte est un sinus cardinal.

