RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE
& POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN-TIARET

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES
ET DE L'INFORMATIQUE

Equations et systèmes différentiels

$3^{ème}$ Année Mathématiques

Réalisé par

Dr. **Maazouz Kadda**

Expertisé par :

Pr. **Hedia Benaouda** - Université Ibn Khaldoun, Tiaret.

Dr. **Souid Mohamed Said** - Université Ibn Khaldoun, Tiaret.

Table des matières

Introduction

La notion d'équation différentielle apparaît chez les mathématiciens à la fin du 17 ème siècle. A cette époque, les équations différentielles s'introduisent en mathématiques par les problèmes d'origine mécanique par exemple : Mouvement du pendule circulaire, problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement ; suivant la loi de la gravitation newtonnienne, problème de l'étude de mouvement de corps élastiques (tiges, ressorts, cordes vibrantes), problème de l'équation de la courbe décrivant la forme prise par une corde suspendue aux deux extrémités et soumise à son propre poids. Quelques notions acquises dans les années antérieures ont été utilisées, cependant je me suis efforcé de limiter au maximum les rappels, afin de ne pas rompre une cohésion indispensable à l'eficacité.

Ce polycopié comprend cinq chapitres, le premier est consacré aux notions fondamentales ainsi quelques types du premier ordre soit linéaires soit non linéaires. Deuxième chapitre traite des équations différentielles d'ordre deux, le troisième chapitre étudie les équations différentielles d'un coté théorique en introduisant le problème de Cauchy ou problème de condition initiale. Le quatrième envisage les systèmes différentiels linéaires et non linéaires en introduisant les notions de l'exponentielle d'une matrice et la notion de la résolvante. le dernier chapitre envisage quelques types de stabilité pour les systèmes autonomes et systèmes linéaires.

Ce polycopié comprend un grand nombre d'exemples illustrant en détail les nouveaux concepts et résultats. Il contient également des exercices à la fin de chaque chapitre avec des niveaux de difficultés variables.

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la 3 année licence " Mathématiques générales".

Chapitre 1

Equations différentielles du premier ordre

Définition 1.1 *On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante x, la fonction inconnue y et ses dérivées, y', y'', $\cdots$, $y^{(n)}$.*
On peut écrire symboliquement une équation différentielle comme suit :

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

Définition 1.2 *On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus elevée contenue dans cette équation différentielle.*

Exemple :
$F(x, y, y') = 0$ est une ED d'ordre 1.
$F(x, y, y', y'') = 0$ est une ED d'ordre 2.
$yy'' = x - x^2y' = 0$ est une ED d'ordre 2.
$x' - tx + t^2 = 1$ est une ED d'ordre 1.

Définition 1.3 *On appelle solution ou intégrale d'une équation différentielle toute fonction y vérifiant identiquement cette équation différentielle.*

Définition 1.4 *La courbe représentative de la solution (intégrale) d'une équation différentielle est appelée courbe intégrale.*

Remarque 1.1 *Résoudre ou intégrer une équation différentielle, il consiste à trouver toutes les solutions de cette équation différentielle.*

1.1 EDs du premier ordre

Les équations différentielles du premier ordre (d'ordre un) sont de la forme :

$$F(x, y, y') = 0.$$

1.1.1 EDs à variables séparables

Définition 1.5 *On appelle une équation différentielle à variables séparables toute équation de la forme :*

$$f(y)y' = g(x). \tag{1.1}$$

où f et g sont deux fonctions numériques définies et continues respectivement sur I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2 *L'équation (1.1) peut s'ecrire aussi sous la forme*

$$f(y)dy = g(x)dx.$$

Les solutions de l'équation (1.1) sont définies par :

$$\int f(y)dy = \int f(x)dx + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.1 *Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :*

$$x^2y' - y^2 = 0.$$

Il évident que $y = 0$ est une soution, pour $y \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
x^2y' - y^2 = 0 &\iff \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^2} \\
&\iff \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \\
&\iff -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{1}{y} = \frac{1-cx}{x}, \qquad c \in \mathbb{R