RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN-TIARET

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES
ET DE L'INFORMATIQUE

Notions sur les équations aux dérivées partielles

Master 2

Mathématiques et Informatique

Réalisé par

Dr **Souhila Sabit**

Expertisé par :

Pr **Abdelkader Senouci** - Université Ibn Khaldoun, Tiaret.
Pr **abderrahmane Larabi** - Université Ibn Khaldoun, Tiaret.

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé **"EDP"** dans la suite, constituant une branche importante des mathématiques appliquées. Elles expriment sous forme d'égalités des relations que doivent satisfaire les dérivées partielles d'une certaine fonction inconnue u de plusieurs variables afin de décrire un phénomène physique et pour satisfaire une propriété prescrite.
Nous avons l'habitude de classer les équations aux dérivées partielles en trois grandes classes fondamentales d'équation : elliptique,parabolique et l'équation hyperbolique
La physique, la biologie et les sciences pour l'ingénieur nécessitant de savoir résoudre une grande variétés des équations différentielles aux dérivées partielles.

La modélisation d'un problème réel utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, acoustique, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Équations Différentielles Ordinaires ou par des Équations aux Dérivées Partielles.

Les Équations aux dérivées partielles interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en Économie pour étudier le comportement des marchés et en finance pour étudier les produits dérivées (options et obligations).

Notre travail est divisé en plusieurs chapitres. Dans le premier chapitre, on présente un rappel sur l'analyse vectorielle et classifications des équations aux Dérivées Partielles. Ensuite, on explique la méthode de caractéristique et on l'applique sur les équations aux dérivées partielles et en particulier les EDPs ordre un et deux dans $\mathbb{R}^2$.

Le troisième chapitre présente la méthode de séparation des variables en appliquant sur l'équation de la chaleur, l'équation des ondes et l'équation de Laplace. Le quatrième chapitre présente la méthode des différences finies appliquée sur les trois types d'équations aux Dérivées partielles elliptique, parabolique et hyperbolique en en dimension un et deux. Enfin, le cinquième et le dernier chapitre est dédié à la méthode des différences finis appliquer sur les trois types d'équations aux Dérivées partielles elliptique, parabolique et hyperbolique (idem ci-dessus).

Chapitre 1

Rappels

1.1 Rappels d'analyse vectorielle

1.1.1 Quelques rappels (Champ scalaire,...)

Définition 1.1.1 (Champ scalaire). *Un champ scalaire est une fonction de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$*,où* $n = 2$ *ou* 3.

Définition 1.1.2 (Champs vectoriel). *Un champ vectoriel est une fonction de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$*,* $p > 1$.
Nous placerons généralement dans les cas n *et* p *égaux à* 2 *ou* 3.

Définition 1.1.3 (Dérivée directionnelle). *La dérivée Directionnelle de* f *dans une direction du vecteur* v *au point* x *est définie par :*

$$D_v f = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

Proposition 1.1. *Si toutes les dérivées partielles sont définie alors :*

$$D_v f = \nabla f.v \tag{1.2}$$

1.1.2 Dérivation des fonctions composées

Proposition 1.2. *On rappelle les formules de dérivation des fonctions composées à plusieurs variables. Par exemple dans le cas :*

Exemple 1.1.1.

$$g(s,t) = f\left(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\right)$$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial s} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial t} \end{cases} \tag{1.3}$$

Ce que l'on peut également noter :

$$\begin{cases} g_s = f_x x_s + f_y y_s + f_z z_s \\ \\ g_t = f_x x_t + f_y y_t + f_z z_t \end{cases} \tag{1.4}$$

1.1.3 Dérivées partielles d'ordre supérieure

Proposition 1.3. *Les dérivées d'ordre deux sont les dérivées premières de fonctions qui sont elle-mêmes dérivées partielles premières d'une fonction. Et ainsi de suite pour les dérivées d'ordre supérieur.*

Exemple 1.1.2.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

De même on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Proposition 1.4.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Si les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues

1.2 Concepts de base et définitions

Il existe une infinité d'équation aux dérivées partielles.Il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre toutes celles-ci.Il faut donc restreindre notre champ d'étude.On réalisera ceci en exigeant que l'équation satisfasse certaine propriétés.par exemple qu'elle soit linéaire.C'est ce que nous décrirons dans ce section.Nous énumérerons aussi quelques-unes des équations aux dérivées partielles classiques. Beaucoup de domaines sont fortement dépendants de la théorie des équations aux dérivées partielles.L'acoustique, l'aérodynamique, la dynamique des fluide, l'élasticité, l'électrodynamique, la géophysique, la mécanique quantique, la météorologie, l'océanographie, la physique des plasmas sont quelques-uns de ces domaines.

Définition 1.2.1 (EDP)**.** *Une équation aux dérivées partielles ou EDP[10, 19, 8, 1], est une relation faisant intervenir une fonction inconnue u de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *,les variables* $x_1, x_2, ...,$ *ses dérivées partielles,* $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ... \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)$*. Elle s'écrit de façon générale :*

$$F\left(x_1, x_2, ...x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ... \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0 \tag{1.5}$$

L'équation (1.5) *est considérée dans domaine* Ω *de* $\mathbb{R}^n$.
*Les **solutions de l'équation aux dérivées partielles*** (1.5) *sont les fonctions qui vérifient cette équation dans* Ω.

Exemple 1.2.1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.6}$$

Les fonctions $u(x,y) = (x+y)^3$ *et* $u(x,y) = sin(x-y)$ *sont toutes deux des solutions de* (1.6).

Définition 1.2.2 (L'ordre d'une EDP)**.** *L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation.*

Exemple 1.2.2.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \tag{1.7}$$

— *L'équation* (1.6) *est d'ordre 2.*
— *L'équation* (1.7) *est d'ordre 1.*

Définition 1.2.3. *En mathématiques, un problème est dit* ***bien posé*** *s'il a une solution et si cette solution est unique.*

1.2.1 Équation aux dérivée partielle linéaire

Définition 1.2.4. *Une équation aux dérivées partielles est linéaire[10, 3] par rapport à la fonction u et à toutes ses dérivées partielles. On peut écrire sous la forme :*

$$L(u) = f \tag{1.8}$$

L : l'opérateur aux dérivées partielles associé à une EDP.

Définition 1.2.5. *On dit qu'une équation aux dérivées partielles du seconde ordre est linéaire[10, 3, 8, 1] si la dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire :*

$$\begin{aligned} a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &+ 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} \\ &+ e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u + g(x,y) = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Exemple 1.2.3. *Soit l'équation* (1.6)

$$\begin{aligned} L(\alpha u + \beta v) &= \frac{\partial^2(\alpha u + \beta v)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(\alpha u + \beta v)}{\partial y^2} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ &= \left(\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\beta v)}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\beta v)}{\partial y^2}\right) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ &= \left(\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ &= \alpha L(u) + \beta L(v) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc l'équation (1.6) *est linéaire.*

Remarque 1.2.1. *L'équation du seconde ordre est dite homogène[17] si la fonction g est identiquement nulle sur Ω de l'équation (1.9) et s'écrit sous la forme.*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u = 0 \quad (1.10)$$

Exemple 1.2.4.

— *L'équation* (1.6) *est linéaire homogène.*

Définition 1.2.6. *Une équation aux dérivées partielles homogène est :*

$$L(u) = 0$$

Théorème 1.2.1.

1. *Si u est solution de* (1.8) *et v solution de l'équation homogène.alors $u+v$ est solution de* (1.8)
2. *Si u_1 est solution de $L(u) = f_1$ et u_2 est solution de $L(u) = f_2$ alors $u_1 + u_2$ est solution de $L(u) = f_1 + f_2$*

1. Comme : $L(u) = f$ et $L(v) = 0$.
   Donc : $L(u + v) = L(u) + L(v) = f$ car la linéarité de L.
   Alors : $u + v$ est solution de (1.8)
2. Nous savons que $L(u_1) = f_1$ et que $L(u_2) = f_2$.
   Par conséquent $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) = f_1 + f_2$.
   Nous avons donc que $u_1 + u_2$ est solution de $L(u) = f_1 + f_2$.

Théorème 1.2.2. *La solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre n dépend linéairement de n fonctions arbitraires.*

Exemple 1.2.5. *Considérons par exemple, l'équation linéaire homogène*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

En intégrant par rapport à y,on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)$$

En intégrant ensuite par rapport à x,et en notant F est une primitive de la fonction arbitraire f, on obtient :

$$u(x,y) = F(x) + h(y)$$

Les fonctions F et h sont deux fonctions quelconques.

1.2.2 Équation aux dérivée partielle quasi-linéaire

Définition 1.2.7. *Une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction u.*

Définition 1.2.8. *On dit qu'une équation aux dérivées partielles du seconde ordre est **quasi-linéaire** si elle est de la forme :*

$$\begin{aligned} a\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ + c\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

où a, b, c et $\mathcal{F}$ sont des fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

Exemple 1.2.6.

$$u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = y \tag{1.12}$$

— *L'équation* (1.15) *est quasi-linéaire.*

1.2.3 Équation aux dérivée partielle Non-linéaire

Définition 1.2.9. *On dit qu'une équation aux dérivées partielles est complètement non linéaire[11] si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.*

Exemple 1.2.7. *L'équation* (1.7)

1.2.4 Les conditions aux limites

Définition 1.2.10.

*i. On appelle **condition de Dirichlet** une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée sur le bord $\partial\Omega$. Une **problème du premier type** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Dirichlet.*

*ii. On appelle **condition de Neumann** une condition où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée sur le bord $\partial\Omega$. Un **problème du deuxième type** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Neumann.*

*iii. On appelle **condition de Fourier-Robin** une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord $\partial\Omega$.*

1.3 Équation aux dérivée partielle du premier ordre

Définition 1.3.1. *Une équation dans laquelle figure une fonction u de plusieurs variables indépendantes $x_1, x_2, ..., x_n$ et des dérivées partielles du 1^{er} ordre de u par rapport à ces variables[11, 14, 3], c'est-à-dire une équation de la :*

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

est dite une équation aux dérivées partielles du 1er ordre Toute fonction $u(x_1, ..., x_2)$ qui satisfait identiquement à cette équation est une solution de celle-ci.

Définition 1.3.2. *f, g, h étant trois fonctions, supposées de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, on appelle **équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du premier ordre**, d'inconnue u, une équation de la forme :*

$$f(x,y,u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y,u(x,y))\frac{\partial u}{\partial y} = h(x,y,u(x,y)) \tag{1.13}$$

1.3.1 Équation de Transport

Les équations de transport[7, 11] sont les EDP linéaires du premier ordre. Dans le cas monodimensionnel, elles peuvent s'écrire sous la forme générale suivante :

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u(x,t) = d(x,t) \tag{1.14}$$

sur un domaine $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.La seconde variable est souvent notée t pour souligner une évolution en temps. Nous verrons que l'on peut envisager de la même façon des équations linéaires du premier ordre dans des espaces de dimension supérieure en considérant que la variable $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. On obtient alors une forme plus générale pour l'équation de transport :

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t).\nabla_x u(x,t) + c(x,t)u(x,t) = d(x,t) \tag{1.15}$$

Il est important de remarquer que le terme $b(x,t)$ doit être désormais vectoriel dans cette formulation.

1.4 Équation aux dérivée partielle du second ordre

Définition 1.4.1. *On appelle E.D.P linéaire d'ordre inférieure ou égale à 2 dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et d'inconnue*

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

une équation de type

$$\sum_{i,j=1} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + g(x)u(x) = h(x)$$

Par convention, on supposera que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$

Avec $A(x) = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ la matrice $N \times N$ symétrique de coefficients devant les termes d'ordre 2.

1.4.1 Classification des équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^N$

1.4.1.1 Équation aux dérivée partielle elliptiques

Définition 1.4.2. *Une E.D.P. linéaire du second ordre est dite elliptique[10, 19, 1] en $x \in \Omega$ si la matrice $A(x)$ n'admet que des valeurs propres* ***non nulles*** *et qui sont* ***toutes de même signe****.*

Exemple 1.4.1 (Équation de Laplace)**.** *Soit $u(x, y, ...)$ une fonction définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, et vérifiant dans ce domaine l'équation de Laplace :*

$$\Delta u = 0 \tag{1.16}$$

Les fonctions qui vérifient cette équation sont dites ***harmoniques*** *dans Ω.*

1.4.1.2 Équation aux dérivée partielle hyperboliques

Définition 1.4.3. *Une E.D.P. est dite hyperbolique[10, 19, 20] en $x \in \Omega$ si $A(x)$ n'admet que des valeurs propres* ***non nulles*** *et qui sont* ***toutes de même signe sauf une de signe opposé****.*

Exemple 1.4.2 (Équation des Ondes)**.** *[7, 1] Soit $u(x, y, ..., t)$ une fonction des variables d'espace $(x, y, ...)$ et du temps t , définie sur domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ et pour t positif. L'équation des ondes pour la fonction u s'écrit :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \tag{1.17}$$

1.4.1.3 Équation aux dérivées partielles paraboliques

Définition 1.4.4. *On dire que l'E.D.P. est parabolique en $x \in \Omega$ si $A(x)$ admet $N - 1$ valeurs propres* ***non nulles*** *de même signe et* ***une valeur propre nulle****.*

Exemple 1.4.3 (Équation de la Chaleur)**.** *[19, 20, 1] Soit $u(x, y, ...)$ une fonction des variable d'espace $(x, y, ...)$ et du temps t , définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ et pour t positif. L'équation de la chaleur pour la fonction u s'écrit :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad \textit{avec } f \textit{ donnée.} \tag{1.18}$$

C'est cette équation qui régit, entre autre, l'évolution de la température u en un point (x, y, z) d'un domaine Ω au cours du temps t en présence d'une source de chaleur volumique définie par f. C'est cette même équation qui décrit l'évolution de la concentration d'un produit dans un solvant (d'où le nom d'équation de la diffusion).

1.4.2 Classification des équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.4.5. *a, b, c étant trois fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$, on appelle* ***équation aux dérivées partielles semi-linéaire du second ordre****,d'inconnue u,une équation de la forme :*

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.19}$$

Remarque 1.4.1. *Suite aux* ***Définition 1.4.1*** *avant la matrice A est définie sous cette forme :*

$$A = \begin{bmatrix} a(x,y) & b(x,y) \\ b(x,y) & c(x,y) \end{bmatrix}$$

alors le polynôme caractéristique de cette matrice :

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$$

donc il y a deux valeur propre λ_1 et λ_2 avec :

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = \frac{ac - b^2}{1} \quad et \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{a+c}{2}$$

1.4.2.1 Équation aux dérivées partielles hyperboliques

Définition 1.4.6. *Une équation telle que, dans un domaine Ω :*

$$b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0 \tag{1.20}$$

est dite ***hyperbolique*** *dans ce domaine.*

Remarque 1.4.2. *Dans la* ***Définition 1.4.6*** *, On dit que l'équation hyperbolique si les valeurs propre sont non nulles et de même signe sauf une alors :*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 < 0 &\implies ac - b^2 < 0 \\ \textit{et ce que donne :} &\implies b^2 - ac > 0 \end{aligned}$$

Exemple 1.4.4 (Équation des Ondes)**.** *L'étude des vibrations d'une corde infinie, libre de toute sollicitation, consiste à étudier les variations du déplacement transversal u au cours du temps. On se donne la position u et la vitesse du déplacement transversal u au temps zéro. Le modèle correspondant s'écrit :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= f(x) \qquad \textit{donnée} \\ \frac{\partial u}{\partial t} u(x,0) &= g(x) \qquad \textit{donnée} \end{aligned} \tag{1.21}$$

1.4.2.2 Équation aux dérivées partielles paraboliques

Définition 1.4.7. *Une équation telle que, dans un domaine Ω :*

$$b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 0 \tag{1.22}$$

est dite ***parabolique*** *dans ce domaine.*

Remarque 1.4.3. *Dans la* ***Définition 1.4.7****, On dit que l'équation parabolique si une valeurs propre est nulle.*

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = 0 \Longrightarrow b^2 - ac = 0$$

Exemple 1.4.5 (Équation de la Chaleur). *Considérons le problème physique suivant : on veut connaître la température dans une barre infinie, sans apport de chaleur et dont la température est initialement donnée. Le modèle correspondant s'écrit :*

$$\textit{trouver} \qquad u : (x, y) \longrightarrow u(x, y) \qquad \textit{telle que :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= f(x) \qquad \textit{donnée} \end{aligned} \tag{1.23}$$

1.4.2.3 Équation aux dérivées partielles elliptiques

Définition 1.4.8. *Une équation telle que, dans un domaine Ω :*

$$b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) < 0 \tag{1.24}$$

*est dite **elliptique** dans ce domaine.*

Remarque 1.4.4. *Dans la **Définition 1.4.8**, On dit que l'équation elliptique si les valeurs propre sont non nulles et de même signe alors :*

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 > 0 &\implies ac - b^2 > 0 \\ &\implies b^2 - ac < 0 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Exemple 1.4.6 (Équation de Laplace). *Considérons le problème physique suivant : on veut connaitre la température dans un demi plan connaissant la température sur le bord, sachant que cette température tend vers 0 en s'éloignant de ce bord et qu'il n'y a aucun apport de chaleur. Le modèle mathématique correspondant s'écrit :*

$$\textit{trouver} \qquad u : (x, y) \longrightarrow u(x, y) \qquad \textit{telle que :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= f(x) \qquad \textit{donnée} \\ u(x,+\infty) &= 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

1.5 Système orthogonal

Soit fonctions $\{\phi_n(x)\}_n$ continues sur l'intervalle $[a, b]$.
Nous dirons que $\{\phi_n(x)\}_n$ est un système orthogonal sur $[a, b]$ **si et seulement si** :

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\ dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \neq 0 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

sectionLa constante de séparation La dernière égalité $\dfrac{\psi''(t)}{a^2\psi(t)} = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda$ dont le première membre dépend de t seul et le second de x seul ,n'est possible que si les deux membres ne dépendent ni de t ni de x i.e sont égaux à une même constante désignons cette constante par λ.

Chapitre 2

La méthode des caractéristique

2.1 Équation aux dérivées partielles du premier ordre

On s'intéresse maintenant à la résolution d'une équation aux dérivées partielles[10, 19, 8, 1] quasi-linéaire du premier ordre :

$$f(x,y,u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}+g(x,y,u(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}=h(x,y,u(x,y)) \tag{2.1}$$

2.1.1 Solution générale

Une solution u de (2.1) peut être vue comme une fonction associant à un point (x,y) du plan une altitude $z=u(x,y)$,et être interprétée comme une surface de $\mathbb{R}^3$. On choisit alors de rechercher les solutions de (2.1) sous forme implicite, i.e. des fonctions φ définissant implicitement u comme solution de (2.1) :

$$\varphi(x,y,z)=Constante \Longleftrightarrow z=u(x,y)$$

D'après le **Théorème des fonctions implicites** (A.1) voir [10], en tout point où $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}} \qquad et \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}} \tag{2.2}$$

u est alors solution de (2.1) si :

$$f(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}+g(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}+h(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \tag{2.3}$$

φ est donc une intégrale première du système

$$\frac{dx}{f(x,y,z)}=\frac{dy}{g(x,y,z)}=\frac{dz}{h(x,y,z)} \tag{2.4}$$

Le système (2.4) est appelé **système caractéristique[19, 11]** de (2.1). Ceci nous amène donc au théorème suivant :

Théorème 2.1.1. *Les solutions de* (2.1) *sont les intégrales premières du système caractéristique* (2.4)*. Si φ et ϕ sont deux intégrales premières indépendantes et F une fonction de deux variables non constante, alors les solutions s'écrivent sous forme implicite :*

$$F(\phi(x,y,u(x,y)),\varphi(x,y,u(x,y))) = Constante \tag{2.5}$$

Exemple 2.1.1. *Soit à résoudre :*

$$x(y-u)\frac{\partial u}{\partial x} + y(u-x)\frac{\partial u}{\partial y} = (x-y)u$$

Le système caractéristique est : $(u(x,y)=z)$

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

Les intégrales premières sont données par :

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \longmapsto \phi(x,y,z) & = & x+y+z \\ & et & \\ (x,y,z) \longmapsto \varphi(x,y,z) & = & xyz \end{array}$$

Les fonctions de la forme $(x,y,z) \longmapsto \psi(x,y,z) = F(\phi(x,y,z),\varphi(x,y,z))$ décrivent l'ensemble des intégrales premières.
On peut donc donner les solutions u sous forme implicite :

$$(x,y) \longmapsto F(x+y+u(x,y), xyu(x,y)) = Constante$$

2.1.2 Cas particulier : $f(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + g(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

C'est l'équation des intégrales premières de :

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g}$$

Une solution est donc de la forme $u = H(x,y)$ où H est une intégrale premières de :

$$\frac{dx}{f} = \frac{dy}{g}$$

Soit φ l'une de ces intégrales premières, on sait que toutes les autres sont de la forme $F(\varphi)$, F étant de classe C^1.

Théorème 2.1.2. *Soit :*

$$f(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

et :

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)} \tag{2.7}$$

son système caractéristique. Pour résoudre (2.6) on cherche une intégrale première z de (2.7) toute solution de (2.6) est alors de la forme $u = F[z]$ où F est de classe C^1.

Exemple 2.1.2.

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.8}$$

Le système caractéristique de (2.8) *est donné par :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{x} \\ 0 = dz \end{cases} \tag{2.9}$$

On voit directement que $(x, y, z) \longmapsto \phi(x, y, z) = z$ *est une intégrale première. Par ailleurs :*

$$0 = xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2)$$

Autrement dit, $(x, y, z) \longmapsto \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2$ *est également une intégrale première.*

Toutes les solutions sont donc définies implicitement sous la forme :

$$(x, y) \longmapsto F(x^2 + y^2, u(x, y)) = Constante$$

ce qui conduit à :

$$u(x, y) = g(x^2 + y^2)$$

Les solutions sont les surfaces de révolution d'axe $(O; \mathbf{vec}z)$

2.1.3 Courbes caractéristiques

Définition 2.1.1. *f, g, h étant trois fonctions[19, 11], supposées de classe C^1 dans ouvert de $\mathbb{R}^3$, on appelle **courbes caractéristiques** de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$f(x, y, u(x, y))\frac{\partial u}{\partial x} + g(x, y, u(x, y))\frac{\partial u}{\partial y} = h(x, y, u(x, y)) \tag{2.10}$$

les solutions de son système caractéristique

$$\frac{dx}{f(x, y, z)} = \frac{dy}{g(x, y, z)} = \frac{dz}{h(x, y, z)} \tag{2.11}$$

Théorème 2.1.3. *D'après la **Proposition 2.6** voir [10, page 21], une infinité de surfaces solutions passe par chaque courbe caractéristique.*

Définition 2.1.2. *On appelle **pied de la caractéristique** passant par le point de coordonnées (x, y) le point d'intersection de la caractéristique et de la ligne sur laquelle les conditions initiales sont données (en général l'axe des abscisses).*

2.2 Équation aux dérivée partielle du second ordre

Les équations aux dérivées partielles du second ordre sont très fréquentes en physique, leur étude est donc d'un grand intérêt pratique. On considère ici le cas des équations semi-linéaires :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.12}$$

qui permettent déjà d'étudier de très nombreux phénomènes en mécanique, électromagnétisme, ...

Un cadre plus général conduirait à de nombreuses difficultés techniques qui demanderaient de très amples développements.

2.2.1 Courbes caractéristiques

Définition 2.2.1. *On appelle courbes caractéristiques de (2.12) les courbes réguliers de* $\mathbb{R}^2$*,dont une représentation paramétrique est*

$$x = X(t), y = Y(t) \tag{2.13}$$

et telles que :

$$(X'(t))^2 c(X(t), Y(t)) - 2X'(t)Y'(t)b(X(t), Y(t)) + (Y'(t))^2 a(X(t), Y(t)) = 0 \tag{2.14}$$

Théorème 2.2.1. *Si la fonction a n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de (2.12) sont les solutions de l'équation*

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0 \tag{2.15}$$

Théorème 2.2.2. *Si la fonction c n'est pas identiquement nulle, les courbes caractéristiques de (2.12) sont les solutions de l'équation*

$$c(x,y)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dx}{dy} + a(x,y) = 0 \tag{2.16}$$

Théorème 2.2.3. *Si les fonctions a et c sont identiquement nulle, les courbes caractéristiques de (2.12) sont les droites* $x = Constante, y = Constante$.

Soit $C : x = X(t), y = Y(t)$ une courbe caractéristique de (2.12).

On considère un paramètre t_0 tel que, au voisinage V_{t_0} de t_0 :

$$a(X(t), Y(t)) \neq 0$$

Si X' s'annulait dans V_{t_0}, alors, d'après la définition 4.22 d'une courbe caractéristique, on devrait avoir $a(X(t_0), Y(t_0))(Y'(t_0))^2 = 0$ et donc $Y'(t_0)$,ce qui entre en contradiction avec la régularité de la courbe caractéristique. Par suite, dans un domaine où a ne s'annule pas on a :

$$X'(t) \neq 0$$

La tangente à C n'est donc pas verticale : C peut être assimilée à la courbe représentative d'une fonction $y' = g(x)$:

$$\begin{cases} x = x = X(t) \\ y = g(x) = Y(t) \end{cases}$$

Par suite :

$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{Y'(t)}{X'(t)} \tag{2.17}$$

En divisant la relation (2.14) par $(x_c'(t))^2$,on obtient :

$$a(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y)\frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0 \tag{2.18}$$

On démontrer de même les deux autres théorèmes. On voit que la recherche de caractéristiques (dans les cas non triviaux, i.e. $a \neq 0$) se ramène à la résolution d'un problème du second ordre en $\frac{dy}{dx}$. L'existence de solutions réelles dépend alors du signe du discriminant réduit $b^2 - ac$, qui caractérise la nature de l'équation aux dérivées partielles.
Ainsi, dans le cas hyperbolique, il existe deux caractéristiques réelles, dans le cas parabolique une caractéristique réelle et dans le cas elliptique deux caractéristiques complexes conjuguées :

$$\textit{pour} \qquad a \neq 0, \qquad \begin{cases} b^2 - ac > 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ \\ b^2 - ac = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \\ \\ b^2 - ac < 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \pm i\dfrac{\sqrt{ac - b^2}}{a} \end{cases} \tag{2.19}$$

2.2.1.1 L'équation hyperboliques

Étant donnée| une **équation hyperbolique**[19, 11, 14] $(2.12)_{\mathcal{H}}$, les caractéristiques sont les solutions de (2.19) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}}$$

Après intégration, on obtient les courbes caractéristiques sous forme implicite :

$$\varphi_i(x,y) = C_i \quad , \qquad i = 1,2$$

où les $C_i \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

Exemple 2.2.1. *On considère l'équation :*

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C$$

où $x, y \in \mathbb{R}^*$ et C est une constante réelle. Pour cette équation :

$$b^2 - ac = x^2y^2$$

Cette équation est donc hyperbolique en dehors des axes de coordonnées.
Les courbes caractéristiques sont les solutions de :

$$y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \qquad et \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ou encore :

$$xdx = \pm ydy$$

Ce sont donc les courbes

$$x^2 \pm y^2 = Constante$$

2.2.1.2 L'équation paraboliques

Étant donnée| une **équation Parabolique**[19, 11, 14] $(2.12)_{\mathcal{P}}$, les caractéristiques sont les solutions de (2.19) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

Après intégration, on obtient une courbe caractéristique sous forme implicite :

$$\varphi(x, y) = C$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Exemple 2.2.2. *Soit l'équation :*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.20}$$

On a :

$$b^2 - ac = 0$$

L'équation est parabolique, elle y admet une famille de courbes caractéristiques définies par :

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

C'est à dire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2} = \frac{y}{x}$$

D'où :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Après intégration, on obtient :

$$\ln(y) = \ln(x) + c \Longleftrightarrow y = C.x$$

Donc :

$$\frac{y}{x} = Constante$$

2.2.1.3 L'équation elliptiques

Étant donnée| une **équation Elliptique** $(2.12)_{\mathcal{E}}$, les caractéristiques sont les solutions de (2.19) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\sqrt{\frac{ac - b^2}{a^2}}$$

soient $\varphi_1(x, y) = Constante$, et $\varphi_2(x, y) = Constante$, une forme implicite des courbes caractéristiques. φ_1 et φ_2 sont complexes conjuguées.

Exemple 2.2.3. *Soit l'équation suivante :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.21}$$

Pour cette équation on a :

$$b^2 - ac = -e^{2x}$$

Donc cette équation est elliptique.
Alors les courbes caractéristiques sont les solutions de :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^{2x} = 0$$

Il y a donc deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \pm ie^x$$

Où encore :

$$dy = \pm ie^x dx$$

D'où les courbes sont :

$$y \pm ie^x = Constante$$

2.2.2 Réduction à la forme standard du second ordre

2.2.2.1 Changement de variables

Proposition 2.1. *Le caractère hyperbolique, parabolique, ou elliptique d'une équation aux dérivées partielles du second ordre ne dépend pas du système de coordonnées choisi.*

On considère le changement de variables $(X(x,y), Y(x,y))$ supposé tel que le Jacobien J ne s'annule pas :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} \neq 0 \tag{2.22}$$

On pose $u(x,y) = \widetilde{u}(X,Y)$, par dérivation composée (voir 1.1.2) , on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 \\
&+ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 \\
&+ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} \\
&+ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \\
A(x,y)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} + C(x,y)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} &+ \widetilde{F}\left(X, Y, \widetilde{u}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right)
\end{aligned}$$

où on a posé :

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}\left(X, Y, \widetilde{u}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) &= 2b(x,y)\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}\right) \\
+a(x,y)\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) &+ c(x,y)\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

et :

$$
\begin{aligned}
A(x,y) &= a(x,y)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 \\
B(x,y) &= a(x,y)\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + b(x,y)\left\{\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\right\} + c(x,y)\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} \\
C(x,y) &= a(x,y)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + 2b(x,y)\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + c(x,y)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}
$$

On obtient alors :

$$
\begin{gathered}
B^2(X,Y) - A(X,Y)C(X,Y) = J^2\left(b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)\right) \\
avec \quad J^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}
\end{gathered} \tag{2.23}
$$

comme $J \neq 0$, on voit que le signe de la quantité ´$B^2 - AC$ˇ donnant le caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique est indépendant du jeu de variables retenu.

On va maintenant voir que les courbes caractéristiques permettent de définir un changement de variable conduisant à une forme simple de l'équation aux dérivées partielles (forme dite *standard*) ou certains termes parmi A, B ou C ont été annulés.

2.2.2.2 Formes standard de l'équation hyperboliques

Théorème 2.2.4. *Soient $\varphi_1(x,y) = C_1$ et $\varphi_2(x,y) = C_2$ les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation hyperbolique[19, 11, 14, 9]* $(2.12)_{\mathcal{H}}$.
En posant :

$$
\begin{cases} X = \varphi_1(x,y) \\ Y = \varphi_2(x,y) \end{cases} \qquad et \quad u(x,y) = \widetilde{u}(X,Y) \tag{2.24}
$$

Cette équation se met sous la forme :

$$
\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} = G\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}, \widetilde{u}, X, Y\right) \tag{2.25}
$$

En posant ensuite :

$$
\begin{cases} \widehat{X} = X + Y \\ \widehat{Y} = X - Y \end{cases} \qquad et \quad \widetilde{u}(X,Y) = \widehat{u}(\widehat{X},\widehat{Y}) \tag{2.26}
$$

Elle se met sous la forme :

$$
\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} = H\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}, \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}, \widehat{u}, \widehat{X}, \widehat{Y}\right) \tag{2.27}
$$

Ce sont les ***deux formes standards d'une EDP hyperbolique****.*

Démonstration. Si $a = c = 0$, on a déjà la première forme standard. Si $a \neq 0$, alors, en injectant (2.15) dans **Proposition 2.1**, et en remarquant que :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}}$$

on voit que le choix $X = \varphi_1(x, y)$ conduit à annuler $A(X, Y)$. Si besoin est, on peut également annuler C en posant $Y = \varphi_2(x, y)$ (si c est nul, on garde $Y = y$). Pour la suite, par dérivation composée :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} \frac{\partial \widehat{X}}{\partial X} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}} \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}} \\
\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} \frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}} \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}
\end{aligned}$$

Et, de même :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right] \\
&= \frac{\partial \widehat{X}}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \widehat{X}}\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right] + \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X}\frac{\partial}{\partial \widehat{Y}}\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \widehat{X}}\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right] + \frac{\partial}{\partial \widehat{Y}}\left[\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right] \\
&= \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}
\end{aligned}$$

2.2.2.3 Formes standard de l'équations paraboliques

[19, 11, 14, 9]

Théorème 2.2.5. *On pose : $X = \varphi(x, y)$. Si Y est une fonction indépendante de X, alors, en posant :*

$$u(x, y) = \widetilde{u}(X, Y) \tag{2.28}$$

$(2.12)_{\mathcal{P}}$ *peut s'écrire sous la forme :*

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} = G\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}, \widetilde{u}, X, Y\right) \tag{2.29}$$

Démonstration. On suppose $a \neq 0$. Le changement de variable $X = \varphi(x, y)$ permet alors d'annuler A. Sachant que $b^2 - ac = 0$ et $b^2 - ac = J^2(B^2 - AC)$, on voit que l'on a automatiquement $B = 0$ (pour Y choisi de manière à ce que le changement de variables soit régulier). On se retrouve donc uniquement avec $C \neq 0$, ce qui correspond à la forme standard.

2.2.2.4 Formes standard de l'équations elliptiques

Théorème 2.2.6. *En posant :*

$$\begin{cases} X + iY = \varphi_1(x,y) \\ X - iY = \varphi_2(x,y) \end{cases} \quad et \quad u(x,y) = \widetilde{u}(X,Y) \tag{2.30}$$

$(2.12)_{\mathcal{E}}$ *s'écrit aussi :*

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} = G\left(u, X, Y, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \tag{2.31}$$

Si on fait le changement :

$$\begin{cases} \widehat{X} = X + iY \\ \widehat{Y} = X - iY \end{cases} \quad et \quad \widetilde{u}(X,Y) = \widehat{u}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \tag{2.32}$$

$(2.12)_{\mathcal{E}}$ *s'écrit sous cette forme :*

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X} \partial \widehat{Y}} = H\left(u, \widehat{X}, \widehat{Y}, \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}, \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right) \tag{2.33}$$

Démonstration. L'équation des caractéristiques (2.15) devient, en injectant les formules de changement de variables (2.30) :

$$\begin{aligned} 0 &= a\left(\frac{\partial(X+iY)}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial(X+iY)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial(X+iY)}{\partial y}\right) \\ &+ c\left(\frac{\partial(X+iY)}{\partial y}\right)^2 \\ &= A - C + 2iB \end{aligned} \tag{2.34}$$

ce qui implique puisque A, B et C sont des fonctions réelles :

$$A = C \quad et \quad B = 0 \tag{2.35}$$

2.3 Application pour les équations classiques

2.3.1 Équation de Transport

On donne, dans ce section, quelques résultats concernant les solution des équations de transport. On trouvera plus de détails sur les aspects mathématiques dans un ouvrage comme (Hörmonder, 1997).

Dans ce section, on donne quelques résultats sur les solutions de transport à coefficients constants.

Soit l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.36}$$

Où $k \in \mathbb{R}$ une constante.
Le système caractéristique de l'équation de transport (2.36) est donné par :

$$\begin{cases} dz = 0 \\ \\ dt = \dfrac{dx}{k} \end{cases} \tag{2.37}$$

Après intégration, on obtient :

$$\begin{cases} z = c_1 \\ \\ kt = x + c_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = z \\ \\ c_2 = kt - x \end{cases}$$

Donc les intégrale première de (2.37) sont donner par :

$$\begin{cases} \phi(x, y, z) = z \\ \\ \varphi(x, y, z) = kt - x \end{cases}$$

Alors les solution sont définie implicitement sous la forme

$$F(u(x, y), kt - x) = Constante$$

Ce qui conduit à :

$$u(x, y) = g(kt - x) \tag{2.38}$$

où g une fonction arbitraire.

2.3.2 Équation des Ondes

L'étude des vibrations d'une corde, d'une membrane, des oscillations électromagnétiques ... conduit à des équations hyperboliques. La plus simple est l'équation des ondes à une dimension (ou équation des cordes vibrantes) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.39}$$

Où $k \in \mathbb{R}^*$ un constante.

2.3.2.1 Type de l'équation

On a :

$$a(x, y) = 1, b(x, y) = 0 \quad et \quad c(x, y) = -k^2$$

Donc :

$$b^2 - ac = k^2 > 0$$

Alors type de l'équation est hyperbolique.

2.3.2.2 Courbes caractéristiques

D'après le Théorème (2.2.1) Les courbes caractéristiques de cette équation sont les solutions de :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - k^2 = 0 \tag{2.40}$$

Donc il y a deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = \pm\frac{\sqrt{k^2}}{1} = \pm k$$

Où encore :

$$dy = \pm k.dx$$

Après intégration, on obtient :

$$y = \pm kx + C \Longleftrightarrow C = y \mp kx \qquad \text{tel que } C \in \mathbb{R} \text{ une constante.}$$

Alors les courbes caractéristiques sont :

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = y + kx \\ \varphi_2(x,y) = y - kx \end{cases}$$

2.3.2.3 Forme standard

Soient $\varphi_1(x, y)$ et $\varphi_2(x, y)$ les deux familles de courbes caractéristiques d'une équation (4.27).

1$^{\text{ère}}$ Cas : en posant

$$\begin{cases} X = y + kx \\ Y = y - kx \end{cases} \qquad et \qquad u(x,y) = \widetilde{u}(X,Y)$$

Alors :

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial X}{\partial x} = k & & \dfrac{\partial X}{\partial y} = 1 \\ & \text{et} & \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = -k & & \dfrac{\partial Y}{\partial y} = 1 \end{array}$$

Par dérivation composée (voir 1.1.2) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = k\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} - \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y} \end{aligned}$$

Et, de même :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[k\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}-\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right)\right] \\
&= k.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}-\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= k.\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right)\right] \\
&= k.\left[\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right] \\
&= k.\left[\left(k\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}-k\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y}\right)-\left(k\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y\partial X}-k\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\right)\right] \\
&= k.\left(k\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}-k\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y}-k\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y\partial X}+k\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\right) \\
&= k^2\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\right)-2k^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y} \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}+\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y\partial X}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}+2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

En remplaçant (4.30) et (4.31) dans l'équation (4.27) donc on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[k^2\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\right)-2k^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y}\right]-k^2\left[\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}+2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\right] &= 0 \\
k^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}+k^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}-2k^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y}-k^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}-2k^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y}-k^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} &= 0 \\
-4k^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y} &= 0
\end{aligned}$$

Comme $k \in \mathbb{R}^*$ donc la forme standard s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X\partial Y} = 0 \qquad (2.43)$$

2$^{\text{ème}}$ cas : en posant

$$\begin{cases} \widehat{X} = X + Y \\ \widehat{Y} = X - Y \end{cases} \qquad et \qquad \widetilde{u}(X,Y) = \widehat{u}(\widehat{X},\widehat{Y})$$

Alors :

$$\frac{\partial \widehat{X}}{\partial X} = 1 \qquad\qquad \frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} = 1$$
$$\text{et}$$
$$\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X} = 1 \qquad\qquad \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y} = -1$$

Par dérivation composée on obtient :

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial X} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}$$

Et on :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} &= \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\right) = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y}\right) + \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}}\right) + \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

En remplaçant (4.33) dans (4.32) :

$$-4k^2\left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}\right) = 0$$

Donc la forme standard est :

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} = 0 \qquad (2.45)$$

2.3.2.4 La solution

Comme :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\right) = 0$$

On intègre par rapport à Y :

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} = f(X)$$

où f une fonction arbitraire.

Et de même, on intègre par rapport à X :

$$\widetilde{u}(X, Y) = F(X) + G(Y)$$

où F est une primitive de la fonction arbitraire f et G une fonction arbitraire.
En revenant aux variables initiales x et y ; il apparait que la solution générale de l'équation (4.27) est :

$$u(x,y) = F(y+kx) + G(y-kx) \qquad k \neq 0$$

où F et G étant deux fonctions arbitraires.

2.3.3 Équation de la chaleur

L'étude de problèmes de diffusion conduit à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \Delta u + f \qquad \forall k \in \mathbb{R}^*$$

En dimension 1, cette équation devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \forall k \in \mathbb{R}^*$$

dont l'équation homogène associée est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{R}^* \tag{2.46}$$

telle que le couple (t,x) est dans $[0,+\infty[\times\Omega$ où Ω est ouvert de $\mathbb{R}$.

2.3.3.1 Type de l'équation

On a :

$$\begin{cases} a(x,y) = -k^2 \\ b(x,y) = 0 \\ c(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow b^2 - ac = 0$$

Donc l'équation (2.46) est parabolique.

2.3.3.2 Courbes caractéristiques

D'après le Théorème (2.2.1) les courbes caractéristiques est la solution de cette équation :

$$-k^2 \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = 0 \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = 0 \Longrightarrow dt = 0 \qquad \text{car} \qquad k \neq 0$$

Après intégration, on obtient :

$$t = C \qquad C \text{ une constante}$$

Alors la courbe caractéristique est :

$$\varphi(x,t) = t$$

2.3.3.3 Forme standard

Soit $\varphi(x,t)$ la courbe caractéristique d'une équation (2.46).
Donc en posant :

$$\begin{cases} X = t \\ Y = x \end{cases} \qquad et \qquad u(t,x) = \widetilde{u}(X,Y)$$

Telle que :

$$J(X,Y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial t} & \dfrac{\partial Y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Alors par dérivation composée (voir 1.1.2) on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} \tag{2.47}$$

Et de même, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y \partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} \end{aligned} \tag{2.48}$$

On remplaçant (2.47) et (2.48) dans (2.46) on obtient la forme standard :

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} - k^2 \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} = 0$$

Donc la forme standard est :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}$$

2.3.4 Équation de Laplace

L'étude d'états d'équilibre conduit à des équations elliptique, dont la plus simple est l' équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.49}$$

Une fonction u qui vérifie cette équation dans un ouvert Ω dite harmonique dans un Ω

2.3.4.1 Type de l'équation

On a : $a(x,y) = 1$, $b(x,y) = 0$ et $c(x,y) = 1$.
Donc :

$$b^2 - ac = -1 = i^2$$

Alors l'équation est elliptique.

2.3.4.2 Courbes caractéristiques

D'après le Théorème (2.2.1) les courbes caractéristiques de cette équation sont les solutions de :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \tag{2.50}$$

Donc il y a deux familles des courbes caractéristiques :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = \pm i$$

Alors :

$$dy = \pm i dx$$

Après intégration on obtient :

$$\begin{aligned} y = c_1 + ix &\Longrightarrow c_1 = y - ix \qquad \forall c_1 \in \mathbb{R} \\ y = c_2 - ix &\Longrightarrow c_2 = y + ix \qquad \forall c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Alors les courbes caractéristiques sont :

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = y - ix \\ \varphi_2(x,y) = y + ix \end{cases}$$

2.3.4.3 Forme standard

Soient $\varphi_1(x,y)$ et $\varphi_2(x,y)$ les deux familles des courbes caractéristiques d'une équation (2.49).

1$^{\text{ère}}$ Cas : en posant

$$\begin{cases} X - iY = \varphi_1(x,y) \\ X + iY = \varphi_2(x,y) \end{cases} \qquad et \qquad u(x,y) = \widetilde{u}(X,Y)$$

Alors : $X = y$ et $Y = x$ telle que

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = 1$$

$$\text{et}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

Par dérivation composée (voir 1.1.2) on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y \partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Et, de même :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} \\
&= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Donc en remplaçant (2.51) et (2.52) dans l'équation (2.49), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} = 0 \tag{2.53}$$

Donc (2.53) est dite forme standard de l'équation (2.49)

2$^{\text{ème}}$ Cas : en posant

$$\begin{cases} \widehat{X} = X - iY = y - ix \\ \widehat{Y} = X + iY = y + ix \end{cases} \qquad et \qquad u(x,y) = \widehat{u}(\widehat{X},\widehat{Y})$$

Alors :

$$\frac{\partial \widehat{X}}{\partial x} = -i \qquad \frac{\partial \widehat{X}}{\partial y} = 1$$

et

$$\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial x} = i \qquad \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial y} = 1$$

Par dérivation composée (voir 1.1.2) on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial x} \\
&= -i\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + i\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}} \\
&= i\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}\right) \qquad (2.54)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[i\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}} - \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}\right)\right] \\
&= i\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}\right)\right] \\
&= i\left[\left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial x}\right)\right] \\
&= i\left(-i\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}} + i\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} + i\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - i\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}}\right) \\
&= -\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} + 2\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}} \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

Et, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial y} \\
&= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} + 2\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}} \qquad (2.56)
\end{aligned}$$

Alors en remplaçant (2.55) et (2.56) dans (2.49) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0\\
\left(-\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2}-\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}+2\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}}\right)+\left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2}+\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}+2\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}}\right) &= 0\\
4\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}} &= 0
\end{aligned}$$

D'où la forme standard de l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}} = 0 \tag{2.57}$$

2.3.4.4 La solution

On a :

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}} = 0$$

On intègre par rapport à $\widehat{Y}$:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} = g(\widehat{X})$$

où g une fonction arbitraire.
Et de même, on intègre par rapport à $\widehat{X}$:

$$\widehat{u}(\widehat{X},\widehat{Y}) = G(\widehat{X}) + H(\widehat{Y})$$

où G est une primitive de la fonction arbitraire g et H une fonction arbitraire.
Alors la solution générale de l'équation de Laplace (2.49) est :

$$u(x,y) = G(y-ix) + H(y+ix)$$

où G et H étant deux fonctions arbitraires.

2.3.5 Exemple d'une équation à coefficients variables

Soit l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \sin^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin(x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.58}$$

On a : $a(x,y)=1$, $b(x,y)=-\cos(x)$ et $c(x,y)=\sin^2(x)$
Donc : $b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)=\cos^2(x)+\sin^2(x)=1>0$
Alors l'équation est hyperbolique.

2.3.5.1 Courbes caractéristiques

D'après le Théorème (2.2.1) On a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\cos(x) \pm 1$$

Donc :

$$dy = (-\cos(x) \pm 1)dx$$

Après intégration, On obtient :

$$C = y + \sin(x) \pm x \qquad C \in \mathbb{R} \quad \text{Une constante.}$$

Les courbes caractéristiques de cette équation sont :

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = y + \sin(x) + x \\ \varphi_2(x, y) = y + \sin(x) - x \end{cases}$$

2.3.5.2 Forme standard

Soient $\varphi_1(x, y)$ et $\varphi_2(x, y)$ deux familles des courbes caractéristiques d'une équation (2.58).

1ère Cas : en posant

$$\begin{cases} X = y + \sin(x) + x \\ Y = y + \sin(x) - x \end{cases} \qquad et \qquad u(x, y) = \widetilde{u}(X, Y)$$

Alors :

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial X}{\partial x} = \cos(x) + 1 & & \dfrac{\partial X}{\partial y} = 1 \\ & \text{et} & \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} = \cos(x) - 1 & & \dfrac{\partial Y}{\partial y} = 1 \end{array}$$

Par dérivation composée (voir 1.1.2) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = (\cos(x) + 1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + (\cos(x) - 1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y} \end{aligned} \tag{2.59}$$

Et de même on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left((\cos(x)+1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + (\cos(x)-1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= -\sin(x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + (\cos(x)+1)\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\
&\quad -\sin(x)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y} + (\cos(x)-1)\left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\
&= -\sin(x)\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) + (\cos(x)+1)^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} + (\cos(x)-1)^2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} \\
&\quad +2\left(\cos^2(x)-1\right)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} + 2\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial Y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \\
&= (\cos(x)+1)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X^2} + (\cos(x)-1)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial Y^2} + 2\cos(x)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

Donc on remplaçant (2.59), (2.60), (2.61) et (2.62) dans (2.58) :

$$-4\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0$$

Donc la forme standard est :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0 \qquad (2.63)$$

2$^{\text{ème}}$ Cas : en posant

$$\begin{cases} \widehat{X} = X + Y \\ \widehat{Y} = X - Y \end{cases} \qquad et \qquad \widetilde{u}(X,Y) = \widehat{u}(\widehat{X},\widehat{Y})$$

Alors :

$$\frac{\partial \widehat{X}}{\partial X} = 1 \qquad \frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} = 1$$

et

$$\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X} = 1 \qquad \frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y} = -1$$

Par dérivation composée (voir 1.1.2) on a :

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial X} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial X} = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}$$

Et on :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} &= \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial X}\right) = \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{X}} + \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y}\right) + \left(\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}}\frac{\partial \widehat{X}}{\partial Y} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2}\frac{\partial \widehat{Y}}{\partial Y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}\partial \widehat{Y}} + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}\partial \widehat{X}} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} \\
&= \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} \qquad (2.64)
\end{aligned}$$

Alors on remplaçant (2.64) dans (2.63) :

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{X}^2} - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial \widehat{Y}^2} = 0 \qquad (2.65)$$

2.3.5.3 La solution

Comme :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial X \partial Y} = 0$$

Après intégration, on obtient :

$$\widetilde{u}(X, Y) = F(X) + G(Y)$$

Donc la solution générale de l'équation (2.58) est :

$$u(x, y) = F(y + \sin(x) + x) + G(y + \sin(x) - x)$$

où F et G étant deux fonctions arbitraires.

Chapitre 3

Méthode de séparation des variables

3.1 Généralités sur la méthode de séparation des variables :

[19, 6, 4] Une équation aux dérivées partielles peut admettre de solutions particulières sont le produit de fonctions d'une seule variable à la fois ; il faut aussi se rappeler que si l'équation est linéaire alors une somme de ses solutions particulières est encore une solution. De cette manière on peut résoudre un certains nombre de problèmes intéressants mais la vraie portée de la méthode n'est réalisée que l'orsque l'on utilise des sommes infinies des ses solutions particulières.

3.1.1 Un système avec des conditions aux limites homogènes et sans termes source :

On considère un terme source nul et des conditions aux limites (Neumann ou Dirichlet) homogènes dans notre système d'équation.On suppose que l'inconnue u dépend de deux variables t et x, avec $t > 0$ et $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$
Les étapes suivantes sont nécessaires :

1. On pose $u(x,t) = \psi(t)\phi(x)$ avec ψ et φ sont respectivement des fonctions de x et t ayant au moins des dérivées premières et secondes continues ; on porte cela dans l'équation on doit alors obtenir des équations à variables séparées en opérant une division formelle de l'équation par $u(x,t) = \psi(t)\varphi(x)$. Il apparaît de plus un paramètre réel que l'on note λ.

2. On résout l'équation en $\varphi(x)$ avec des conditions aux limites correspondantes. Il faut alors obtenir une suite infinie de couples de solutions $\varphi_n(x)\lambda_n$, dites valeurs et fonctions propres de problème.
3. Il faut trouver un produit scalaire qui orthogonalise la suite des $\varphi_n(x)$.
4. On résout l'équation en $\psi(t)$ pour les valeurs λ_n trouvées, ce qui nous donne une suite de solutions $\psi_n(t)$ étant défini à un certain nombre de constante prés (qui dépend de l'ordre de l'équation en $\psi(t)$).
5. On écrit la solution générale de l'équation sous la forme $u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x)$

et on applique les conditions initiales pour déterminer les coefficients présents dans $\psi_n(t)$, avec l'utilisation de l'orthogonalité de φ_n.

Exemple 3.1.1. *On cherche a résoudre cette équation*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

avec les relations de compatibilités entre la condition initiale et les conditions aux limites

$$u_0(0) = u_0(L) = 0$$

1$^{\text{er}}$étape : La méthode de séparation des variables consiste à posé

$$u(t,x) = \psi(t)\phi(x)$$

dans l'équation et de " séparer les variables ". L'équation devient

$$\psi'(t)\varphi(x) = k\psi(t)\varphi''(x)$$

On divise alors formellement par $u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{k}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\psi'(t) = k\lambda\psi(t)$$

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$$

On a bien obtenu deux équations à variables séparées.
2^{me}étape : On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constante λ

- Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{array}{lll} \varphi(0)=0 & \Rightarrow & A+B=0 \\ \varphi(L)=0 & \Rightarrow & A(e^{\sqrt{\lambda}L}-e^{-\sqrt{\lambda}L})=0 \\ & \Rightarrow & 2A\sinh(\sqrt{\lambda}L)=0 \\ & \Rightarrow & A=B=0. \end{array}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas.

- Si $\lambda = 0$ alors

$$\begin{array}{l} \varphi(x)=Ax+B \\ \varphi(0)=0 \Rightarrow B=0 \\ \varphi(L)=0 \Rightarrow AL=0 \\ \qquad\quad \Rightarrow A=0 \end{array}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus.

- Si $\lambda < 0$ alors

$$\begin{array}{l} \varphi(x)=A\sin(\sqrt{-\lambda}x)+B\cos(\sqrt{-\lambda}x) \\ \varphi(0)=0 \Rightarrow B=0 \\ \varphi(L)=0 \Rightarrow A\sin(\sqrt{-\lambda}L)=0 \\ \qquad\quad \Rightarrow A=0 \end{array}$$

ou bien

$$\sqrt{-\lambda}L = n\pi \quad ,\sim n>0 \;\; entier.$$

Il existe donc de solutions non nulles dans ce cas qui sont :

$$\varphi_n(x)=\sin(\frac{n\pi}{L}x), n>0$$

associées aux valeurs de λ_n suivantes

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Au total, on a obtenu une suite infinie de solutions associée chacune à une valeur de λ. On appelle les solutions $\varphi_n(x)$ les fonctions propres du problème et les λ_n les valeurs propres associées. La fonction propre, comme les vecteurs propres en algèbre linéaire, sont définis à un scalaire multiplicatif près.

3^{me}étape : On remarque que le produit scalaire

$$< f,g >= \int_0^L f(x)g(x)dx$$

orthogonalise la suite des $\varphi_n(x)$:

$$< \varphi_n(x), \varphi_m(x) >= 0, \quad pour \quad n \neq m$$

Car :

$$\begin{aligned}
< \varphi_n(x), \varphi_m(x) > &= \int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L (\cos[(n-m)\frac{\pi}{L}x] - \cos[(n+m)\frac{\pi}{L}x])dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $n = m$

$$\begin{aligned}
< \varphi_n(x), \varphi_n(x) > &= \int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{1-\cos(\frac{2n\pi}{L}x)}{2}dx \\
&= \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

Ceci indique que la suite des $\varphi_n(x)$ est une base sur laquelle on va pouvoir développer la solution en la projetant grâce au produit scalaire

4^{me}étape : On résout l'équation en $\psi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi_n'(t) = \lambda_n k \psi_n(t)$$

qui a pour solutions

$$\psi_n(t) = c_n e^{k\lambda_n t} = c_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 1 on trouve un espace vectoriel de dimension 1 de solution. c_n est une constante arbitraire pour le moment.

A ce stade ,les fonctions

$$\psi_n(t)\varphi_n(x)$$

sont solution de l'E.D.P. et des conditions aux limites mais pas de la condition initiale

5^{me}étape : L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution $u(t,x)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients c_n pour que la solution $u(t,x)$ vérifie la condition initiale. Cette condition initiale s'écrit :

$$u(0,x) = u_0(x)$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(0)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n(x) = u_0$$

Ici, les c_n peuvent s'interpréter directement comme étant les coordonnées de la décomposition de u_0 dans la base des $\varphi_n(x)$

$$< \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n(x), \varphi_m >=< u_0, \varphi_m >$$

Comme les $\varphi_n(x)$ sont orthogonales $< \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n(x), \varphi_m >= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n < \varphi_n, \varphi_n >$ pour le produit scalaire $< ., . >$ défini précédemment, on a

$$c_n = \frac{< u_0(x), \varphi_n(x) >}{< \varphi_n(x), \varphi_n(x) >} = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

On obtient donc la solution sous la forme d'une série. Ici il s'agit d'une série de Fourier où seule les composantes en $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ sont présentes, puisqu'on a imposé : $u(0) = u(L) = 0$

Exemple 3.1.2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad \textit{pour} \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \end{cases}$$

1erétape : *La méthode de séparation des variables consiste à poser*

$$u(t,x) = \psi(t)\phi(x)$$

dans l'équation et de " séparer les variables ". L'équation devient

$$\psi''(t)\varphi(x) = \psi(t)\varphi''(x)$$

On divise alors formellement par $u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu'il existe $\lambda \in I\!R$ avec

$$\psi''(t) = \lambda\psi(t)$$
$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$$

On a bien obtenu deux équations à variables séparées.
***2**^{me} **étape :** On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit*

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constante λ

- *Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont*

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\Rightarrow A + B = 0 \\ \varphi(1) = 0 &\Rightarrow A(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \\ &\Rightarrow B(-e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \\ &\Rightarrow -2\sinh(\sqrt{\lambda})B = 0 \\ B = 0 &\Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas.

- *Si $\lambda = 0$ alors :*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= Ax + B \\ \varphi(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ \varphi(L) = 0 &\Rightarrow AL = 0 \\ &\Rightarrow A = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus

- *Si $\lambda < 0$ alors :*

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x) \\ &\varphi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ &\varphi(1) = 0 \Rightarrow A\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \\ &\qquad\qquad \Rightarrow A = 0 \;\; \textit{ou bien } \sqrt{-\lambda} = n\pi \;, n > 0 \textit{ entier.} \end{aligned}$$

Il existe donc de solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin(n\pi x),\ n > 0$$

associées aux valeurs de λ_n suivantes

$$\lambda_n = -n^2\pi^2$$

Au total, on a obtenu une suite infinie de solutions associées chacune à une valeur de λ. On appelle les solutions $\varphi_n(x)$ les fonctions propres du problème et les λ_n les valeurs propres associées. La fonction propre, comme les vecteurs propres en algèbre linéaire, sont définis à un scalaire multiplicatif prés.

*3^me^* ***étape :*** *On remarque que le produit scalaire*

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

orthogonalise la suite des $\varphi_n(x)$

-Si $n \neq m$

$$\begin{aligned} < \varphi_n, \varphi_m > &= \int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x dx = 0 \end{aligned}$$

-Si n=m

$$\begin{aligned} < \varphi_n, \varphi_n > \sin(n\pi x)\sin(n\pi x)dx &= \int_0^1 \frac{1-\cos(2n\pi x)}{2}dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ceci indique que la suite des $\varphi_n(x)$ est une base sur laquelle on va pouvoir développer la solution en la projetant grâce au produit scalaire

*4^me^* ***étape :*** *On résout l'équation en $\psi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation*

$$\psi_n''(t) = \lambda_n \psi_n(t)$$

qui a pour solutions

$$\psi_n(t) = A_n \sin(n\pi t) + B_n \cos(n\pi t)$$

L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution $u(t,x)$ *comme somme de toutes les solutions élémentaires*

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(A_n \sin n\pi t + B_n \cos n\pi t)$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients A_n, B_n *pour que la solution* $u(t,x)$ *vérifie la condition initiale. Cette condition initiale s'écrit :*

$$u(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} < u(0,x), \varphi_m > &= < \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n B_n, \varphi_m > \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} < B_n \varphi_n, \varphi_m > \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n < \varphi_n, \varphi_m > \\ B_n &= 2 < u(0,x), \varphi_m(x) > \end{aligned}$$

On a : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n (A_n n\pi \cos n\pi t - B_n n\pi \sin n\pi t)$

$$\begin{aligned} < \frac{\partial u}{\partial t}(0,x), \varphi_m > &= \sum_{n=1}^{\infty} < A_n n\pi \varphi_n, \varphi_m > \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n n\pi < \varphi_n, \varphi_m > \\ A_n &= \frac{2}{n\pi} < \frac{\partial u}{\partial t}(0,x), \varphi_m > \end{aligned}$$

3.1.2 La méthode de séparation des variables en présence d'un terme source[19, 6, 4]

Par exemple

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = t\sin(\pi x), \quad pour \;\; 0 < x < 1, \; t > 0 \\ u(0,x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \end{cases}$$

les trois premières étapes se font en oubliant le termes source $h(t,x) = t\sin(\pi x)$ (i.e. sur l'équation homogène). Dans cet exemple on trouve la suite de valeurs propres $\lambda_n = -n^2\pi^2$ associées aux fonctions propres $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x)$ qui sont orthogonalisés par le produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Nouvelle étape 4 : On fait le produit scalaire de l'équation avec le terme source par une fonction propre $\varphi_n(x)$ en considérant que la solution $u(t,x) = \psi_n(t)\varphi_n(x)$ On arrive à :

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\psi_n''(t), \varphi_n(x) > - < \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n''(x)\psi_n(t), \varphi_n(x) >=< h(t,x), \varphi_n(x) >$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} < \varphi_n(x)\psi_n''(t), \varphi_n(x) > - \sum_{n=1}^{\infty} < \varphi_n''(x)\psi_n(t), \varphi_n >=< h(t,x), \varphi_n(x) >$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n''(t) < \varphi_n(x), \varphi_n(x) > - \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t) < \varphi_n''(x), \varphi_n(x) >=< h(t,x), \varphi_n(x) >$$

et donc

$$\psi_n''(t) - \lambda_n\psi_n(t) = \frac{< h(t,x), \varphi_n(x) >}{< \varphi_n(x), \varphi_n(x) >}$$

parce que $\varphi_n''(x) = \lambda_n\varphi_n(x)$

On arrive en fait à la résolution de la même équation que dans le cas sans terme source mais avec un second membre qui vaut $h_n(t) = \dfrac{< h(t,x), \varphi_n(x) >}{< \varphi_n(x), \varphi_n(x) >}$

Dans l'exemple, on obtient

$$h_1(t) = t$$

et

$$h_n(t) = 0$$

pour $n \geq 2$

- Pour $n=1$ on a donc à résoudre

$$\psi_1''(t)+\pi^2\psi_1(t)=t$$

Les solutions sont :

$$\psi_1(t)=c_1\sin(\pi t)+d_1\cos(\pi t)+\frac{t}{\pi^2}$$

Cherchons c_1, d_1 :

$$\begin{aligned}<\psi_1(t)\varphi_1(x),\varphi_1(x)>=0\\ &\Rightarrow \psi_1(t)<\varphi_1(x),\varphi_1(x)>=0\\ &\Rightarrow \frac{1}{2}\psi_1(0)=0\\ &\Rightarrow \frac{1}{2}d_1=0\end{aligned}$$

D'où $d_1=0$

$$\begin{aligned}<\frac{\partial u}{\partial t}(0,x),\varphi_n(x)>=0\\ &\Rightarrow <\frac{\partial \psi_1}{\partial t}(0)\frac{1}{2},\varphi_m>=0\\ &\Rightarrow \frac{1}{\pi^2}+\pi c_1\cos(\pi t)=0\\ &\Rightarrow \pi c_1+\frac{1}{\pi^2}=0\end{aligned}$$

D'où $c_1=-\frac{1}{\pi^3}$

- Pour $n\geq 2$ on a à résoudre

$$\psi_n''(t)+n^2\pi^2\psi_n(t)=0$$

Les solutions sont

$$\psi_n(t)=c_n\sin(n\pi t)+d_n\cos(n\pi t)$$

où c_n et d_n sont des constantes arbitraires telle que

$$\sum_{n=2}^{\infty}<\psi_n(t)\varphi_n(x),\varphi_n(x)>=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\psi_n(t)<\varphi_n(x),\varphi_n(x)>=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\psi_n(0) = 0$$

donc on obtient $\frac{1}{2}d_n = 0$
d'où $d_n = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} < \frac{\partial u}{\partial t}(0,x), \varphi_n(x) > = 0$$

$$\Rightarrow < n\pi c_n \cos(n\pi t), \varphi_n >= 0$$
$$\Rightarrow n\pi c_n = 0$$

donc $c_n = 0$
d'où

$$u(t,x) = \frac{-1}{\pi^3}\sin(\pi t) + \frac{t}{\pi^2}$$

Par la suite l'étape 5 se déroule dans le cas sans terme source .

3.1.3 Système avec des conditions aux limites non homogènes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 \qquad t \geq 0, 0 < x < 1 \\ u(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \\ u(t,0) = f(t), u(t,1) = g(t) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) \end{cases}$$

Une méthode est de supprimer les conditions aux limites. Pour cela on cherche une fonction $\theta(t,x)$, a priori quelconque vérifiant les conditions aux limites (dans la pratique il faut essayer de choisir la fonction la plus simple possible). Dans l'exemple, on peut prendre.

$$\theta(t,x) = (1-x)f(t) + xg(t)$$

puis on fait un changement d'inconnue : $\tilde{u}(t,s) = u(t,x) - \theta(t,x)$, de telle manière à ce que $\tilde{u}(t,x)$ vérifie des conditions aux limites homogènes. Dans l'exemple, le problème en $\tilde{u}(t,x)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2},(t,x) = -\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(t,x) \qquad t \geq 0, \quad 0 < x < 1 \\ \tilde{u}(0,x) = -\theta(0,x), \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(0,x) = -\frac{\partial \theta}{\partial t}(0,x) \\ \tilde{u}(t,o) = 0, \tilde{u}(t,1) = 0 \end{cases}$$

Exemple 3.1.3. *soit le système suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = (1-x)\cos(t) & t > 0 \ ,0 \leq x \leq \pi \\ u(x,o) = \dfrac{x^2}{2\pi}, \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos(3x) & \textit{pour } 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \cos(t) - 1 & \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = \cos(t) & \textit{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

$v(x,t) = u(x,t) - \theta(x,t)$ *avec* $\theta(x,t) = x(\cos(t-1)) - \dfrac{x^2}{2\pi}$
Donc on fait le changement d'inconnue $v(x,t) = u(x,t) - \theta(x,t)$*, de telle manière à ce que* $v(x,t)$ *vérifie les conditions aux limites homogènes, le problème s'écrit :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t,x) - 4\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) = \cos(t) + \dfrac{4}{\pi} & t > 0, 0 < x < \pi \\ v(x,0) = 0, \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \cos(3x) & \textit{pour } 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0 & \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(\pi,t) = 0 & \textit{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

1erétape : *On suppose que le terme source est nul*
la méthode consiste à poser

$$v(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$$

avec séparation des variable l'équation devient

$$\frac{1}{4}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x, on en déduit sont constant, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in I\!R$ *avec :*

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0$$

$$\psi''(t) - 4\lambda\psi(t) = 0$$

Et on obtient deux équations à variable séparées.
2^{e}étape : *On cherche les solutions non nulles de l'équation en* $\varphi(x)$ *avec les conditions aux limites, soit*

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0 \end{cases}$$

les solutions dépendent de la constante λ

- *Si* $\lambda > 0$ *alors les solutions de l'équation différentielle sont*

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned}
\varphi(0) = 0 &\Rightarrow A + B = 0 \\
\varphi(\pi) = 0 &\Rightarrow A(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}) = 0 \\
&\Rightarrow 2A\sinh(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \\
&\Rightarrow A = B = 0
\end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas.

- *Si* $\lambda = 0$ *alors*

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = Ax + B \\
&\varphi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\
&\varphi(\pi) = 0 \Rightarrow A\pi = 0 \\
&\Rightarrow A = 0
\end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus
$\lambda < 0$ *alors*

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= Ae^{i\sqrt{-\lambda}x} + Be^{i\sqrt{-\lambda}x} \\
&= A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x \\
\varphi'(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\
\varphi'(\pi) = 0 &\Rightarrow -A\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *ou bien* $A = 0$ *ou bien* $\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi,\ n > 0$
Il existe donc de solutions non nulles dans ce cas qui sont :

$$\varphi_n(x) = \cos(nx),\ n > 0$$

associées aux valeur de λ *suivantes*

$$\lambda_n = -n^2$$

On a obtenu une suite infinie de solutions associées chacune à valeur de λ

3[e]étape : On orthogonalise la suite φ_n, dans le sens où

$$<\varphi_n(x),\varphi_m(x)>=\int_0^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)=\begin{cases}0 & si\ n\neq m\\ \dfrac{\pi}{2} & si\ n=m\end{cases}$$

4[e]étape : On fait le produit scalaire de l'équation avec le terme source par une fonction propre $\varphi_n(x)$ on considérant que la solution $v(x,t)$ s'écrit $v(x,t)=\psi(t)\varphi(x)$ on a arrive à :

$$\psi_n''(t)<\varphi_n(x),\varphi_n(x)>-4\psi_n(t)<\varphi_n''(x),\varphi_n(x)>=<\cos(t)+\frac{4}{\pi},\varphi_n(x)>$$

5[e]étape : On arrive en fait à la résolution de la même équation que dans le cas sans terme source mais avec un second membre

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\psi_n(t)-4\lambda_n\psi_n(t))<\varphi_n,\varphi_m>=<\cos(t)+\frac{4}{\pi},\varphi_m>$$

$$\frac{\pi}{2}(\psi_n''(t)-4\lambda_n\psi_n(t))=<\cos(t)+\frac{4}{\pi},\varphi_n>,\quad\forall n>0$$

$$\pi(\psi_0''(t))=\pi(\cos t+\frac{4}{\pi})$$

Pour $n\neq 0$ on a donc à résoudre

$$\psi_n''(t)+4n^2\psi(t)=0$$

Pour $n=0$ on a donc à résoudre

$$\psi_n''(t)=\cos(t)+\frac{4}{\pi}$$

$$\int_0^{\pi}\cos(t)+\frac{4}{\pi}dx$$

$$\Rightarrow\psi_0'(t)=-\pi\sin(t)+4t$$

$$\psi_0(t)=-\pi\cos(t)+\frac{2t^2}{\pi}$$

Les solutions sont :

$$\psi_n(t)=A_n\cos(2nt)+B_n\sin(2nt)$$

donc :

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\psi_n(t)\varphi_n(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(A_n\cos(2nt)+b_n\sin(2nt))\varphi_n(x)-\pi\cos(t)+2t^2$$

$$v(x,0)=0\Rightarrow A_n=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=\cos(3x)\Rightarrow B_n=\frac{<\cos(3x),\varphi_n(x)>}{n\pi}$$

Alors

$$B_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & si\ n = 3 \\ 0, & si\ n \neq 3 \end{cases}$$

$v(x,t) = \frac{1}{2n}\sin(6t)\cos(3x) - \cos(t) + \frac{2t^2}{\pi}.$

3.2 Résolution de l'équation de la chaleur par la méthode de séparation des variables

Commençons maintenant on utilisant la méthode de séparation des variables pour l'équation de la chaleur[6, 1, 11] de dimension 1 Nous décrivons en premiers lieu la situation physique pour ensuite nous concentrer sur le problème mathématique

Soit une tige homogène de longueur **L** suffisamment mince de façon que la chaleur soit distribuée également sur toute la section transversal ;la surface de cette dernière est isolée il n'y a donc aucune perte de chaleur à travers la surface de la tige ,si nous notons par **u(x,t)** la température dans la tige au temps t au point x alors u(x,t) satisfait l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} u : (x,t) \to u(x,t) & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \\ u(0,t) = 0, & u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). & \end{cases}$$

ou c est une constante strictement positive,si nous supposons qu'aux extrémités $x = 0$ et $x = L$, la température est gardée constante et égale à 0, i.e. $u(0,t)$ et $u(L,t) = 0$ $\forall t \geq 0$ et que la température initiale est connue, i.e. $u(x,0) = f(x)$ pour tout $x \leq L$
Nous allons déterminer $u(x,t)$ pour tout $t \geq 0$ et $x \leq L$
En d'autre termes nous avons le problème de EDP suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où $u = u(x,t)$
Pour lequel les conditions initiales est $u(x,0) = f(x)$ pour tout $x \leq L$. Pour ce problème intermédiaire nous cherchons à déterminer de solutions $u(x,t)$ nom triviales de la forme $\varphi(x)\psi(t)$ ou φ, ψ sont des fonctions de x et t ayant au moins des dérivées première et seconde continues

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}$$

le terme de gauche de cette équation est une fonction de x seulement, alors le terme de droite est une fonction de t seulement. pour que nous puissions avoir cette égalité, il faut donc que chacun de ces termes soit constants et nous noterons cette constante par λ. De ceci nous tirons deux équations différentielles ordinaires suivantes

$$\begin{cases} \varphi'' - \lambda\varphi = 0 \\ \psi' - \lambda c^2 \psi = 0 \end{cases}$$

où λ est une constante appelées valeur propre aux problème aux limites.
En fonction du signe de λ, la solution de la première équation s'écrit sous cette forme :

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x} & \lambda > 0 \\ A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x) & \lambda < 0 \\ Ax + b & \lambda = 0 \end{cases}$$

Où A et B sot des constantes réels arbitraire qu'il faut choisir à fin que φ vérifiées les conditions aux limites $\psi(0) = \psi(L) = 0$

- cas $\lambda > 0$. La condition $\varphi(0) = 0$ si et seulement si $A + B = 0$ ce qui veut dire que φ est de forme :
  $\varphi(x) = -2A\sinh(\sqrt{-\lambda}x)$ puisque $\sinh(x) \neq 0, \forall x$ alors $A = 0$
  Donc la solution est nulle pour $\lambda > 0$

- cas $\lambda = 0$
  Dans ce cas $\varphi(0) = A = 0, \varphi(l) = B$, donc il n'y a aucune solution non triviale du problème non plus
- Cas $\lambda < 0$
  Si $\lambda = -\nu^2 < 0$, alors $\varphi(x) = A\cos(\nu x) + A\sin(\nu x)$.
  Mais de $\varphi(0) = 0 \Rightarrow A = 0$, alors que $\varphi(L) = 0 \Rightarrow B\sin(\nu l) = 0$, comme nous cherchons à déterminer de solutions non triviales nous pouvons supposer que $B \neq 0$ et par suite $\sin(\nu L) = 0$, De ceci nous pouvons conclure que $\nu L = n\pi$ et $\lambda = -(\frac{n\pi}{L})^2$ avec $n > 0$
  Il existe donc de solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x), n > 0$$

  donc :

$$< \varphi_n(x), \varphi_m(x) >= \begin{cases} \frac{L}{2} & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases}$$

Si nous concéderons la deuxième équation

$$\psi'(t) - \lambda_n c^2 \psi(t) = 0$$

nous pouvons résoudre celle-ci

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} = \lambda_n c^2 \psi &\Rightarrow \frac{1}{\psi} d\psi = \lambda_n c^2 dt \\ &\Rightarrow \int \frac{1}{\psi} d\psi = \int \lambda_n c^2 dt \\ &\Rightarrow \ln(\psi) = \lambda_n c^2 t + k\end{aligned}$$

où k est une constante. Ainsi nous obtenons que

$$\psi_n(t) = C_n e^{\lambda_n c^2 t} = C_n e^{-\frac{n\pi c}{l}^2 t}$$

Où C_n est un nombre réel
L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution $u(x,t)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n C_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) e^{\lambda_n c^2 t}$$

est aussi est une solution du problème ()
Nous allons remplacer λ_n par sa valeur $-(\frac{n\pi}{L})$ et $B_n C_n$ par a_n. comme l'équation est linéaire est homogène et que les conditions aux limites sont aussi homogènes, nous pouvons utiliser le principe de superposition et obtenir que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) e^{-(\frac{n\pi c}{L})^2} t$$

est aussi est solution du problème
Rappelons de nouveau que nous abusons ici du principe de superposition puisque nous sommons non pas sur un nombre fini de termes, mais sur un nombre infini de termes.
Si nous revenons à notre problème initial :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où $u = u(x,t)$
pour lequel les conditions à la frontière sont :
$u(0,t) = 0$ et $u(t,L) = 0$ pour tout $t \geq 0$
et la condition initiale est $u(x,0) = f(x)$ pour tout $0 \leq x \leq L$, alors

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) e^{-(\frac{n\pi c}{L})^2 t}$$

est une solution de problème si

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{L})=f(x)$$

i.e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$ est la série de Fourier impaire de $f(x)$.
Dans ce qui précède, nous avons avons fait sans les énoncer des hypothèses sur la convergence de certaines séries. De ce fait, tout ce que nous avons obtenu jusqu'à maintenant, ce n'est qu'une solution formelle

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-\frac{n\pi c}{L}t}$$

avec

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^l \sin(\frac{n\pi x}{L})dx \quad \forall n\geq 1$$

Puisque la suite φ_n est orthogonale alors

$$\begin{aligned}
< u(x,0),\varphi_m > &=< f(x),\varphi_m > \\
&=< \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L},\varphi_m > \\
&=\sum_{n=1}^{+\infty} < \sin\frac{n\pi x}{L},\varphi_m > \\
&= a_n < \varphi_m,\varphi_m >
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{< f(x),\varphi_m >}{< \varphi_m,\varphi_m >} \\
&= \frac{< f(x),\varphi_m >}{\frac{L}{2}} \\
&= \frac{L}{2}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} f(x)dx \; m\geq 1
\end{aligned}$$

3.3 Résolution de l'équation des ondes par la méthode de séparation des variables

Les équations hyperboliques sont de type équation de propagation d'ondes, on les rencontre la plupart du temps sous la forme d'une équation évolutive du type

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(t,x)-div(q(x)\nabla_x\Phi(t,x))=h(t,x),\text{où} q(x)>0$$

Le terme $div(q(x)\nabla_x\Phi(t,x))$ est un terme elliptique par apport à la variable x.
Comme dans le cas des équations paraboliques, nous allons regarder dans un première temps l'équation unidimensionnelle, avec $q(x) = c^2$, qui est ici :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = h(t,x),\ \ t \geq 0, x \in \mathrm{I\!R}.$$

3.3.1 L'équation des ondes dans $\mathrm{I\!R}$

L'étude des vibration d'une corde infinie, libre de toute sollicitation, consiste à étudier les variations du déplacement transversal u au cours du temps. On se donne la position u et la vitesse du déplacement transversal u au temps zéro.
Le modèle correspondant s'écrit :
trouver $u : (x,t) \to u(x,t)$ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & \forall x \in \mathrm{I\!R}, \quad \forall t \in \mathrm{I\!R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & donn \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & donn \end{cases}$$

3.4 Résolution de l'équation des cordes vibrantes par séparation des variables

On cherche à résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad x \in [0,L], t \geq 0, c \neq 0 \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) \\ u(0,x) = u_0(x) = 0 \end{cases}$$

avec les relations de compatibilité entre les conditions initiales et les conditions aux limites

$$u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0$$

On pose encore

$$u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$$

et on porte dans l'E.D.P.L'équation devient

$$\psi''(t)\varphi(x) = c^2\psi(t)\varphi''(x)$$

On divise alors formellement par $u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu'il sont constant, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\psi''(t) = \lambda c^2 \psi(t)$$
$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x)$$

Et on a obtenu deux équation à variable séparées.
On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constante λ

- Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites , il vient

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\Rightarrow A + B = 0 \\ \varphi(L) = 0 &\Rightarrow A(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0 \\ &\Rightarrow 2A\sinh(\sqrt{\lambda}L) = 0 \\ &\Rightarrow A = B = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas

- Si $\lambda = 0$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= Ax + B \\ \varphi(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ \varphi(L) = 0 &\Rightarrow AL = 0 \\ &\Rightarrow A = 0 \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus

- Si $\lambda < 0$ alors

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x) \\ &\varphi(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ &\varphi(L) = 0 \Rightarrow A\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = 0$ ou bien $\sqrt{-\lambda}L = n\pi, \quad n > 0$ entier. Il existe donc de solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad n > 0$$

associées aux valeurs de λ_n suivantes

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Au total, on a obtenu une suite infinie de solutions associées chacune à une valeur de λ. On appelle les solutions $\varphi_n(x)$ les fonctions propres du problème et les λ_n les valeurs propres associées. La fonction propre, comme les vecteurs propres en algèbre linéaire, est définie à un scalaire multiplicatif près.

Le produit scalaire

$$< f, g >= \int_0^L f(x)g(x)dx$$

orthogonalise toujours la suite des $\varphi_n(x)$

Si $n \neq m$

$$\begin{aligned} < \varphi_n(x), \varphi_m(x) > &= \int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L (\cos[(n-m)\frac{\pi}{L}x] - \cos[(n+m)\frac{\pi}{L}x])dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $n = m$

$$\begin{aligned} < \varphi_n(x), \varphi_n(x) > &= \int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{1-\cos(\frac{2n\pi}{L}x)}{2}dx \\ &= \frac{L}{2} \end{aligned}$$

On résout l'équation en $\psi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi_n''(t) = \lambda_n c^2 \psi_n(t)$$

qui a pour solutions, étant donné que $\lambda_n < 0$

$$\psi_n(t) = c_n \sin(\frac{n\pi}{L}ct) + d_n \cos(\frac{n\pi}{L}ct)$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 2

on trouve un espace vectoriel de dimension 2 de solutions. c_n et d_n sont des constantes arbitraires.
A ce stade, les fonctions

$$(c_n \sin(\frac{n\pi}{L}ct) + d_n \cos(\frac{n\pi}{L}ct))\varphi_n(x)$$

sont solutions de l'E.D.P. et des conditions aux limites mais pas de la condition initiale.
On écrit à nouveau la solution $u(t,x)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \sin(\frac{n\pi}{L}ct) + d_n \cos(\frac{n\pi}{L}ct)) \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients c_n et d_n grâce aux conditions initiales, ce qui donne pour $u(0,x) = u_0(x)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = u_0(x)$$

Les d_n peuvent donc s'interpréter comme étant les coordonnées de la décomposition de u_0 dans la base des $\varphi_n(x)$, soit

$$d_n = \frac{< u_0(x), \varphi_n(x) >}{< \varphi_n(x), \varphi_n(x)} = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

Quand à la condition $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x)$, elle donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{n\pi}{L} c \sin(\frac{n\pi}{L}x) = v_0$$

On obtient donc :

$$c_n = \frac{L}{n\pi c}\frac{< v_0(x), \varphi_n(x) >}{< \varphi_n(x), \varphi_n(x) >} = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L v_0(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

3.5 Résolution de l'équation de Laplace par la méthode de séparation des variable

3.5.1 Généralité

L'équation de Laplace s'écrit sous la forme :

$$\Delta u(x,y) = f(x,y)$$

où Δ désigne l'opérateur aux dérivées partielles $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ appelé Laplacien, et f est une fonction continue donnée.
Cette équation est très utilisée à la fois en physiques et en mathématiques.
Du coté physique, la solution de l'équation est le potentiel électrique engendré dans le plan par la répartition de charges $\rho = -\dfrac{1}{4\pi} f$.
Du point de vue des mathématiques, Laplacien est un objet fondamental aussi bien en analyse qu'en géométrie.
Les solutions pour $f = 0$ qui doivent être des fonctions de classe C^2 sont par exemple appelées fonctions harmoniques, et l'on va décrire quelques unes de leurs propriétés.

3.5.2 L'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^n$

Dnition 3.1. *Soit $u(x, y, ..)$ une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$, et vérifiant dans ce domaine l'équation de Laplace : $\Delta u = 0$*
Les fonctions qui vérifient cette équation sont dites ***harmoniques*** *dans D.*

3.5.3 Équation de Laplace dans un demi-plan

Considérons le problème physique suivant :
On veut connaître la température dans un demi plan connaissant la température sur le bord, sachant que cette température tend vers 0 en s'éloignant de ce bord et qu'il n'y a aucun rapport de chaleur.
Le modèle mathématique correspondant s'écrit :
trouver $u : (x, y) \to u(x, y)$ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R} \ et\ \forall y \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = f(x) \quad donn \\ u(x, +\infty) = 0 \end{cases}$$

-La méthode de séparation des variables permet de résoudre l'équation de Laplace dans une région rectangulaire lorsque l'on impose une condition sur la solution sur chaque côté du rectangle.

Exemple(2)

Trouver u telle que

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 \qquad pour \quad 0 < x < L \ et\ 0 < y < K \\ u(0, y) = u(L, y) = 0 \qquad pour \quad 0 < y < K \\ u(x, 0) = u_0(x) \ \ et \ \ u(x, K) = v_k(x) \ \ pour\ 0 < x < L \end{cases}$$

où $\varphi, \psi : [0, L] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Dans ce cas les **conditions de compatibilités** sont :

$$u_0(0) = u_0(L) = v_k(0) = v_k(L) = 0$$

Cherchons de solutions de la forme

$$u(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$$

L'équation devient

$$\varphi''(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi''(y) = 0 \;\; pour \; 0 < x < L \; et \;\; 0 < y < K$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} = \frac{-\psi''(t)}{\psi(t)} = \lambda, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

et donc il y a une constante λ telle que

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = \psi''(y) + \lambda\psi(y) = 0$$

La condition devient $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, sinon $\psi(y) = 0$ pour tout $0 < y < K$.
Cherchons les valeurs propres et les fonctions propres du problème aux limites

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \;\; pour \; 0 < x < L$$

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

On trouve que le spectre est

$$\sigma = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

où

$$\lambda_n = -(\frac{n\pi}{L})^2$$

et une fonction propre associée à λ_n est

$$\varphi_n(x) = A \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Pour $\lambda = \lambda_n$, la solution générale de $\psi''(y) + \lambda\psi(y) = 0$ est

$$\psi(y) = Ae^{\frac{n\pi}{L}y} + Be^{-\frac{n\pi}{L}y}$$

où A et B sont des constantes arbitraires. Les solutions sont :

$$u(x,y) = \sin\frac{n\pi}{L}x\{Ae^{\frac{n\pi}{L}y} + Be^{-\frac{n\pi}{L}y}\}$$

On voit que

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{m} \sin\frac{n\pi}{L}x\{A_n e^{\frac{n\pi}{L}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}\}$$

est une solution, quel que soit $m \in \mathbb{N}$ et les coefficients A_n et B_n. On essaie de choisir m, A_n et B_n afin de satisfaire les conditions au limites qui deviennent

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{m} \sin\frac{n\pi}{L}x\{A_n + B_n\}$$

et

$$v_0(x) = u(x, K) = \sum_{n=1}^{m} \sin \frac{n\pi}{L} x \{ A e^{\frac{n\pi}{L} K} + B e^{-\frac{n\pi}{L} K} \}$$

Ceci montre que forcément $\varphi, \psi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dans ce cas on peut déterminer m, A_n et B_n de la manière suivante. Si $\varphi, \psi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x \ et \ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

où tous, sauf un nombre fini, les coefficients α_n et β_n sont nuls.On les calcule en multipliant par $\sin \dfrac{k\pi}{L} x$ et intégrant de 0 à L :

$$\begin{aligned}
\int_0^L \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{k\pi}{L} x dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{k\pi}{L} x dx \\
&= \alpha_k \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\int_0^L \psi(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{k\pi}{L} x dx \\
&= \beta_k \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

Donc il suffit de choisir A_n et B_n telles que

$$A_n + B_n = \alpha_n \quad \text{où} \quad \alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L$$

$$\varphi(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx A_n e^{\frac{n\pi}{L} K} + B_n e^{-\frac{n\pi}{L} K} = \beta_n \ \text{ où } \ \beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

La solution de ce système est

$$A_n = \frac{\beta_n - \alpha_n e^{-\frac{n\pi}{L} K}}{2 \sinh e^{\frac{n\pi}{L} K}}$$

$$B_n = \frac{\alpha_n e^{\frac{n\pi}{L} K} - \beta_n}{2 \sinh e^{\frac{n\pi}{L} K}}$$

Conclusion : La méthode de séparation des variables permet de résoudre le problème pour des fonctions $\varphi, \psi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. En ce cas, la solution est :

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\{A_n e^{\frac{n\pi}{L}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\{\frac{\beta_n - \alpha_n e^{-\frac{n\pi}{L}K}}{2\sinh e^{\frac{n\pi}{L}K}} e^{\frac{n\pi}{L}y} + \frac{\alpha_n e^{\frac{n\pi}{L}K} - \beta_n}{2\sinh e^{\frac{n\pi}{L}K}} e^{-\frac{n\pi}{L}y}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{L}x}{2\sinh e^{\frac{n\pi}{L}K}}\{\beta_n \sinh\frac{n\pi}{L}y - \alpha_n \sinh\frac{n\pi}{L}(y-K)\} \\
\text{où} \quad \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{n\pi}{L}x \\
et \quad \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\frac{n\pi}{L}x
\end{aligned}$$

L'hypothèse que $\varphi, \psi \in ev f_n : n \in \mathbb{N}$ assure que seulement un nombre fini des constantes α_n et β_n sont non nulles et donc il s'agit des sommes finies.
Notons que la solution vérifie les conditions de compatibilité et elle est infiniment dérivable.

3.6 Exercice corrigé :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (1+\cos(x))\cos(ct) - 4x\cos(2t) - \dfrac{c^2}{\pi} & pour\ x \in]0,\pi[\ et\ t > 0 \\
u(x,0) = \dfrac{x^2}{2\pi}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & pour\ x \in [0,\pi] \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \cos(2t) - 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = \cos(2t) & pour\ t \geq 0
\end{cases}$$

On pose $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$ avec $w(x,t) = x(\cos(2t)-1) + \dfrac{x^2}{2\pi}$.

1. Montrer que v vérifie la même équation que u avec des conditions en $x = 0$ et $x = \pi$ nulles.

2. En appliquant la méthode de séparation des variables sur v, on pose $v(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$.
   Donner le système vérifié par $\varphi(x)$ et trouver la solution de ce système en fonction de x.

3. Déterminer une base orthogonale φ_n et calculer $< \varphi_n, \varphi_m >= \displaystyle\int_0^\pi \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx$

4. Calculer $< (1+\cos(x))\cos(ct), \varphi_n >= \displaystyle\int_0^\pi [(1+\cos(x))\cos(ct)]\varphi_n(x)dx$ pour $n \geq 0$

5. Déterminer l'équation de $\psi_0, \psi_1(t)$ et $\psi_n(t)$.

6. Montrer que $\psi_0(t)$ s'écrit sous cette forme :
$\frac{-1}{c^2}\cos(ct) + A_0 t + B_0$ avec A_0 et B_0 deux constantes.

7. Montrer que $\psi_1(t)$ s'écrit sous cette forme :
$\frac{-1}{c^2}\cos(ct) + \frac{-1}{c}\sin(ct) + A_1\cos(ct) + B_1\sin(ct)$ avec A_1 et B_1 deux constantes

8. Calculer $\psi_0(t), \psi_1(t)$ et $\psi_n(t)$.

9. En déduire l'expression du v et après de u.

Solution :

1. On pose $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$ avec $w(x,t) = x(\cos(2t) - 1) + \frac{x^2}{2\pi}$
$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}$
$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4x\cos(2t)$
$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}$
$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi}$
$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + 4x\cos(2t) + \frac{c^2}{\pi}$
$= (1+\cos(x))\cos(ct) - 4x\cos(2t) - \frac{c^2}{\pi} + 4x\cos(2t) + \frac{c^2}{\pi}$
$= (1+\cos(x))\cos(ct)$
Donc : $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (1+\cos(x))\cos(ct)$
On a :

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \frac{x^2}{2\pi} - \frac{x^2}{2\pi} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0$$

Alors : $v(x,0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = \cos(2t) - 1 - (\cos(2t) - 1) = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(\pi,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\pi,t) - \frac{\partial w}{\partial x}(\pi,t) = \cos(2t) - \cos(2t) = 0$$

Alors : $\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\pi,t) = 0$

Donc le système de v est

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (1+\cos(x))\cos(ct) & \textit{pour } x \in]0,\pi[\textit{ et } t > 0 \\ v(x,0) = \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 & \textit{pour } x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(\pi,t) = 0 & \textit{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

2. En appliquant la méthode de séparation de séparation des variables :
On pose $v(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$ et on suppose que le terme source nul.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varphi(x)\psi''(t)$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \varphi''(x)\psi(t)$$

Donc on substitue dans le système de v on obtient :

$$\varphi(x)\psi''(t) - c^2\varphi''(x)\psi(t) = 0$$

Alors

$$\frac{\psi''(t)}{c^2\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

D'où l'équation de φ est

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0$$

On a :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \varphi'(0)\psi(t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Alors : $\varphi'(0) = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\pi,t) = \varphi'(\pi)\psi(t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Alors : $\varphi'(\pi) = 0$
Donc le système de φ est :

$$\begin{cases} \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \\ \varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0 \end{cases}$$

On étudie les cas de λ

- Si $\lambda > 0$: $\varphi(x) = e^{\alpha x}$

$$\alpha^2 - \lambda = 0$$
$$\Rightarrow \alpha^2 = \lambda$$
$$\Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\lambda}$$

D'où : $\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$\varphi'(0) = \sqrt{\lambda}(A - B) = 0$$
$$\Rightarrow A = B$$

$$\varphi'(\pi) = A\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}) = 0$$
$$\Rightarrow A = B = 0$$

Mais nous cherchons une solution non nulle donc $\lambda \leq 0$.

- Si $\lambda = 0$:

$$\varphi(x) = Ax + B$$
$$\varphi'(0) = A$$
$$= 0$$

Alors $\varphi(x) = B$

- Si $\lambda < 0$:

$$\alpha^2 = -\lambda = c^2(-\lambda)$$
$$\alpha = \pm i\sqrt{\lambda}$$
$$\varphi(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$$
$$\varphi'(0) = -\sqrt{-\lambda}B = 0$$

Alors $B = 0$

$$\varphi'(\pi) = -A\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$$

Donc $\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi$
Il existe donc de solutions non nulles dans ce cas qui sont :

$$\varphi_n(x) = \cos(nx)$$

associées aux valeurs de λ_n suivantes : $\lambda_n = -n^2$

3. Déterminons la base orthogonale φ_n

- Si $n \neq m$:

$$
\begin{aligned}
< \varphi_n, \varphi_m > &= \int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos((n+m)x) + \cos(n-m)x}{2} dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- Si $n = m$:

$$
\begin{aligned}
< \varphi_n, \varphi_n > &= \int_0^{\pi} \cos^2(nx)dx \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos(2nx) + 1}{2} dx \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$
< \varphi_n, \varphi_m >= \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} & m = n \\ \pi & \text{si} & n = m = 0 \end{array} \right.
$$

4.

$$
\begin{aligned}
H =< (1+\cos)\cos(t), \varphi_n >&= \int_0^{\pi} \cos(ct)\varphi_n + \int_0^{\pi} \cos x \varphi_n(x)dx \\
&= \cos(ct) \int_0^{\pi} \cos(nx)dx + \cos(ct) \int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(x)dx
\end{aligned}
$$

Ce qui donne :

$$
H = \left\{ \begin{array}{lll} \pi\cos(ct) & \text{si} & n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\cos(ct) & \text{si} & n = 1 \\ 0 & \text{si} & n \neq \ \{0,1\} \end{array} \right.
$$

5. On a $v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)\psi_n(t)$

$$
\begin{aligned}
< \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \varphi_m > &= < (1+\cos(x))\cos(ct), \varphi_m > \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} < \varphi_n(x)\psi''(t) - c^2\varphi_n''(x)\psi_n(t), \varphi_m(x) > \quad \textit{on } a\varphi''(x) = \lambda_n\varphi_n(x) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n''(t) + n^2c^2\psi_n(t) < \varphi_n(x), \varphi_m(x) >
\end{aligned}
$$

D'où $(\psi_n(t) + n^2c^2\psi_n(t)\dfrac{\pi}{2} =< (1+\cos(x))\cos(ct), \varphi_n >$

$$
\left\{ \begin{array}{lll} \psi''(t) = \cos(ct) & \text{si} & n = 0 \\ \psi_1''(t) + c^2\psi_1(t) = \cos(ct) & \text{si} & n = 1 \\ \psi_n''(t) + n^2c^2\psi_n(t) = 0 & \text{si} & n \neq \ \{0,1\} \end{array} \right.
$$

6.

$$\begin{aligned}\psi_0(t) =& 1\frac{-1}{c^2}\cos(ct) + A_0 t + B_0\\ \psi_0'(t) =& \frac{1}{c}\sin(ct) + A_0\\ \psi_0''(t) =& \cos(ct)\end{aligned}$$

Elle vérifier l'équation de ψ

7.

$$\begin{aligned}\psi_1(t) =& \frac{1}{2c}\cos(ct) + \frac{t}{2c}\sin(ct) + A_1\cos(ct) + B_1\sin(ct)\\ \psi_1'(t) =& \frac{-1}{2}\sin(ct) + \frac{1}{2c}\sin(ct) + \frac{t}{2}\cos(ct) - A_1 c\sin(ct) + B_1\cos(ct)\\ \psi_1''(t) =& \frac{-1}{2}c\cos(ct) + \frac{1}{2}\cos(ct) + \frac{1}{2}\cos(ct) - \frac{tc}{2}\sin(ct) - A_1 c^2\cos(ct) - B_1 c^2\sin(ct)\end{aligned}$$

Donc

$$\psi_1''(t) + c^2\psi_1(t) = \cos(ct)$$
$$\psi_n''(t) + n^2c^2\psi_n(t) = 0$$
$$\psi_n(t) = A_n\cos(cnt) + B_n\sin(cnt)$$

8. calculons $\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_n(t)$ et A_0, B_0

$$< \frac{\partial v}{\partial t}(x,0), \varphi_m(x) >= \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n'(0) < \varphi_n, \varphi_m >= 0$$

-Pour $n = 0$

On a : $< \frac{\partial v}{\partial t}(x,0), \varphi_m(x) >= \sum_{n=0}^{+\infty} < \varphi_n(x), \varphi_m(x) >= 0$

Alors

$$\begin{aligned}\psi_0(0) = 0 \Rightarrow & B_0 = \frac{1}{c^2}\\ \psi_0'(0) \Rightarrow & A_0 = 0\end{aligned}$$

Donc

$$\psi_0(t) = \frac{-1}{c^2}\cos(ct) + \frac{A}{C^2}$$

-Pour $n = 1$

On a : $< \frac{\partial v}{\partial t}(x,0), \varphi_m(x) >= \sum_{n=0}^{+\infty} < \varphi_n(x), \varphi_m(x) >= 0$

Alors

$$\begin{aligned}\psi_1'(0) = 0 \Rightarrow & B_1 = 0\\ \psi_1'(0) \Rightarrow & A_1 = \frac{-1}{2c}\end{aligned}$$

Donc

$$\psi_1(t) = \frac{t}{2c}\sin(ct)$$

-Pour $n \geq 2$

On a : $< \frac{\partial v}{\partial t}(x,0), \varphi_m(x) >= \sum_{n=0}^{+\infty} < \varphi_n(x), \varphi_m(x) >= 0$

Alors

$$\begin{aligned}\psi_n'(0) = 0 \Rightarrow & c_n B_n = 0 \\ \psi_n'(0) \Rightarrow & A_n = 0\end{aligned}$$

Donc

$$\psi_n(t) = 0, \quad \forall n \geq 2$$

9.

$$\begin{aligned}v(x,t) =& \psi_0(t)\varphi_0(x) + \psi_1(t)\varphi_1(x) \\ =& \frac{-1}{c^2}\cos(ct) + \frac{t}{2c}\sin(ct)\cos(x) + \frac{1}{c^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(x,t) =& v(x,t) + w(x,t) \\ =& \frac{-1}{c^2}\cos(ct) + \frac{1}{c^2} + \frac{t}{2c}\sin(ct)\cos(x) + x(cos(2t) - 1) + \frac{x^2}{2\pi}\end{aligned}$$

Chapitre 4

La méthode des différence finies

La méthode des différences finies[8, 7, 12, 18, 16, 13, 5] est l'une des techniques de recherche de solution approchée pour les équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

4.1 Le principe fondamental

Le principe fondamental de cette méthode consiste à appliquer au domaine d'étude un maillage, ensuite en appliquant le développement de Taylor de la fonction à déterminer dans chaque nœuds du maillage.

L'objectif étant de calculer ces valeurs discrètes u_i comme étant une bonne approximation de $u(x_i)$ (valeur de la solution exacte aux points de discrétisation) points de grille x_i

$$0 \leq i \leq N : u_i \simeq u(x_i) \quad \text{avec} \quad i = \{0, ..., N\}$$

Dans ce chapitre nous allons présenter les différentes étapes de la méthode :

— La discrétisation du maillage.
— Les dérivées partielles (dérivées première,seconde...) et le développement de Taylor.
— Le schéma numérique et sa convergence.

4.1.1 Maillage

Définition 4.1.1. *On appelle maillage un* ***ensemble des points isolés*** *(nœuds) situés dans le domaine de définition sur lequel on va applique la méthode des différence finies. Le maillage comprend également des points trouvés sur la frontière du domaine (ou au moins proche de cette frontière) afin de pouvoir imposer les conditions initiales ou la condition aux limite, avec une précision suffisante. Pour une application définie sur un segment de $\mathbb{R}$, on ajoutera en général les deux extrémités du segment, mais pour un maillage en dimension supérieure, nous serons amenés à choisir éventuellement des points du contours du domaine de définition.*

Définition 4.1.2. *On appelle le* ***pas de maillage*** *la plus grande distance entre deux points (nœuds) successifs voisins situées sur le droit parallèle à l'un des axes. En dimension* 1*,* *cela simplifie en différence des abscisses. Le pas (global) de l'approximation peut être défini comme le plus grand pas de maillage.*

4.1.2 Le développement de Taylor en dimension m d'ordre n [2]

Théorème 4.1.1. *Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ on considère la fonction $f(x)$. Soit $a = (a_1, ..., a_n)$ suppose que f est différentiable dans la boule ouverte B qui contient a.*
Si $f(x)$ est différentiable dans la boule ouverte B avec $a \in B$ et $x \in B$, Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j_1...j_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_k}}(a)(x_{j_1} - a_{j_1})...(x_{j_k} - a_{j_k}) + o(x-a)$$

4.2 Différences finies en dimension un

On discrétise le segment [0,1] avec :

$$x \leftarrow x_i \qquad x_i = x_1 + (i-1)h$$

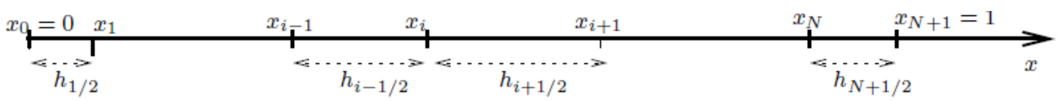


FIGURE 4.1 – Maillage en dimension 1

4.2.1 Expression des dérivées premières

4.2.1.1 Différences finies en avant

[18, 16, 13, 5] La fonction f est connue aux points x_i (points pivots) du domaine d'analyse. A l'aide de la formule de Taylor on développe la fonction f jusqu'à l'ordre 2

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^2(\xi) \tag{4.1}$$

ξ abscisse d'un point se trouvant dans le voisinage de x_i avec

$$x_i < \xi < x_i + h$$

La forme résolu est :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + o(h) \tag{4.2}$$

avec $o(h)$ l'erreur de consistance :

$$o(h) = -\frac{h}{2!}f^2(\xi) \qquad\qquad x_i < \xi < x_i + h \tag{4.3}$$

La formule de la dérivée première s'écrit en notation indicielle :

$$f_i^1 = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + o(h)$$

L'équation (4.2) représente l'expression de la dérivée première de la fonction f écrite par un schéma de différences finies en avant ou différences progressives.
L'application **"différence en avant"** , se justifier par le fait que la différence $f_{i+1} - f_i$ est calculée aux points x_{i+1} et x_i, le point x_{i+1} se trouvant en " avant" de point pivot x_i.
La formulation analytique de la dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La méthode de différence finies s'explique par le fait que le pas h ne peut être égal à 0 les dérivées sont calculées à l'aide des relations (4.2) ou (4.3) en utilisant une quantité finie de h. L'erreur commise est alors $o(h)$.

4.2.1.2 Différences finies en arrière

En changeant h par $-h$ dans l'équation (4.1) on obtient :

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f^2(\xi) \qquad x_i - h < \xi < x_i \tag{4.4}$$

La forme résolu est :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + o(h) \tag{4.5}$$

avec l'erreur de consistance :

$$o(h) = \frac{h}{2!} f^2(\xi) \qquad x_i - h < \xi < x_i$$

L'erreur est de même ordre de grandeur que celle obtenue pour le schéma de différences en avant.
L'équation (4.5) s'écrit en notation indicielle :

$$f_i^1 = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + o(h)$$

L'équation (4.5) représente l'expression de la dérivée première de la fonction f écrire par un schéma de différence finies en arrière ou différence finies régressives.
L'application **" différence en arrière "**, se justifie par le fait que la différence $f_i - f_{i-1}$ est calculée aux pointes x_i et x_{i-1}, le point x_{i-1} se trouvant en arrière" de point pivot x_i.

4.2.1.3 Différences finies centrées

[18, 16, 13, 5] L'élimination de $f(x_i)$ dans les équations suivante :

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f^2(x_i) + \frac{h^3}{3!} f^3(\xi)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^2(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^3(\xi)$$

permet de trouver la dérivée première par un schéma de différences centrées

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + o(h^2)$$

$$\text{avec} \qquad o(h^2) = -\frac{h^2}{6}f_i^3(\xi) \qquad\qquad x_i - h < \xi < x_i + h$$

En notation indicielle :

$$f_i^1 = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + o(h^2)$$

L'erreur est d'ordre de h^2 la dérivée première centrée est plus précise que dans le cas de différences en avant ou en arrière.
l'application **"différence centrée"**, ce justifie par le fait que la différence entre f_{i+1} et f_{i-1} est calculer aux points x_{i+1} et x_{i-1} le point pivot se trouvant au centre de x_{i+1} et x_{i-1}.

4.2.2 Expression des dérivées secondes

4.2.2.1 Différences finies en avant

On écrit le développement de Taylor de $f(x_i + h)$ et $f(x_i + 2h)$:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^3(\xi)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + 2h^2f''(x_i) + \frac{8}{3!}h^3f^3(\xi)$$

Éliminant $f'(x_i)$ entre les deux équations, on obtient :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i + h) + f(x_i + 2h)}{h^2} + o(h)$$

$$\text{avec} \qquad o(h) = -hf^3(\xi) \qquad x_i < \xi < x_i + 2h$$

$$f_i^2 = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2} + o(h) \tag{4.6}$$

L'équation (4.6) représente l'expression de la dérivée seconde écrite par un schéma de différences finies en avant ou progressives.

4.2.2.2 Différences finies en arrière

On considère le développement de Taylor de $f(x_i - h)$ et $f(x_i - 2h)$:

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^3(\xi)$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2f''(x_i) - \frac{4}{3}h^3f^3(\xi)$$

Éliminant $f'(x_i)$ entre les deux équations, on obtient le schéma de différences finies en arrière de la dérivée seconde :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - 2h) - 2f(x_i - h) + f(x_i)}{h^2} + o(h)$$

$$\text{avec} \qquad o(h) = hf^3(\xi) \qquad\qquad x_i - 2h < \xi < x_i$$

$$f_i^2 = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + o(h)$$

Ce dernier est une schéma de différences finies en arrière de la dérivée seconde.

4.2.2.3 Différences finies centrées

On considère le développement de Taylor de $f(x_i + h)$ et $f(x_i - h)$:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^3(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^4(\xi)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^3(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^4(\xi)$$

Éliminant $f'(x_i)$ entre les deux équations, on a :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2} + o(h^2)$$

$$\text{avec} \qquad o(h^2) = -\frac{1}{12}h^2 f^4(\xi) \qquad\qquad x_i - h < \xi < x_i + h$$

$$f_i^2 = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + o(h^2)$$

Ce dernier est un schéma de différences finies centrée de la dérivée seconde.

Exemple 4.2.1. *On considère un pas $\Delta x = 0.1$, calculons grâce aux schéma de différences finies*
(a) en avant (b) en arrière (c) et centrée
la dérivée premier de la fonction $f(x) = x^2$ au point $x = 2$
On a :
$x_i = 2,\ \ \Delta x = 0.1,\ \ x_{i+1} = x_i + \Delta x = 2.1,\ \ x_{i-1} = x_i - \Delta x = 1.9$
$f_i = f(2) = 4,\ \ f_{i+1} = f(2.1) = 4.41,\ \ f_{i-1} = f(1.9) = 3.6,\ \ f''(x) = 2.$
***(a)** Différences finies en avant*

$$f_i^1 = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} = 4.1, \qquad o(h) = -\frac{\Delta x}{2}f''(\xi) = -0.1.$$

***(b)** Différences finies en arrière*

$$f_i^1 = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} = 3.9, \qquad o(h) = \frac{\Delta x}{2}f''(\xi) = 0.1.$$

***(c)** Différences finies centrées*

$$f_i^1 = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} = 4, \qquad o(h^2) = -\frac{\Delta x^2}{6}f_i^3(\xi) = 0.$$

4.3 Différences finies en dimension deux

Dans ce cas on discrétise le domaine rectangulaire par des maillages formés de grilles perpendiculaires .

$$\text{Soit} \qquad (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$

On prend h_x et h_y les pas de discrétisation des intervalles $[a, b] \times [c, d]$ respectivement.

• Discrétisation d'intervalle $[a, b]$:

$h_x = \dfrac{b-a}{n_x}$ $\qquad$ (n_x étant le nombre d'intervalle sur $[a, b]$)

$\Rightarrow x(i) = x_i = a + i \times h_x \qquad i \in \{1, 2, ..., n_x\}$

• Discrétisation d'intervalle $[c, d]$:

$h_y = \dfrac{d-c}{n_y}$ $\qquad$ (n_y étant le nombre d'intervalle sur $[c, d]$)

$\Rightarrow y(j) = y_j = a + j \times h_y \qquad j \in \{1, 2, ..., n_y\}$

• $x_{i+1} = a + (i+1)h_x = (a + ih_x) + h_x$, dans la suite on note $x_i + h_x$, $x_i - h_x$, $y_j + h_y$ et $y_j - h_y$ par x_{i+1}, x_{i-1}, y_{j+1} et y_{j-1} (respectivement).

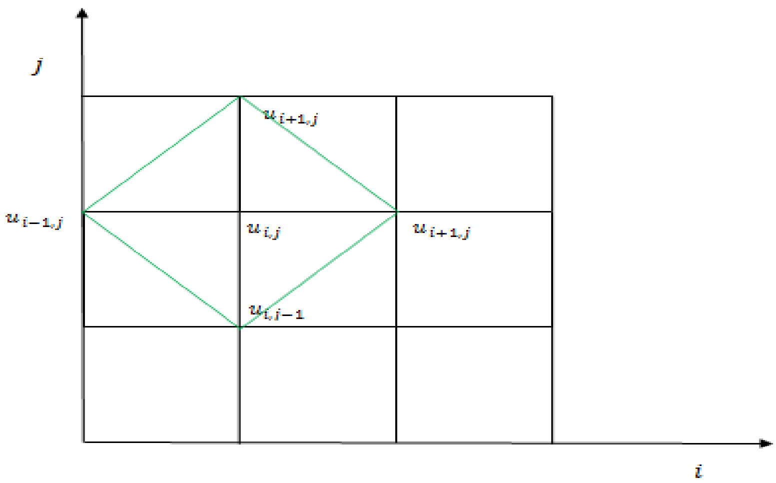


FIGURE 4.2 – Maillage en dimension 2

4.3.1 Expression des dérivées premières : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

4.3.1.1 Différences finies en avant

Soit $f(x, y)$ une fonction de classe C^∞.

Le développement de Taylor de $f(x_i + h_x, y_j)$ est donné par :

$$f(x_i + h_x, y_j) = f(x_i, y_j) + h_x f_x(x_i, y_j) + \frac{h_x^2}{2!} f^2(\xi, \eta) \tag{4.7}$$

$$f_x(x_i, y_j) = \frac{f(x_i + h_x, y_j) - f(x_i, y_j)}{h_x} + o(h_x)$$

$$\text{avec} \qquad o(h_x) = -\frac{h_x}{2!} f^2(\xi, \eta) \qquad x_i < \xi < x_i + h_x$$

En notation indicielle :

$$f_x = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h_x} + o(h_x)$$

4.3.1.2 Différences finies en arrière

Le développement de Taylor de $f(x_i - h_x, y_j)$ donné par :

$$f(x_i - h_x, y_j) = f(x_i, y_j) - h_x f_x(x_i, y_j) + \frac{h_x^2}{2!} f^2(\xi, \eta) \tag{4.8}$$

$$f_x = \frac{f(x_i, y_j) - f(x_i - h_x, y_j)}{h_x} + o(h_x)$$

$$\text{avec} \qquad o(h_x) = \frac{h_x}{2!} f^2(\xi, \eta) \qquad x_i - h_x < \xi < x_i$$

En notation indicielle :

$$f_x = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h_x} + o(h_x)$$

4.3.1.3 Différences finies centrées

On fait la différence entre (4.7) et (4.8) on obtient :

$$f_x = \frac{f(x_i + h_x, y_j) - f(x_i - h_x, y_j)}{2h_x} + o(h_x^2)$$

$$\text{avec} \qquad o(h_x^2) = -\frac{h_x^2}{6} f^3(\xi, \eta) \qquad x_i - h_x < \xi < x_i + h_x$$

En notation indicielle :

$$f_x = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h_x} + o(h_x^2)$$

4.3.2 Expression des dérivées premières : $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Après l'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ on a :

$$\begin{cases} f_y = \dfrac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{h_y} + o(h_y) \quad \text{avec} \quad o(h_y) = -\dfrac{h_y}{2!} f^2(\xi, \eta) \\ \quad \text{et} \quad y_j < \eta < y_j + h_y \quad \text{(d.f avant)} \\ \\ f_y = \dfrac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{h_y} + o(h_y) \quad \text{avec} \quad o(h_y) = \dfrac{h_y}{2!} f^2(\xi, \eta) \\ \quad \text{et} \quad y_j - h_y < \eta < y_j \quad \text{(d.f arrière)} \\ \\ f_y = \dfrac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h_y} + o(h_y^2) \quad \text{avec} \quad o(h_y^2) = -\dfrac{h_y^2}{6} f^3(\xi, \eta) \\ \quad \text{et} \quad y_j - h_y < \eta < y_j + h_y \quad \text{(d.f centrées)} \end{cases}$$

4.3.3 Expression de la dérivée seconde : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

4.3.3.1 Différences finies centrées

On considère le développement de Taylor de $f(x_i + h_x, y_j)$ et $f(x_i - h_x, y_j)$:

$$f_{xx}(x_i, y_j) = \frac{f(x_{i+1}, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2} + o(h_x^2)$$

$$\text{avec} \quad o(h_x^2) = -\frac{1}{12} h_x^2 f^4(\xi, \eta) \qquad x_{i-1} < \xi < x_{i+1}$$

En notation indicielle :

$$f_{xx} = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{h_x^2} + o(h_x^2)$$

4.3.4 Expression de la dérivée seconde : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

4.3.4.1 Différences finies centrées

On fait le même calcule avec $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$:

$$\begin{cases} f_{yy} = \dfrac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{h_y^2} + o(h_y^2) \quad \text{avec} \quad o(h_y^2) = -\dfrac{1}{12} h_y^2 f^4(\xi, \eta) \\ \quad \text{et} \quad y_{j-1} < \eta < y_{j+1} \end{cases}$$

4.3.4.2 Expression de la dérivée seconde : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

On considère le développement de Taylor de $f(x_{i+1}, y_j)$, $f(x_{i-1}, y_j)$, $f(x_i, y_{j+1})$ et $f(x_i, y_{j-1})$ au voisinage (i, j) :

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + h_x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + h_y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j + h_x h_y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} + \frac{h_x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{h_y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_j \tag{4.9}$$

$$f_{i-1,j-1} = f_{i,j} - h_x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i - h_y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j + h_x h_y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} + \frac{h_x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{h_y^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_j \tag{4.10}$$

$$f_{i+1,j-1} = f_{i,j} + h_x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i - h_y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j - h_x h_y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} + \frac{h_x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{h_y^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_j \tag{4.11}$$

$$f_{i-1,j+1} = f_{i,j} - h_x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + h_y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_j - h_x h_y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} + \frac{h_x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i + \frac{h_y^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_j \tag{4.12}$$

En effectuant une combinaison linéaire des quatre équations ((4.9)+(4.10)−(4.11)−(4.12)), on obtient une approximation de la dérivée croisée à l'ordre 1
En notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} + o(h_x, h_y)$$

$$o(h_x, h_y) = \frac{h_x h_y}{3!} f^3(\xi, \eta) \qquad \text{avec} \qquad x_{i-1} < \xi < x_{i+1} \qquad y_{j-1} < \eta < y_{j+1}$$

4.4 Problèmes elliptiques en dimension un

On considère le problème de **Laplace** (dimension 1) :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

En supposant que f est continue, donc on peut déterminer la solution exacte du problème (4.13) maintenant, nous allons effectuer une résolution numérique

4.4.1 Choix de discrétisation maillage

On discrétiser l'espace $[0,1]$

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$$

Où $N \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{0, 1, ..., N\}$ on pose $h_i = x_{i+1} - x_i$
Le pas du maillage est défini par :

$$h = \max_{i=0,1,\dots,N} h_i$$

On suppose que le pas de maillage est constant pour simplifier les calculs :
alors on a $h = h_i$ et $x_{i+1} = x_i + h, \quad \forall i \in \{0, 1, ..., N\}$
le problème (4.13) s'écrit comme suite :

$$\begin{cases} -u''(x_i) = f(x_i) & \forall i \in \{1, ..., N\} \\ u(x_0) = u(x_{N+1}) = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

4.4.2 Choix du schéma numérique

On suppose $u \in C^2[0,1]$ alors u admet un développement limité sous la forme :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + o(h^3)$$

et

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + o(h^3)$$

où $|o(h^3)| \leq ch^3$ et c une constante indépendante de h.
En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient l'expression suivante :

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + o(h) \tag{4.15}$$

L'expression (4.15) est une approximation de $u''(x_i)$ pour h suffisamment petit.
Pour $i \in \{0, 1, ..., N\}$ on note u_i une approximation de $u''(x_i)$, d'où $u(x_0) = u(x_{N+1}) = 0$
Alors l'expression

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

est une approximation de $u''(x_i)$, le choix d'approximation n'est pas unique, dans notre cas est appelé un schéma **centrée**.
Donc on peut approcher le problème (4.14) par le problème discret suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} = f(x_i) \quad \forall i \in \{1,...,N\} \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

4.4.3 La forme matricielle

On écrire le problème (4.16) sous la forme matricielle.
On pose $U_h = (u_1, ..., u_N)^t$, prenons les conditions aux limites $u(x_0) = u(x_{N+1}) = 0$

Pour $i = 1$ $\qquad -\dfrac{u_2 - 2u_1}{h^2} = f(x_1)$

Pour $i = 2$ $\qquad -\dfrac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} = f(x_2)$

$\vdots$

Pour $i = N$ $\qquad -\dfrac{-2u_N + u_{N-1}}{h^2} = f(x_N)$

D'où $A_h = -\dfrac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ et $b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$

le vecteur u_h est un solution du système matriciel

$$A_h U_h = b_h \tag{4.17}$$

la résolution de ce dernier déterminera des valeur approchées à la solution exacte.

4.5 Problèmes elliptiques en dimension deux

Le principe est exactement le même que celui de la dimension 1, la seule différence réside dans l'écriture. On considère le problème de **Laplace** (dimension 2) :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega \in]0,1[^2 \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.18}$$

avec $u = u(x,y)$, $\Delta = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$ et $\partial\Omega$ c'est le bord Ω.

4.5.1 Choix de discrétisation maillage

Pour définir un maillage de Ω on pose :

$x_i = ih$ et $y_j = jh$ où $0 < i,j < N+1$ $h = \dfrac{1}{N+1}$ et $N \in \mathbb{N}$

Construction d'un schéma numérique

Grâce au chapitre 2 l'approximation de $\Delta u(x_i, y_j)$ est donné par :

$$\Delta_h u_{i,j} \simeq \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,,j-1}}{h^2}$$

Avec cette notation, le problème discrétisé est de trouver $u_{i,j}$ tel que :

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2} = f(x_i, y_j) & \text{pour } 1 \leq i,j \leq N \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i,j \leq N \end{cases} \tag{4.19}$$

4.5.2 La forme matricielle

Pour écrire (4.19) sous la forme matricielle.

On pose $U_h = (u_{11}, ..., u_{1N}, u_{21}, ..., u_{2N} ..., u_{N1}, ..., u_{NN})^t$

Alors le problème (4.19) s'écrit : $A_h U_h = b_h$

$$A_h = -\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} B & C & 0 & \cdots & 0 \\ C & B & C & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & C \\ 0 & \cdots & \cdots & C & B \end{pmatrix}$$

et

$$b_h = (f(x_1,y_1), ..., f(x_1,y_N), f(x_2,y_1), ..., f(x_N,y_N))^t$$

avec $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ et $C = I_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$

Remarque 4.5.1. *Tous les résultats de consistance, stabilité et convergence du cas de la dimension 1, s'adaptent sans modification majeure.*

4.6 Problèmes paraboliques en dimension un

On considère le problème de la **chaleur** (dimension 1) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) & \text{pour } (t,x) \in]0,T[\times]0,1[\\ u(0,x) = u_0(x) & \text{pour } x \in]0,1[\\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

Théorème 4.6.1. *Si* $u_0 \in C^1(]0,1[)$, *alors il existe une unique solution*

$$u \in C^2(]0,T[\times]0,1[) \ \cap \ C^1([0,T] \times [0,1]) \ \text{ de } (4.20)$$

4.6.1 Choix de discrétisation maillage.

Soit $(t_j, x_i) \in [0,T] \times [0,1]$ et soit M, N deux entiers fixés

$$x_i = ih \qquad \forall i \in \{0,1,...,N+1\} \qquad h = \frac{1}{N+1}$$

$$t_j = j\Delta t \qquad \forall j \in \{0,1,...,M+1\} \qquad \Delta t = \frac{1}{M+1}$$

En particulier : $x_0 = 0$, $x_{N+1} = 1$, $t_0 = 0$, $t_{N+1} = T$

$$u_0^{(j)} = u_{M+1}^{(j)} = 0 \qquad \forall j \in \{0,1,...,M+1\}$$

$$u_i^{(0)} = u_0(x_i) = 0 \qquad \forall i \in \{0,1,...,N+1\}$$

4.6.2 Schéma Explicite

Construction d'un schéma numérique.
le développement limite de Taylor donne :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_j,x_i) \simeq \frac{u(t_{j+1},x_i)-u(t_j,x_i)}{\Delta t} \simeq \frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\Delta t} \qquad \text{(D.f avant)}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j,x_i) \simeq \frac{u(t_j,x_{i+1})-2u(t_j,x_i)+u(t_j,x_{i-1})}{h^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_j,x_i) \simeq \frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2} \qquad \text{(D.f centrée)}$$

On obtient alors le schéma suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\Delta t} - \dfrac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2} = f(t_j,x_i) & 0 \le j \le M,\ 1 \le i \le N \\ u_i^{(0)} = u_0(x_i) \qquad 1 \le i \le N \\ u_0^{(j)} = u_{N+1}^{(j)} = 0 \qquad 0 \le j \le M. \end{cases} \tag{4.21}$$

Le schéma explicite s'écrit sous la forme suivante :

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\Delta t}{h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) \qquad \text{avec } \lambda = \frac{\Delta t}{h^2}$$

$$\text{donc} \qquad u_i^{j+1} = u_i^j(1-2\lambda) + \lambda u_{i+1}^j + \lambda u_{i-1}^j \tag{4.22}$$

La forme matricielle
Le problème (4.21) s'écrie sous la forme d'un système matriciel $U^{j+1} = AU^j = C^j$

$$\begin{array}{lll} \text{pour } i=1 & U_i^{j+1} = u_1^j(1-2\lambda) + \lambda u_2^j + \lambda u_0^j & u_0^j = 0 \\ \text{pour } i=2 & U_i^{j+1} = u_2^j(1-2\lambda) + \lambda u_3^j + \lambda u_1^j & \\ \quad \vdots & & \\ \text{pour } i=N & U_i^{j+1} = u_N^j(1-2\lambda) + \lambda u_{N+1}^j + \lambda u_{N-1}^j & u_{N+1}^j = 0 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

$$C^j = (f(t_j,x_1),...,f(t_j,x_N))^t \qquad U^j = (u_1^j,...,u_N^j)^t \qquad \forall j \in \{0,...,M\}$$

Encore, on peut écrire le schéma (4.21) sous la forme :

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^j}{\Delta t} + A_h^0 U_i^j = C^j$$

avec $A_h^0 U^j$ s'écrit sous la forme :

$$A_h^0 U^j = -\frac{1}{h^2}[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j]$$

$$U^{j+1} = (Id - \Delta t A_h^0)U^j + \Delta t C^j$$

avec $(Id - \Delta t A_h^0)$ est symétrique définie positive puisque A_h^0 est symétrique définie positive

4.6.3 Schéma Implicite :

Construction dun schéma numérique.

$\frac{\partial u}{\partial t}(t_j, x_i) \simeq \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t}$ (D.f arrière)

Alors on obtient le schéma suivant :

$$\begin{cases} \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} = f(t_j, x_i) & 1 \leq j \leq M+1 \ , 1 \leq i \leq N \\ u_i^{(0)} = u_0(x_i) & 1 \leq i \leq N \\ u_0^{(j)} = u_{N+1}^{(j)} = 0 & 1 \leq j \leq M+1. \end{cases} \tag{4.23}$$

Avec les même conditions initiales de schéma explicite, on obtient :

$$u_i^{j-1} = u_i^j(1 + 2\lambda) - \lambda u_{i+1}^j - \lambda u_{i-1}^j$$

Passage aux problème matriciel

On va écrire le problème (4.23) sous la forme matricielle $U^{j-1} = AU^j = C^j$

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & -\lambda & 1+2\lambda \end{pmatrix}$$

$$C^j = (f(t_1, x_1), ..., f(t_j, x_N))^t \qquad U^j = (u_1^j, ..., u_N^j)^t \qquad \forall j \in \{1, ..., M+1\}$$

Encore, on peut écrire le schéma (4.21) sous la forme :

$$\frac{U^j - U^{j-1}}{\Delta t} + A_h^0 U^j = C^j \qquad \forall j \in \{1, ..., M+1\}$$

D'où

$$U^j = (Id + \Delta t A_h^0)^{-1} U^{j-1} + \Delta t (Id + \Delta t A_h^0)^{-1} C^j \qquad \forall j \in \{1, ..., M+1\}$$

avec $(Id + \Delta t A_h^0)$ symétrique définie positive puisque A_h^0 est symétrique définie positive.

4.7 Problème hyperbolique

On considère le problème **d'advection** (dimension 1) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0 \quad (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.24}$$

où la vitesse de transport c et la donnée initiale u_0 sont données.

Définition 4.7.1. *Toute fonction $u \in C^1(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$ qui vérifie (4.24) est une solution classique de (4.24)*

Corollaire 4.7.1. *Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, il existe une unique solution classique de u de (4.24) donnée par :*
$u(t,x) = u_0(x - ct)$

Choix de discrétisation maillage
On note h, Δt (les pas d'espace et de temps), on se place sur un intervalle de temps borné $[0,T]$ où $T = N\Delta t$ avec $N \in \mathbb{N}$ on pose

$$\begin{cases} x_j = jh \quad j \in \mathbb{Z} \\ t_n = n\Delta t \quad n \in \{0,...,N\} \end{cases}$$

Construction d'un schéma numérique :
On cherche une approximation u au point x_j et au temps t_n, $u(x_j,t^n) \simeq u_j^n$
Pour La discrétisation de l'équation d'advection en utilisant des opérateurs d'approximation de $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) = \dfrac{u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)}{\Delta t} + o(\Delta t) \simeq \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \qquad \text{(D.f avant)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_j,t_n) = \dfrac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{2h} + o(h^2) \simeq \dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \qquad \text{(D.f centre)} \end{cases} \tag{4.25}$$

4.7.1 Schéma explicite

Le schéma numérique de problème (4.24) est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \\ u_j^0 = u_0(x_j) \end{cases}$$

On pose $\lambda = c\dfrac{\Delta t}{h}$ donc le schéma explicite centré défini par :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \tag{4.26}$$

La forme matricielle
Donc il s'agit d'écrire (4.26) sous la forme d'un système matriciel $U^{j+1} = AU^j$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1 & -\frac{\lambda}{2} & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{\lambda}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Les schémas explicites décentrés :
le schéma explicite en **avant** $u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(u_{j+1}^n - u_j^n \right)$
le schéma explicite en **arrière** $u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(u_j^n - u_{j-1}^n \right)$
La forme matricielle
Donc il s'agit d'écrire les deux schémas sous la forme d'un système matriciel $U^{j+1} = BU^j$

$$\begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_j^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \lambda & 1-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_j^n \end{pmatrix}$$

4.8 Exemple d'un problème elliptique

On va résoudre le problème de Laplace (dimension 2) :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \qquad \text{dans le domaine } (x, y) \in]0.20[\times]0.10[\\ u(x, 0) = u(x, 10) = 0 \quad \text{et } y \in]0.10[\\ u(0, y) = 0 \text{ et } u(20, y) = 100 \quad \text{et } x \in]0.20[\end{cases} \tag{4.27}$$

On récrit le problème (4.27) sous la forme d'un schéma numérique du problème (4.18) avec $h_x = h_y = h$ on a :

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0 \qquad i \in \{0, 1, ..., n_x\} \text{ et } j \in \{0, 1, ..., n_y\} \\ u_{x,0} = u_{x,10} = u_{0,y} = 0 \text{ et } u_{20,y} = 100 \end{cases} \tag{4.28}$$

On va résoudre ce dernier pour $h \in \{5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125\}$

4.8.1 h = 5

Discrétisation de l'espace :

$h = \dfrac{b-a}{n_x} \Rightarrow n_x = \dfrac{b-a}{h} = \dfrac{20-0}{5} = 4 \qquad et \qquad h = \dfrac{d-c}{n_y} \Rightarrow n_y = \dfrac{d-c}{h} =$

$\dfrac{10-0}{5}=2$
La grille maillée contient alors $(n_x+1)(n_y+1)$ mailles
On peut trouver les valeurs de $u_{i,j}$ aux points ou $i \in \{0,1,2,3,4\}$ et $j \in \{0,1,2\}$
Donc le nombre d'inconnues est réduit $(n_x-1)(n_y-1)=3\times 1$
D'après le schéma numérique (4.28), Pour $j=1$ et $i \in \{1,2,3\}$ on a :

Pour $i=1$	$u_{2,1}+u_{0,1}-4u_{1,1}+u_{1,2}+u_{1,0}=0$	$u_{0,1}=0,\ u_{1,0}=0$
Pour $i=2$	$u_{3,1}+u_{1,1}-4u_{2,1}+u_{2,2}+u_{2,0}=0$	$u_{2,0}=0,\ u_{2,2}=0$
Pour $i=3$	$u_{4,1}+u_{2,1}-4u_{3,1}+u_{3,2}+u_{3,0}=0$	$u_{3,0}=0,\ \ u_{3,2}=100$

Nous obtenons le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} -4u_{1,1}+u_{2,1}+u_{3,1}=0 \\ u_{1,1}-4u_{2,1}+u_{3,1}=0 \\ u_{1,1}+u_{2,1}-4u_{3,1}=-100 \end{cases} \tag{4.29}$$

En fin on résout le système (4.29) grâce à une méthode numérique (vue en chapitre 1) on pose

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad U_h=\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix}$$

le système équivalent au système matricielle $AU_h=B$ et sa résolution détermine les valeurs approchées de U_h

$$U_h=\begin{pmatrix} 1.786 \\ 7.143 \\ 26.786 \end{pmatrix}$$

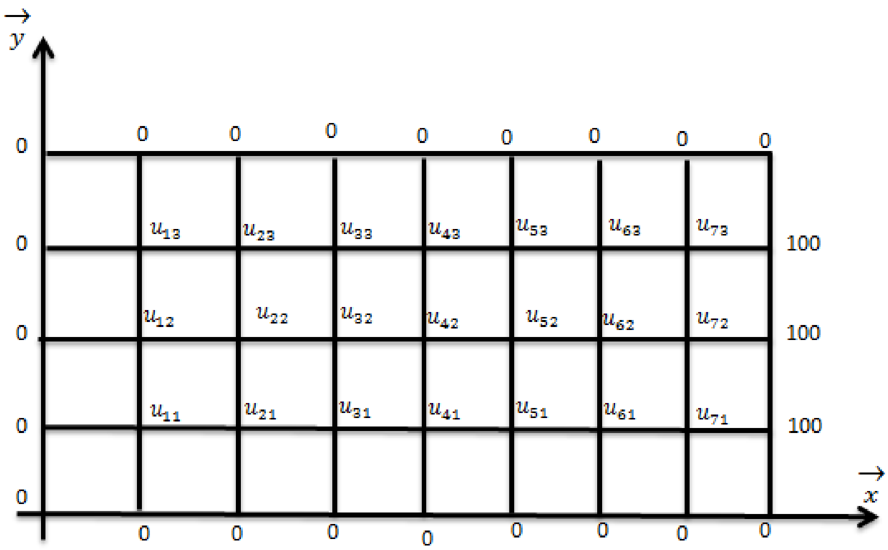
4.8.2 h=2.5

On refait le même travaille précédant alors on a les valeurs de u_{ij} au point correspondant aux valeurs de i,j telles que $i \in \{0,...,8\}, j \in \{0,...,4\}$ sont obtenues grâce aux conditions aux bords d'où le nombre d'inconnues est réduit : $n=21$
D'après le schéma numérique (4.28), Pour $i \in \{1,2,...,7\}$ et $j \in \{1,2,3\}$, nous obtenons le

système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}
-4u_{1,1}+u_{2,1}+0+\cdots+u_{1,2}+0+\cdots=0\\
u_{1,1}-4u_{2,1}+u_{3,1}+0+\cdots+u_{2,2}+0+\cdots=0\\
0+u_{2,1}-4u_{3,1}+u_{4,1}+0+\cdots+u_{2,2}+0+\cdots=0\\
\vdots\\
0+\cdots+u_{6,1}-4u_{7,1}+0+\cdots+u_{7,2}+0+\cdots=-100\\
u_{1,1}+0+\cdots-4u_{1,2}+u_{2,2}+0+\cdots+u_{1,3}+0+\cdots=0\\
0+u_{2,1}+0+\cdots+u_{1,2}-4u_{2,2}+u_{2,3}+0+\cdots+u_{2,3}+0+\cdots=0\\
\vdots\\
0+\cdots+u_{7,1}+0+\cdots+u_{6,2}-4u_{7,2}+0+\cdots+u_{7,3}=-100\\
0+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_{1,2}-4u_{1,3}+u_{2,3}+0+\cdots\cdots\cdots=0\\
0+\cdots+u_{2,2}+0\cdots\cdots\cdots+u_{1,3}-4u_{2,3}+u_{3,3}+0+\cdots=0\\
\vdots\\
0+\cdots+u_{6,2}+0+\cdots+u_{5,3}-4u_{6,3}+u_{7,3}=0\\
0+\cdots\cdots\cdots+u_{7,2}+0+\cdots\cdots+u_{6,3}-4u_{7,3}=-100
\end{array}\right. \tag{4.30}$$

Grâce aux conditions aux limites on va cherche les inconnus de système (4.30) :



On va mettre les inconnues sous une forme d'un vecteur comme suit

$$\begin{cases}
-4u_1 + u_2 + u_8 = 0 \\
u_1 - 4u_2 + u_3 + u_9 = 0 \\
u_2 - 4u_3 + u_4 + u_{10} = 0 \\
\vdots \\
u_6 - 4u_7 + u_{14} = -100 \\
u_1 - 4u_8 + u_9 + u_{15} = 0 \\
u_2 + u_8 - 4u_9 + u_{10} + u_{16} + = 0 \\
\vdots \\
u_7 - 4u_{13} + u_{14} + u_{21} = -100 \\
u_8 - 4u_{15} + u_{16} = 0 \\
u_9 + u_{15} - 4u_{16} + u_{17} = 0 \\
\vdots \\
u_{13} + u_{19} - 4u_{20} + u_{21} = 0 \\
u_{14} + u_{20} - 4u_{21} = -100
\end{cases}$$

Reste maintenant à résoudre le système matriciel suivant : $A \times u = B$, tel que

$$A = \begin{pmatrix}
-4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
1 & -4 & 1 & & & & 1 & & & & & & & \vdots \\
0 & 1 & -4 & 1 & & & & 1 & & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & & 1 & -4 & 0 & & & & 1 & & & & \vdots \\
1 & & & & 0 & -4 & 1 & & & & 1 & & & \vdots \\
0 & \ddots & & & & 1 & \ddots & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & 1 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & & & 1 & -4 & 0 & & & & 1 \\
\vdots & & & & \ddots & & & & 0 & -4 & 1 & & & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & \ddots & & & & 1 & -4 & 1 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -4
\end{pmatrix} \text{et} B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -100 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ -100 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -100 \end{pmatrix}$$

4.9 Problèmes paraboliques

La résolution du problème de la chaleur (dimension 1) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t \geq 0 \quad x \in]0.2[\\ u(x,0) = 100 \quad \text{si} \quad x \in]0.1[\\ u(x,0) = 100(2-x) \quad \text{si} \quad x \in]1.2[\\ u(x,0) = u(2,t) = 0 \end{cases} \tag{4.31}$$

avec $\alpha = \dfrac{k}{cp} \in \mathbb{R}$

Prenons : $k = 0.13, c = 0.11, p = 7.8, h_x = 0.25$ et Δt est déterminer par la condition de stabilité

$$r = \frac{k}{cp} . \frac{\Delta t}{h_x^2} < \frac{1}{2}$$

La solution analytique

La solution analytique du problème (4.31) donnée par :

$$u_{exact}(x,t) = 800 \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2} \times \cos \frac{\pi(2n+1)(x-1)}{2} \times \exp^{-0.3738(2n+1)^2 t} \tag{4.32}$$

Discrétisation de l'espace :
On va résoudre notre équation sur l'intervalle [0.2] avec un pas h_x

On a $x_i = ih \quad i \in \{0, 1, ..., n_x\}$ où $n_x = \dfrac{2-0}{h_x} = \dfrac{2}{h_x}$

Discrétisation de temps :
On a fait une discrétisation sur t avec $h_t = \Delta t$

On a $t_j = jh_t \quad (t_0 = 0) \quad j \in \{0, 1, ..., n_t\}$ où $n_t = \dfrac{T_{max}}{h_t}$

4.9.1 La solution approchée

On va calculer la solution approchée du problème (4.31) par la méthode explicite. On récrit le problème (4.31) sous la forme d'un schéma numérique du problème (4.20), on obtient :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \simeq \frac{k}{cp} \times \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

On utilise le schéma explicite (4.22). De même manière qu'on a vu au problème elliptique, on fait les calcules mais avec les conditions du problème (4.31), on trouve :

$$\begin{cases} U^{j+1} = M \times U_j + N \\ 1 \leq j \leq nt - 1 \end{cases}$$

avec $\quad M = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ r & 1-2r & r & \ddots & & \vdots \\ 0 & r & 1-2r & r & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & r & 1-2r & r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & r & 1-2r \end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} ru_0^j \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ ru_{nx}^j \end{pmatrix}$

4.10 Problèmes hyperboliques

On résoud problème d'advection (dimension 1) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & t \geq 0 \quad x \in]0.2\pi[\\ u(0,t) = u(l,t) = \cos(ct) & l = 2\pi \\ u(x, t=0) = \cos(x) \end{cases} \tag{4.33}$$

avec $\quad c(t,x) = 1, \quad r = c.\dfrac{\Delta t}{h} < \dfrac{1}{2}$ (la condition de stabilité)

4.10.1 La solution analytique

La solution analytique de (4.33) donnée par :
$u(t,x) = g(x - ct)$ où g une fonction arbitraire.
D'après les conditions aux bords on a $u(x,t) = \cos(x - ct)$

Discrétisation de l'espace :
On va résoudre notre équation sur l'intervalle $[0.2\pi]$ avec un pas h_x
On a $x_i = ih \quad i \in \{0, 1, ..., n_x\}$ où $n_x = \dfrac{2\pi - 0}{h_x} = \dfrac{2\pi}{h_x}$

Discrétisation de temps :
On à fait une discrétisation sur t avec $h_t = \Delta t$
On a $t_j = jh_t \quad (t_0 = 0) \quad j \in \{0, 1, ..., n_t\}$ où $n_t = \dfrac{T_{max}}{h_t}$

4.10.2 La solution approchée

On récrit le problème (4.33) sous la forme d'un schéma numérique de problème (4.24), on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h_t} + c\dfrac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h_x} = 0 & j \in \{0, ..., n_t\}, \quad i \in \{0, ..., n_x\} \\ u^j(0) = u^j(l) = \cos(ct) & l = 2\pi \\ u^0(x_i) = \cos(x) \end{cases} \tag{4.34}$$

Pour avoir des bons résultat en appliquant cette méthode numérique (explicite), il faut tenir compte de la valeur de r (condition de CFL) car elle influencera les résultats.
Si on applique cette méthode avec un programme de calcul(comme matlab, c, c++ ...), on va remarquer quand le pas h est plus petit, l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée tend vers 0.

Chapitre 5

La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis[21, 15] est la méthode la plus utilisée pour la résolution de problèmes aux limites. Elle est basée sur une formulation variationnelle du problème. L'approximation se fait alors directement sur l'espace V. On écrira une formulation variationnelle approchée sur un sous-espace de dimension finie de et sur ce sous-espace, le problème se ramène à la résolution d'un système linéaire dont les inconnues sont les coordonnées de l'inconnue approchée dans une base de V_h. Nous avons la méthodes des éléments finis de Lagrange[21, 15] et d'Hermite[21, 15] qui en découlent correspondent à autant de choix de l'espace V_h et à l'étude de l'erreur d'approximation correspondante.

5.1 Principe général de la méthode des éléments finis

La démarche générale de la méthode des éléments finis est la suivante. On a une EDP à résoudre sur un domaine Ω. On écrit la formulation variationnelle de cette EDP, et on se ramène donc à un problème du type

$$(P) \text{ trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = l(v),\ \forall v \in V$$

On va chercher une approximation de u par approximation interne. Pour cela, on définit un maillage du domaine Ω, grâce auquel on va définir un espace d'approximation V_h, s.e.v. de V de dimension finie N_h(par exemple V_h sera l'ensemble des fonctions continues sur Ω et affines sur chaque maille).
Le problème approché est alors

$$(P_h) \text{ trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h$$

Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_{N_h})$ une base de V_h. En décomposant u_h sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i \tag{5.1}$$

Le problème (P_h) devient

$$\text{trouver } \mu_1, ..., \mu_{N_h} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, v_h) = l(v_h), \forall v_h \in V_h \tag{5.2}$$

ou encore par linéarité de a et l :

$$\text{trouver } \mu_1, ..., \mu_{N_h} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \forall j = 1, ...N_h \tag{5.3}$$

c'est à dire résoudre le système linéaire

$$A\mu = b \tag{5.4}$$

$$A = \begin{bmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_1, \varphi_{N_h}) \\ a(\varphi_2, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_2, \varphi_{N_h}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_{N_h}, \varphi_1) & a(\varphi_{N_h}, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_{N_h}) \end{bmatrix}$$

et

$$b = \begin{bmatrix} l(\varphi_1) \\ l(\varphi_2) \\ l(\varphi_3) \\ \vdots \\ l(\varphi_{N_h}) \end{bmatrix}$$

et

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{N_h} \end{bmatrix}$$

La matrice A est a priori pleine. Toute fois, pour limiter le volume de calculs, on va définir des fonctions de base φ_i dont le support sera petit, c'est à dire que chaque fonction φ_i sera nulle partout sauf sur quelques mailles. Ainsi les termes $a(\varphi_i, \varphi_j)$ seront le plus souvent nuls, car correspondant à des fonctions φ_i et φ_j de supports disjoints. La matrice A sera donc une matrice creuse, et on ordonnera les φ_i de telle sorte que A soit à structure bande, avec une largeur de bande la plus faible possible.
A ce niveau, les difficultés majeures en pratique sont de trouver les φ_i et de les manipuler pour les calculs d'intégrales nécessaires à la construction de A. Sans rentrer pour le moment dans les détails, on peut toutefois indiquer que la plupart de ces difficultés seront levées grâce à trois idées principales :

— Le principe d'unisolvance : On s'attachera à trouver des degrés de liberté (ou ddl) tels que la donnée de ces ddl détermine de facon univoque toute fonction de V_h.
Il pourra s'agir par exemple des valeurs de la fonction en quelques points. Déterminer une fonction reviendra alors à déterminer ses valeurs sur ces ddl.

— Définition des φ_i : On définira les fonctions de base par $\varphi_i = 1$ sur le i^{me} ddl, et φ_i $= 0$ sur les autres ddl. La manipulation des φ_i sera alors très simplifiée, et les φ_i auront par ailleurs un support réduit à quelques mailles.

— La notion de "famille affine d'éléments" :
Le maillage sera tel que toutes les mailles soient identiques à une transformation affine près. De ce fait, tous les calculs d'intégrales pourront se ramener à des calculs sur une seule maille "de référence", par un simple changement de variable.

5.2 Formulation variationnelle

5.2.1 Exemple 1-D

Soit à résoudre le problème

$$(P)\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 & \end{cases}$$

où f et c sont des fonctions données continues sur $[a, b]$. On supposera de plus que la fonction c est strictement positive sur $[a, b]$. Un tel problème est appelé problème aux limites.

Définition 5.1. *Une solution classique (ou solution forte) de (P) est une fonction de $C^2([a, b])$ telle que $u(a) = u(b) = 0$ et $\forall x \in]a, b[$, $-u^{''}(x) + c(x)u(x) = f(x)$.*

En faisant le produit scalaire $L^2(]a, b[)$ de l'équation différentielle avec une fonction-test $v \in D(]a, b[)$(c'est à dire en intégrant sur $[a, b]$), on a :

$$-\int_a^b u^{''}(x)v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \tag{5.5}$$

soit, en intégrant par parties le premier terme :

$$\int_a^b u^{'}(x)v^{'}(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \tag{5.6}$$

car $v(a) = v(b) = 0$ puisque $v \in D(]a, b[)$.
Chaque terme de cette équation a en fait un sens dès lors que $v \in H_0^1(]a, b[)$. De plus, $D(]a, b[)$ étant dense dans $H_0^1(]a, b[)$, cette équation est vérifiée pour tout $v \in H_0^1(]a, b[)$.
On peut donc définir le nouveau problème :

$$(Q)\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(]a, b[) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_a^b u^{'}(x)v^{'}(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(]a, b[) \end{cases}$$

(Q) est la formulation variationnelle(ou formulation faible) du problème (P).
Toute solution de (Q) est appelée solution faible. Il est immédiat que toute solution forte de (P) est aussi une solution faible.

5.2.2 Coordonnées barycentriques

Soit K un triangle de $\mathbb{R}^2$ de sommets a_1, a_2, a_3. On appelle coordonnées barycentriques de K les fonctions affines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de K dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\lambda_j(a_i) = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq 3 \tag{5.7}$$

On voit que la somme $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ est une fonction affine qui vaut 1 sur chacun des 3 sommets. C'est donc la fonction constante égale à 1.

Si l'on note (x_i, y_i) les coordonnées d'un sommet a_i et $\lambda_j(x, y) = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j$, la relation(5.7) est équivalente au système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_j x_i + \beta_j y_i + \gamma_j = 0 \\ \alpha_j x_k + \beta_j y_k + \gamma_j = 0 \\ \alpha_j x_j + \beta_j y_j + \gamma_j = 0 \end{array} \right. \tag{5.8}$$

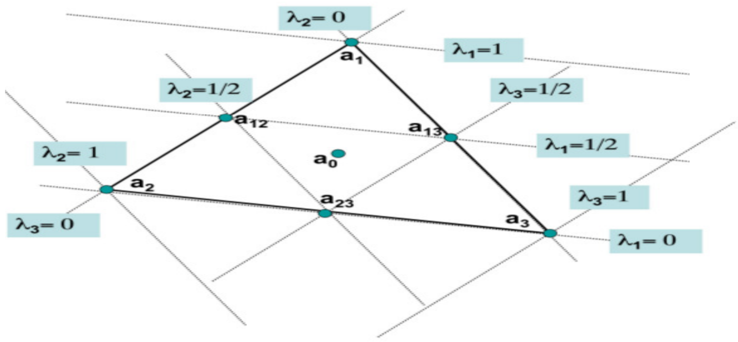


FIGURE 5.1 – Coordonnées barycentriques sur un triangle

5.2.3 Formules de Green

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, de frontière notée $\partial\Omega$. On note n la normale locale sur $\partial\Omega$.
On a les propriétés suivantes, appelées formules de Green, qui sont en fait simplement des cas particuliers d'intégration par parties :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\ v\ dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k}\ dx + \int_{\partial\Omega} uv(e_k.n)ds \tag{5.9}$$

où e_k est le vecteur unitaire dans la direction x_k.

$$\int_\Omega \Delta u\ v\ dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\ ds \tag{5.10}$$

$$\int_\Omega u div E\ dx = -\int_\Omega \nabla u\ E\ dx + \int_{\partial\Omega} u\ (E.n)\ ds \tag{5.11}$$

5.3 Unisolvance

Définition 5.2. *Soit* $\Sigma = \{a_1, ..., a_N\}$ *un ensemble de* N *points distincts de* $\mathbb{R}^n$.

Soit P un espace vectoriel de dimension finie de fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que Σ est P- unisolvant si pour tous réels $\alpha_1, ..., \alpha_N$, il existe un unique élément p de P tel que $p(a_i) = \alpha_i,\ i = 1, ..., N$.
Ceci revient à dire que la fonction :

$$\begin{aligned} L: \quad & P \to R^N \\ & p \to (p(a_1), ..., p(a_N)) \end{aligned} \tag{5.12}$$

est bijective.
En pratique, on montrera que Σ est P-unisolvant en vérifiant que $\dim P = Card\Sigma$, puis en montrant l'injectivité ou la surjectivité de L.
L'injectivité de L se démontre en établissant que la seule fonction de P s'annulant sur tous les points de Σ est la fonction nulle.
La surjectivité de L se démontre en exhibant une famille $p_1, ..., p_N$ d'éléments de P tels que

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}$$

c'est à dire un antécédent pour L de la base canonique de $\mathbb{R}^N$.
En effet, étant donnés des réels $\alpha_1, ..., \alpha_N$, la fonction $p = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i$ vérifie alors

$$p(a_j) = \alpha_j,\ j = 1, ..., N$$

5.4 Élément fini de Lagrange[21, 15]

Définition 5.3. *Un élément fini de Lagrange est un triplet* (K, Σ, P) *tel que*

- K est un élément géométrique de $\mathbb{R}^n$(n = 1, 2 *ou* 3), compact, connexe, et d'intérieur non vide.
- $\Sigma = \{a_1, ..., a_N\}$ est un ensemble fini de N points distincts de K.
- P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur K, et tel que Σ soit P-unisolvant(donc $\dim P = N$).

Définition 5.4. *Soit* (K, Σ, P) *un élément fini de Lagrange. On appelle les fonctions de base locales de l'élément les* N *fonctions* $p_i (i = 1, ..., N)$ *de* P *telles que*

$$p_i(a_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq N. \tag{5.13}$$

On vérifie aisément que $(p_1, ..., p_N)$ ainsi définie forme bien une base de P.

Définition 5.5. *On appelle opérateur de P-interpolation sur* Σ *l'opérateur* π_K *qui, à toute fonction* v *définie sur* K, *associe la fonction* $\pi_K v$ *de* P *définie par*

$$\pi_K v = \sum_{i=1}^{K} v(a_i) p_i$$

$\pi_K v$ est donc l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les points de Σ.

5.5 Exemples d'éléments finis de Lagrange

5.5.1 Espaces de polynômes

On notera P_k l'espace vectoriel des polynômes de degré total inférieur ou égal à K.

- Sur $\mathbb{R}, P_k = Vect\{1, X, ..., X^k\}$ et $\dim P_k = k + 1$.
- Sur $\mathbb{R}^2$, $P_k = Vect\{X^iY^j; 0 \le i + j \le k\}$ et $\dim P_k = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.
- Sur $\mathbb{R}^3$, $P_k = Vect\{X^iY^jZ^l; 0 \le i + j + l \le k\}$ et $\dim P_k = \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$.

On notera Q_k l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable.

- Sur $\mathbb{R}$, $Q_k = P_k$.
- Sur $\mathbb{R}^2$, $Q_k = Vect\{X^iY^j; 0 \le i, j \le k\}$ et $\dim Q_k = (k+1)^2$.
- Sur $\mathbb{R}^3$, $Q_k = Vect\{X^iY^jZ^l; 0 \le i, j, l \le k\}$ et $\dim Q_k = (k+1)^3$.

5.5.2 Exemples 1-D

1. Élément P_1
   i) $K = [a, b]$
   ii) $\Sigma = \{a, b\}$
   iii) $P = P_1$
2. Élément P_2
   i) $K = [a, \dfrac{a+b}{2}, b]$
   ii) $\Sigma = \{a, b\}$
   iii) $P = P_2$
3. Élément P_m
   i) $K = [a + i\dfrac{b-a}{m},\ i = 0, ..., m]$
   ii) $\Sigma = \{a, b\}$
   iii) $P = P_m$

5.5.3 Exemples 2-D triangulaires

1. Élément P_1
   i) $K =$ triangle de sommets a_1, a_2, a_3
   ii) $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$
   iii) $P = P_1$
   Les fonctions de base sont définies par $p_i(a_j) = \delta_{ij}$.
   Ce sont donc les coordonnées barycentriques : $p_i = \lambda_i$.
2. Élément P_2
   i) $K =$ triangle de sommets a_1, a_2, a_3

ii) $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}\}$, où $a_{ij} = \dfrac{a_i + a_j}{2}$.
iii) $P = P_2$
Les fonctions de base sont $p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1)$ et $p_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j$.

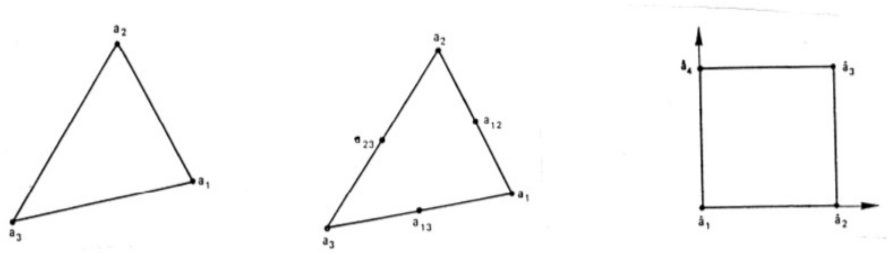


FIGURE 5.2 – Éléments finis triangulaire P_1, triangulaire P_2 et rectangulaire Q_1

5.5.4 Exemples 2-D rectangulaires

1. Élément Q_1
   i) $K =$ triangle de sommets a_1, a_2, a_3, a_4 de côtés paralléles aux axes.
   ii) $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.
   iii) $P = Q_1$
   Les fonctions de base sont $p_i(X, Y) = \dfrac{(X - x_j)(Y - y_j)}{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}$, où (x_i, y_i) sont les coordonnées (x_j, y_j) est le coin apposé à a_i.

5.5.5 Exemples 3-D

1. Élément tétraédrique P_1
   i) $K =$ tétraèdre de sommets a_1, a_2, a_3, a_4
   ii) $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
   iii) $P = P_1$
2. Élément tétraédrique P_2
   i) $K =$ tétraèdre de sommets a_1, a_2, a_3, a_4
   ii) $\{a_i\}_{1 \leq i \leq 4} \cup \{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq 4}$
   iii) $P = P_2$
   Les fonctions de base sont $p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1)$ et $p_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j$.
3. Éléments parallélépipédique Q_1
   i) $K =$ parallélépipède de sommets $a_1, ..., a_8$ de côtés parallèles aux axes
   ii) $\Sigma = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 8}$
   iii) $P = Q_1$
4. Éléments prismatique
   i) $K =$ prisme droit de sommets $a_1, ..., a_6$
   ii) $\Sigma = \{a_i\}_{1 \leq i \leq 6}$

iii) $P = \{p(X,Y,Z) = (a + bX + cY) + Z(d + eX + fY),\ a,b,c,d,e,f \in R\}$

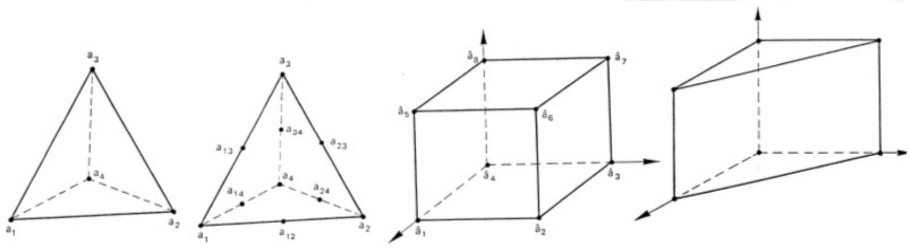


FIGURE 5.3 – Éléments finis tétraédriques P_1 et P_2, parallélépipédique Q_1, et prismatique

5.6 Famille affine d'éléments finis

Définition 5.6. *Deux éléments finis $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ et (K, Σ, P) sont affine-équivalents si il existe une fonction affine F inversible*

$$(F : \widehat{x} \to B\widehat{x} + b)$$

telle que

1. $K = F(\widehat{K})$
2. $a_i = F(\widehat{a_i}),\ i = 1, ..., N$
3. $P = \{\widehat{p} \circ F^{-1},\ \widehat{p} \in \widehat{P}\}$

Remarque 5.1. *Si l'on est dans $I\!R^n$, B est donc une matrice $n \times n$ inversible, et b est un vecteur de $I\!R^n$.*

Proposition 5.1. *Soient $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ et (K, Σ, P) deux éléments finis affine-équivalents, via une transformation F. On note $\widehat{p_i}(i = 1, ..., N)$ les fonctions de base locales de $\widehat{K}$. Alors les fonctions de base locales de K sont les $p_i = \widehat{p_i} \circ F^{-1}$.*

Définition 5.7. *On appelle famille affine d'éléments finis une famille d'éléments finis tous affine-équivalents à une même élément fini $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$, appelé élément de référence.*

D'un point de vue pratique, le fait de travailler avec une famille affine d'éléments finis permet de ramener tous les calculs d'intégrales à des calculs sur l'élément de référence.
Les éléments de référence sont :

1. En 1-D : le segment $[0, 1]$.
2. En 2-D triangulaire : le triangle unité, de sommets $(0, 0), (0, 1)$ et $(1, 0)$.
3. En 2-D rectangulaire : le carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$.
4. En 3-D tétraédrique : le tétraèdre unité, de sommets $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.
5. En 3-D parallélépipédique : le cube unité $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
6. En 3-D prismatique : le prisme unité de sommets $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$.

5.7 Éléments finis d'Hermite

5.7.1 Définition

Un élément fini d'Hermite ou élément fini général est un triplet (K, Σ, P) tel que :

1. K est un élément géométrique de R^n $(n = 1, 2$ *ou* $3)$,compact,connexe,et d'intérieur non vide.
2. $\Sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N)$ est un ensemble de N formes linéaires sur l'espace des fonctions définies sur K, ou sur un sous-espace plus régulier contenant P.
3. P est un espace vectoriel de dimension N de fonctions réelles définies sur K, et tel que Σ soit P-unisolvant.

Définition 5.8. *Soit (K, Σ, P) un élément fini général.On appelle fonctions de base locales de l'élément les N fonctions p_i $(i = 1, ..., N)$ de P telles que*

$$\sigma_j(p_i) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq N$$

Définition 5.9. *On appelle opérateur de P-interpolation sur Σ l'opérateur π_K qui à toute fonction v définie sur K associe la fonction $\pi_K v$ de P définie par*

$\pi_K v = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(v) p_i$.$\pi_K v$ est donc l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les éléments de Σ.

5.7.2 Lien avec les éléments finis de Lagrange

Avec les définitions précédentes, les éléments finis de Lagrange apparaissent donc comme un cas particulier des éléments finis généraux, pour lequel

$$\sigma_i(p) = p(a_i), 1 \leq i \leq N$$

Cette généralisation permet maintenant d'introduire des opérateurs de dérivation dans Σ, et donc d'améliorer la régularité des fonctions de V_h.

5.7.3 Exemples

5.7.3.1 Exemples 1-D

1. Élément d'Hermite cubique
   (a) K=$[a, b]$
   (b) Σ=$\{p(a), p'(a), p(b), p'(b)\}$
   (c) $P = P_3$
   Cet élément fini est C^1 et H^2.

2. Élément d'Hermite quantique
   (a) K=$[a, b]$
   (b) Σ=$\{p(a), p'(a), p"(a), p(b), p'(b), p"(b)\}$
   (c) $P = P_3$
   Cet élément fini est C^2 et H^3.

5.7.3.2 Exemples 2-D triangulaires

1. Élément d'Hermite cubique :
   (a) K=triangle de sommets a_1, a_2, a_3
   (b) Σ=$\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), i = 1, 2, 3\} \bigcup \{p(a_0)\}$
   (c) $P = P_3$
   Cet élément fini est c^0, mais pas C^1.
2. Élément d'Argyris
   (a) K=triangle de sommets a_1, a_2, a_3
   (b) Σ=$\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, 2, 3\} \bigcup \{\frac{\partial p}{\partial n}(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3\}$
   (c) P=P_5

Cet élément fini est C^1.

5.7.3.3 Exemple 2-D rectangulaire

1. Élément Q
   (a) K=rectangle de sommets a_1, a_2, a_3, a_4, de côtés parallèles aux axes
   (b) Σ=$\{p(a_i), \frac{\partial p}{\partial x}(a_i), \frac{\partial p}{\partial y}(a_i), \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(a_i), i = 1, ..., 4\}$
   (c) $P = Q_3$
   Cet élément fini est C^1.

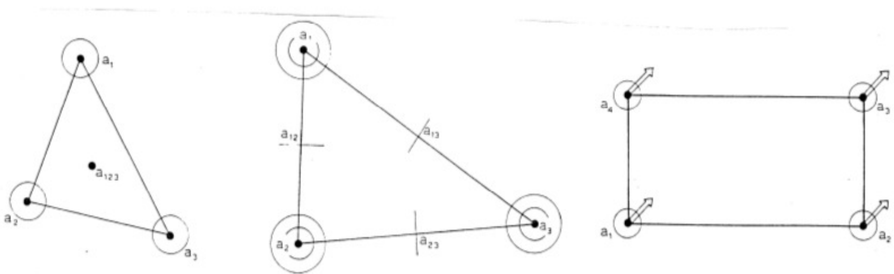


FIGURE 5.4 – Élément triangulaire d'Hermite cubique, élément d'Argyris et élément rectangulaire Q_3

5.8 Estimation d'erreur

On a :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h), \qquad \forall v_h \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \end{aligned}$$

Or $v_h - u_h \in V_h$ donc $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$.
on a donc :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h \tag{5.14}$$

a étant coercive, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \| u - u_h \|^2$$

où $\| \, . \, \|$ est une norme sur V.
Par ailleurs, a étant continue, il existe $M > 0$ tel que

$$a(u - u_h, u - v_h) \leq M \| u - u_h \| \| u - v_h \|$$

En réinjectant ces deux inégalités de part et d'autre de (5.14) et en simplifiant par $\| u - u_h \|$ on obtient

$$\| u - u_h \| \leq \frac{M}{\alpha} \| u - v_h \|, \forall v_h \in V_h$$

c'est à dire :

$$\| u - u_h \| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h)$$

où d est la distance induite par $\|.\|$. Cette majoration est appelée lemme de Céa. Elle ramène l'étude de l'erreur d'approximation $u - u_h$ à l'étude de l'erreur d'interpolation $d(u, V_h)$.

5.9 Application de la méthode des éléments finis

5.9.1 Exemple 1-D

Soit le problème

$$(P) \left\{ \begin{array}{lcl} -u"(x) + c(x)u(x) & = & f(x), a < x < b \\ u(a) = u(b) & = & 0 \end{array} \right.$$

où f et c sont des fonctions données continues sur $[a, b]$. On supposera de plus que la fonction c est strictement positive sur $[a, b]$.
En faisant le produit scalaire $L^2(]a, b[)$ de l'équation différentielle avec une fonction-test $v \in D(]a, b[)$, on a :

$$-\int_a^b u"(x)v(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx$$

par l'intégration par partie on a le système :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \forall v \in H_0^1(]a, b[)$$

On peut donc définir le nouveau problème :

$$(P') \left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u \in H_0^1(]a, b[) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \end{array} \right.$$

Ce problème est la formulation variationnelle du problème (P).
Soit :

$$a(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx$$

et

$$l(v) = \int_a^b f(x)v(x)$$

On va montrer que la forme linéaire $l(v)$ est continue :

$$\begin{array}{rcl} |l(v)| & = & |\int_a^b f(x)v(x)dx| \\ & \leq & \int_a^b |f(x)v(x)|dx, \text{ avec } f \in L^2 \\ & \leq & [\int_a^b [f(x)]^2 dx)]^{\frac{1}{2}} [\int_a^b [v(x)]^2 dx)]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq & \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ & \leq & c\|v\|_{L^2} \end{array}$$

Donc la forme linéaire $l(v)$ est continue.
Maintenant, montrons que la forme bilinéaire $a(u,v)$ est continue :

$$\begin{array}{rcl} |a(u,v)| & = & |\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx| \\ & \leq & (\int_a^b u'^2)^{\frac{1}{2}} \times (\int_a^b v'^2)^{\frac{1}{2}} + c(\int_a^b u^2)^{\frac{1}{2}} \times (\int_a^b v^2)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq & \|u'\|_{L^2} \times \|v'\|_{L^2} + c\|u\|_{L^2} \times \|v\|_{L^2} \\ & \leq & \|u\|_{H_0^1} \times \|v\|_{H_0^1} + c\|u\|_{H_0^1} \times \|v\|_{H_0^1} \\ & \leq & (1+c)\|u\|_{H_0^1} \times \|v\|_{H_0^1} \\ & \leq & c'\|u\|_{H_0^1} \times \|v\|_{H_0^1} \end{array}$$

donc $a(u,v)$ est continue.
Après on va montrer que a(u,u) est coercive :

$$\begin{array}{rcl} a(u,u) & = & \int_a^b u'(x)u'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)u(x)dx \\ & \geq & (\int_a^b u'^2) + c(\int_a^b u^2) \text{ avec } \; c = \min c(x) \\ & \geq & \alpha[\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2] \text{ avec } \; \alpha = \min\{c,1\} \\ & = & \alpha\|u\|_{H_0^1} \end{array}$$

a est une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur $H_0^1(a,b) \times H_0^1(a,b)$ et l est une forme linéaire continue sur $H_0^1(a,b)$. Donc le problème (P') admet une solution unique d'après le théorème de Lax-Milgram.
On peut maintenant construire un maillage de $[a,b]$ en définissant une subdivision (pas nécessairement régulière) $a = x_0 < x_1 < ... < x_N < x_{N+1} = b$.
Définissons alors l'espace V_h, sous-espace de $H_0^1(a,b)$ de dimension finie, par :

$$V_h = \{v_h \in C^0(a,b)/v_h \ affine \ sur \ chaque \ segment \ [x_j, x_{j+1}] et \ v_h(a) = v_h(b) = 0\}$$

Le problème approché sur V_h est :
(P'_h) Trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = l(v_h)\,;\, \forall v_h \in V_h$.
En remarquant qu'une fonction de V_h est entièrement déterminée par ses valeurs en $x_1, ..., x_N$, on établit que la dimension de V_h est N, et qu'une base de V_h est par exemple $(\varphi_1, ..., \varphi_N)$, où φ_i est définie par $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, ..., N$.
φ_i est donc la fonction "chapeau" représentée sur la figure (5.5).

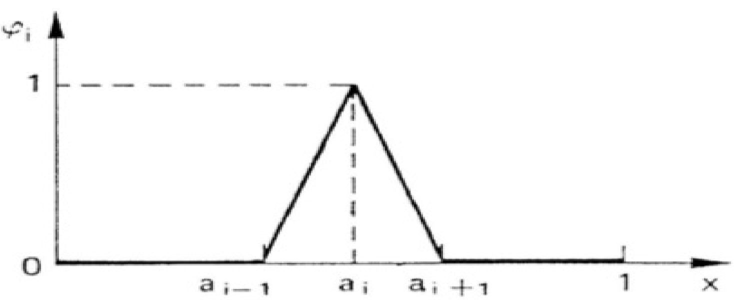


FIGURE 5.5 – Fonction de base φ_i

En décomposant la solution approchée u_h sur cette base sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \varphi_i$$

On obtient le système linéaire $A\mu = b$, avec :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (\varphi_i, \varphi_j) \\ &= \int_a^b [\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)]dx \\ &= \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)]dx \end{aligned}$$

Le support de φ_i étant réduit à $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, on déduit que

$$\begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) & = & 0 \quad si\ |i-j| \geq 2 \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) & = & \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varphi_i'(x)\varphi_{i+1}'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)]dx \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) & = & \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_i'(x)\varphi_{i-1}'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)]dx \\ a(\varphi_i, \varphi_i) & = & \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\varphi_i'^2(x) + c(x)\varphi_i^2(x)]dx \end{cases} \tag{5.15}$$

A est donc tridiagonale.

5.9.1.1 Convergence de la méthode

5.9.1.2 Lemme de Céa :

Soit $u \in V$ la solution de problème :

$$\begin{cases} Trouver\ u \in V\ telque : \\ \forall v \in V, a(u,v) = (f,v) \end{cases} \tag{5.16}$$

et $u_h \in V_h$ la solution de problème :

$$\begin{cases} Trouver\ u_h \in V_h\ telque : \\ \forall v_h \in V_h, a(u_h,v_h) = (f,v_h) \end{cases} \tag{5.17}$$

alors on a :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|,$$

où α et C sont données par :

$$\forall u \in V, a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2.$$
$$\forall u, v \in V, |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|.$$

Preuve :
Si $w_h \in V_h$,en prenant w_h comme fonction test dans (5.16) et (5.17) on obtient :

$$a(u, w_h) = (f, w_h) = a(u_h, w_h),$$

d'où, par bilinéarité de $a(.,.)$, $a(u - u_h, w_h) = 0$.
Soit $v_h \in V_h$, alors $w_h := v_h - u_h \in V_h$
donc $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$. En déduit :

$$\begin{aligned} \alpha\|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \leq C\|u - u_h\|\|u - v_h\| \end{aligned}$$

donc on a :

$$\forall v_h \in V_h, \|u - u_h\| \leq \frac{C}{\alpha}\|u - v_h\|$$

ce qui donne le résultat.

Théorème 1. *On suppose qu'il existe un sous-espace ν de V dense dans V tel qu'il existe une application linéaire r_h de ν dans V_h vérifiant*

$$\forall v \in \nu, \lim_{h\to 0} \|v - r_h v\| = 0$$

L'application r_h est appelée opérateur d'interpolation de ν sur V_h. Alors,la solution $u_h \in V_h$ de (5.17) converge vers la solution $u \in V$ de (5.16) au sens où on a :

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\| = 0$$

5.9.2 Exemple de problèmes paraboliques

5.9.2.1 Formulation variationnelle

Dans tout ce chapitre on va considérer la résolution numérique de l'équation de la chaleur[1, 14]

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u - \Delta u & = & f \text{ dans } \mathbb{R}_+^* \times \Omega \\ u & = & 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \partial\Omega, \\ u(t=0,x) & = & u_0(x) \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \tag{5.18}$$

où $f(t,.) \in L^2(\Omega)$ est le terme source et $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ la donnée initiale.
Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)$. On multiplie (5.18) par v puis on intègre sur Ω. En effectuant une intégration par parties, on aboutit à

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(t,x).\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(t,x)v(x)\,dx$$

qui a un sens pour toute fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$. On note $u(t) := u(t,x)$ de sorte que u est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $H_0^1(\Omega)$. Avec cette notation, on obtient la formulation variationnelle suivante pour (5.18).

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Trouver } u : t \in \mathbb{R}_+ \to H_0^1(\Omega) & \text{telle que} & \\ \dfrac{d}{dt}(u(t),v)_{L^2(\Omega)} + a(u(t),v) & = (f(t),v)_{L^2(\Omega)}, & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \qquad u(t=0) & = u_0 & \end{array} \right. \tag{5.19}$$

où $a(.,.)$ est la forme bilinéaire définie sur $H^1(\Omega)$ par

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx$$

Il est nécessaire de préciser la régularité de la solution en temps, pour cela on introduit des espaces de solutions prenant en compte la variable de temps et la variable d'espace.

Notation 1. *Pour $(X, \|.\|)$ un espace de Banach on note $C^k([0,T];X)$ l'espace des fonctions k-fois continûment dérivables de $[0,T]$ à valeurs dans X.*

L'espace $C^k([0,T];X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{c^k([0,T],X)} := \sum_{i=0}^{k} (\sup_{0\leq t\leq T} \| \frac{d^i v}{dt^i}(t)\|_X)$$

On note $L^2([0,T],X)$ l'espace des fonctions v telles que l'application $t \longrightarrow \|v(t)\|_X$ est de carré intégrable sur $[0,T]$, i.e.

$$\|v\|_{L^2([0,T],X)} := (\int_0^T \|v(t)\|_X^2 dt)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Muni de la norme $\|.\|_{L^2([0,T],X)}$ ainsi définie, l'espace $L^2([0,T],X)$ est un espace de Banach. De plus, si $(X,(.,.)_X)$ est un espace de Hilbert, alors $L^2([0,T],X)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_{L^2([0,T],X)} := \int_0^T (u(t),v(t))_X dt$$

En particulier, si $X = L^2(\Omega)$ on a l'identification $L^2([0,T],L^2(\Omega)) = L^2([0,T]\times\Omega)$.
Comme dans le cas des problèmes elliptiques, on va considérer un problème variationnel plus général que (5.19). Pour cela,soient $(V,(.,.)_V)$ et $(H,(.,.)_H)$ deux espaces de Hilbert réel tels que $V \subset H$. Soient $a(.,.)$ une forme bilinéaire sur V, $T > 0$, $u_0 \in H$ et $f \in L^2(]0,T[,H)$. Alors, on considère la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{cc} \text{trouver } u : t \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow V & \text{telle que} \\ \dfrac{d}{dt}(u(t),v)_H + a(u(t),v) = (f(t),v)_H, & \forall t \in]0,T[, \forall v \in V, \\ u(t=0) = u_0 & \end{array} \right. \tag{5.20}$$

5.9.2.2 Existence et unicité

Théorème 2. *Soient* $(V, (.,.)_V)$ *et* $(H, (.,.)_H)$*deux espaces de Hilbert réels tels que*

$$\begin{cases} V \subset H \text{ avec injection compacte} \\ V \text{ est dense dans} H \end{cases}$$

Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue, coercive et symétrique sur V. Soient $T > 0$, $u_0 \in H$ et $f \in L^2(]0,T[,H)$.
Alors, la formulation variationnelle (5.20) admet une unique solution

$$u \in L^2(]0,T[,V) \cap C([0,T],H)$$

De plus,il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2(]0,T[,V)} + \|u\|_{C([0,T],H)} \leq c(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(]0,T[,H)})$$

Autrement dit,le problème (5.20) est bien posé au sens d'Hadamard.

Preuve 5.1. *On donne seulement une idée de la démonstration*

Il existe une base hilbertienne $(u_k)_{k\geq}$ de H telle que, pour tout $k \geq 1$

$$u_k \in V \text{ et } a(u_k, v) = \lambda_k (u_k, v)_H, \forall v \in V$$

Pour tout $k \geq 1$, on pose

$$\alpha_k(t) := (u(t), u_k)_H \in C([0,T]), \qquad \alpha_k^0 = (u_0, u_k)_H$$

et

$$\beta_k(t) := (f(t), u_k)_H \in L^2(]0,T[)$$

D'après la notation (1), si $u(t) \in H$ pour tout $t \in [0,T]$, alors $u(t)$ admet pour décomposition

$$\forall t \in [0,T], u(t) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k(t) u_k$$

Supposons que u soit solution de (5.20). On prend pour fonction test $v = u_k$, où $k \geq 1$. Alors, on obtient

$$\frac{d}{dt}(u(t), u_k)_H + a(u(t), u_k) = (f(t), u_k)_H$$

D'après (5.18) et (5.19), on en déduit

$$\alpha_k'(t) + \lambda_k \alpha_k(t) = \beta_k(t)$$

De plus, la condition initiale de (5.20) et la notation (1) entraînent

$$\alpha_k(t = 0) = \alpha_k^0$$

Autrement dit, chaque α_k est solution d'une e.d.o. du premier ordre. On en déduit l'expression exacte de α_k :

$$\forall t \in [0,T],\ \alpha_k(t) = \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} + \int_0^t \beta_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds. \tag{5.21}$$

Ainsi, si u est solution de (5.20) alors u est donnée par (**??**) avec α_k donné par (4).
En appliquant le Théorème précédent(d'Existence et unicité) avec $H := L^2(\Omega)$, $V := H_0^1(\Omega)$ et $a(.,.)$ la forme bilinéaire définie sur V par

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u . \nabla v \ dx$$

On obtient le résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible pour l'équation de la chaleur :

Théorème 3. *Soient Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 de $I\!R^n$. Soient $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(]0,T[, L^2(\Omega))$.*

Alors,l'équation de la chaleur (5.20) admet une unique solution faible $u \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_\Omega |u(t,x)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(s,x)|^2 dx ds \leq c \left(\int_\Omega |u_0(x)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |f(s,x)|^2 dx ds \right)$$

Proposition 5.2 (Effet régularisant)**.** *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^∞ de $I\!R^d$.*
Soient $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f = 0$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, l'unique solution faible de (5.20) est de classe C^∞ en temps et en espace dans $[\epsilon, T] \times \overline{\Omega}$

5.10 Résolution numérique de l'équation de transport par éléments finis

Soit l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \forall x \in [a,b], \forall t \in]0,T[\\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \tag{5.22}$$

d'après la formulation variationnelle on à :

$$a(u,v) = -\int_a^b [c'(x)v(x) + c(x)v'(x)]u(x)dx$$

En considérant l'espace discret V_h, on obtient le problème variationnel discret suivant :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h : t \in R_+ \to V_h \qquad \textit{telleque} \\ \frac{d}{dt}(u_h(t), v_h)_H - \int_a^b [c'(x)v_h(x) + c(x)v_h'(x)]u_h(t)dx = 0, \quad \forall t \in]0,T[, \ \forall v_h \in V_h \\ u_h(t=0) = u_{0,h} \end{cases} \tag{5.23}$$

où $u_{0,h} \in V_h$ est une approximation de u_0.
Soit $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,N}$ une base de V_h. Alors, pour tout $t \in]0,T[$, $u_h(t)$ et $u_{0,h}$ admettent pour développements

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{N} U_h^j(t)\varphi_j \quad et \quad u_{0,h} = \sum_{j=1}^{N} U_{0,h}^j \varphi_j, \tag{5.24}$$

avec $U_h^j(t), U_{0,h}^j \in \mathbb{R}$ pour tout $j = 1, ..., N$.
Avec ces développements, (5.23) s'écrit

$$\begin{cases} \text{trouver } U_h^j : t \in \mathbb{R}_+ \to R \text{ et } U_{0,h}^j \in \mathbb{R}, \ j = 1, ..., N \text{ tels que} \\ \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, \varphi_i)_H \frac{dU_h^j}{dt}(t) + \sum_{j=1}^{N} \left(-\int_a^b [c'(x)\varphi_j + c(x)\varphi_j']\varphi_i dx \right) U_h^j(t) = 0, \forall t \in]0,T[, \forall\ i = 1,.,N, \\ U_h^i(t=0) = U_{0,h}^i, \forall\ i = 1, ..., N \end{cases} \tag{5.25}$$

On pose

$$U_h(t) := (U_h^1(t), ..., U_h^N(t))^T \in \mathbb{R}^N$$

Et

$$U_{0,h} := (U_{0,h}^1, ..., U_{0,h}^N)^T \in \mathbb{R}^N$$

Alors (5.25) est équivalent au système d'e.d.o.

$$\begin{cases} M_h U_h'(t) + K_h U_h(t) = 0 \quad \forall\ t \in]0,T[, \\ U_h(t=0) = U_{0,h}, \end{cases} \tag{5.26}$$

où $M_h, K_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$ sont donnés par :

$$(M_h)_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$$

et

$$(K_h)_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} [c'(x)\varphi_{i+1} + c(x)\varphi'_{i+1}]\varphi_i dx \\ a(\varphi_i, \varphi_{i-1}) = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} [c'(x)\varphi_{i-1} + c(x)\varphi'_{i-1}]\varphi_i dx \\ a(\varphi_i, \varphi_i) = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} (c'(x)\varphi_i^2 + c(x)\varphi'_i\varphi_i)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (c'(x)\varphi_i^2 + c(x)\varphi'_i\varphi_i)dx \\ 0, |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

On à :

$$\varphi_{i-1} = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-2}}{h} \text{ si } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ -\dfrac{x - x_i}{h} \text{ si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h} \text{ si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\dfrac{x - x_{i+1}}{h} \text{ si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

et

$$\varphi_{i+1} = \begin{cases} \dfrac{x - x_i}{h} \text{ si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ -\dfrac{x - x_{i+2}}{h} \text{ si } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans notre exemple :
$c(x) = x(1-x)$ alors $c^{'}(x) = 1 - 2x$
on veut calculer les coefficients de la matrice K_h

$$
\begin{aligned}
a(\varphi_i,\varphi_{i+1}) &= \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1-2x)(x-x_i)(x-x_{i+1})dx \\
&+ \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x(1-x)(x-x_{i+1})dx \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1-2x)(x^2-x_ix-x_{i+1}x+x_ix_{i+1})dx \\
&+ \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x(x-x^2-x_{i+1}+x_{i+1})dx \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[-3x^3+(2+2x_i+2x_{i+1}+x_{i-1})x^2\right]dx \\
&- \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_ix_{i+1}+x_{i-1}+2x_ix_{i+1})x+x_ix_{i+1}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(\varphi_i,\varphi_{i-1}) &= \frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[(1-2x)(x-x_i)(x-x_{i-1})+x(1-x)(x-x_{i-1})\right]dx \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[-3x^3+(2+2x_i+3x_{i-1})x^2-(2x_{i-1}+x_i+2x_ix_{i-1})x\right]dx \\
&+ \frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} x_ix_{i-1}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(\varphi_i,\varphi_i) &= -\frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[(1-2x)(x-x_{i-1})^2+x(1-x)(x-x_{i-1})\right]dx \\
&- \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x^{i+1}}\left[(1-2x)(x-x_{i+1})^2+x(1-x)(x-x_{i+1})\right]dx \\
&= \frac{-1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[(1-2x)(x-x_{i-1})+(x-x^2)\right](x-x_{i-1})dx \\
&- \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[(1-2x)(x-x_{i+1})+(x-x^2)\right](x-x_{i+1})dx
\end{aligned}
$$

Maintenant on veut calculer les coefficients de la matrice M_h

$$\begin{aligned}
(\varphi_i,\varphi_{i-1}) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i \times \varphi_{i-1} dx \\
&= -\frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_i)(x-x_{i-1})dx \\
&= -\frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} x^2 - x(x_i+x_{i-1}) + x_i x_{i-1} dx \\
&= -\frac{1}{h}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2(x_i+x_{i-1}) + x_i x_{i-1} x\right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{3}x_i^3 - \frac{1}{3}x_{i-1}^3 - \frac{1}{2}(x_i+x_{i-1})(x_i^2-x_{i-1}^2) + x_i x_{i-1}(x_i - x_{i-1})\right] \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{3}x_i^3 - \frac{1}{3}x_{i-1}^3 - \frac{1}{2}(x_i+x_{i-1})(x_i^2-x_{i-1}^2) + x_i x_{i-1}(x_i - x_{i-1})\right] \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[-\frac{1}{6}x_i^3 - \frac{1}{6}x_{i-1}^3 + \frac{1}{2}x_i x_{i-1}^2 - \frac{1}{2}x_i^2 x_{i-1} + x_i x_{i-1} h\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_i,\varphi_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i \times \varphi_{i+1} dx \\
&= \frac{-1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_{i+1})(x-x_i) \\
&= \frac{-1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} x^2 - x x_i - x x_{i+1} + x_i x_{i+1} dx \\
&= \frac{-1}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x_i x^2 - \frac{1}{2}x_{i+1}x^2 + x_i x_{i+1} x\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&= \frac{-1}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})x^2 + x_i x_{i+1} x\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&= \frac{-1}{h^2}\left[\frac{1}{3}(x_{i+1}^3 - x_i^3) - \frac{1}{2}(x_i+x_{i+1})(x_{i+1}^2 - x_i^2) + x_i x_{i+1}(x_{i+1}-x_i)\right] \\
&= \frac{-1}{h^2}\left[\frac{1}{6}x_i^3 - \frac{1}{6}x_{i+1}^3 - \frac{1}{2}x_i x_{i+1}^2 + \frac{1}{2}x_{i+1}x_i^2 + x_i x_{i+1} h\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_i,\varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^2 dx \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})^2 + \frac{1}{h^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_{i+1})^2 \\
&= \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{3}(x-x_{i-1})^3\right]_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{3}(x-x_{i+1})^3\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&= \frac{1}{3h^2}(x_i-x_{i-1})^3 - \frac{1}{3h^2}(x_i-x_{i+1})^3 \\
&= \frac{1}{3h^2}h^3 + \frac{1}{3h^2}h^3 \\
&= \frac{2}{3}h
\end{aligned}$$

Il reste maintenant à discrétiser (5.26) pour le variable en temps par un schéma aux différences finies. On suppose dans la suite $b_h \in C([0,T])$. Soient $N_T \in N$ et $\Delta t := T/N_T$.

On pose
$$\forall\ n \in \{0,...,N_T\}, \quad t_n := n\Delta t$$
On considère l'approximation U_h^n de $U_h(t_n)$ définie par le θ-schéma :
$$M_h \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} + K_h(\theta U_h^{n+1} + (1-\theta)U_h^n) = \theta b(t_{n+1}) + (1-\theta)b(t_n),$$
ce qui donne
$$(M_h + \theta\ \Delta t\ K_h)\ U_h^{n+1} = (M_h - (1-\theta)\Delta t\ K_h)\ U_h^n \tag{5.27}$$
A partir de cette équation on peut calculer la solution à chaque instant t et partout dans le domaine.

Définition 5.10. *Un schéma aux différences finies de (5.26) est dit stable s'il existe une constante $c > 0$ indépendante de Δt et h telle que*
$$\forall\ n \in \{0,...,N_T\}, \quad M_h U_h^n.U_h^n \le c$$
Lemme 1 (Stabilité du schéma)**.** . *Si $1/2 \le \theta \le 1$, le θ-schéma (5.27) est inconditionnellement stable.*

Si $0 \le \theta < 1/2$, le θ-schéma (5.27) est stable sous la condition CFL
$$\max_{1\le i\le N}(\lambda_i \Delta t) \le \frac{2}{1-2\theta}, \tag{5.28}$$
où les $\lambda_i, 1 \le i \le N$, sont les valeurs propres de $KU = \lambda MU$.

Théorème 4. *Soient Ω un ouvert polyédrique de $I\!R^d$ et $(\tau_h)_{h>0}$ une suite de maillages triangulaires réguliers de Ω.*

Soit V_{0h} l'espace de discrétisation de $H_0^1(\Omega)$ défini par la méthode des éléments finis $P_k, K \ge 1$, de dimension N. Soient $T > 0, f \in L^2(]0,1[; L^2(\Omega), u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et u l'unique solution faible de (5.18) supposée "suffisamment régulière".
Soit u_h la solution de (5.27). On suppose
$$\lim_{h\to 0} \|u_{0,h} - u_0\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$
et que h et Δt tendent vers 0 en vérifiant (5.28) si $0 \le \theta \le 1/2$. Alors, on a
$$\lim_{h\to 0, \Delta t\to 0}\ \max_{0\le n\le N_T} \|u(t_n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Conclusion

La modélisation des problèmes réels en mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, chimie, médecine, acoustique, etc., est écrite sous une forme d'Équations Différentielles Ordinaires ou par des Équations aux Dérivées Partielles. Pour résoudre ce type d'équation il y a plusieurs méthodes à utiliser, on a choisit dans ce document d'en présenter quelques unes. Dans le premier chapitre, on a présente un rappel sur l'analyse vectorielle et la classification des équations aux Dérivées Partielles. Ensuite, on a expliquée la méthode des caractéristiques et on l'a appliquée sur les équations aux dérivées partielles et en particulier les EDPs d'ordre un et deux dans $\mathbb{R}^2$.
Dans le troisième chapitre, on a présenté la méthode de séparation des variables et on l'a appliquée sur l'équation de la chaleur, l'équation des ondes et l'équation de Laplace et au quatrième chapitre, on a expliquée la méthode des différences finies et on l'a appliquée sur les trois types d'équations aux Dérivées partielles elliptique, parabolique et hyperbolique en dimension un et deux.
A la fin, le cinquième chapitre est dédié à la méthode des différences finis appliquer sur les trois types d'équations aux Dérivées partielles elliptique, parabolique et hyperbolique en dimension un et deux.

Bibliographie

[1] B.Helffer. Cours edp-roumanie-2014, introduction aux équations aux dérivées partielles, analyse de fourier et introduction aux distributions. *Université Paris sud, version pour la Roumanie*, Février 2014.

[2] Kurt Bryan. Taylor's theorem in one and several variables.

[3] Robert Bédard. Équations aux dérivées partielles. *L'université du Québec à Montréal*, Mai 2003.

[4] C.A.Stuart. Notes of the cours of separation method , laboratory for computation and visualization of mathematics and mechanics.

[5] Nicolas Champagnat. Différences finies et analyse numérique matricielle : cours d'harmonisation en imafa. 15 octobre 2010.

[6] Aude Rondepierre et Adeline Rouchon. Introduction aux Équations aux dérivées partielles,Étude théorique. *Département STPI, INSA Toulouse*, 2012-2013.

[7] Nelly Point et Jacques-Hervé SAIAC. Équations aux dérivées partielles. mathématiques et méthodes numériques. g.m.2 - second cycle. *E.S.C.P.I*, Mai 2008.

[8] Daniel Fredon et Michel Bridier. Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur. *Dunod, 20 rue des Grands Augustins, 75006 Paris*, 2003.

[9] Curtis F. Gerald et Patrick O. Wheatley. Applied numerical analysis. *3 éme édition. Addison-Wesley Publishing Company. Département de Mathématiques FST-Mohammedia*, 2008.

[10] Claire David et Pierre Gosselet. Équations aux dérivées partielles,cours et exercices corrigés. *2éme édition. Dunod,5 rue Laromiguière, 75005 Paris*, 2015.

[11] Jean Michel Bony et Yuon Martel. Analyse de fourier, analyse spectrale et équations aux dérivées partielles. 2012.

[12] Raphaéle Herbin. Edp matrice, analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Décembre 2008.

[13] Risser Laurent. Différences finies pour la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides. 4 février 2006.

[14] A. Lesfari. Introduction aux équations aux dérivées partielles (edp). *2 éme édition*, 2014-2017.

[15] David Manceau. Résolution pratique des équations aux dérivées partielles. *2 éme édition*, 2010.

[16] Brachet Matthieu. Introduction à l'approximation des équations aux dérivée partielles, les différences finies. 15 décembre 2014.

[17] Xuân Meyer. MathÉmatiques appliquÉes Équations aux dérivées partielles. cours et exercices corrigés. *INPT-ENSIACET, 118 route de Narbonne 31077 Toulouse cedex 4*, Avril 2005.

[18] Tahar Abbes Miloud. Méthodes numériques méthode intégrales et variationnelles. 2007.

[19] Hervé Reinhard. Équations aux dérivées partielles,introduction. *Dunod, 20 rue des Grands Augustins, 75006 Paris*, 2001.

[20] Eric Goncalvés De Silva. Méthode et analyse numérique. 18 Jan 2011.

[21] Marie Héléne vignal. Cours elliptique, approximations des équations aux dérivées partielles, 24h de cours, 24h de td. *Paul Sabitier, UPS.*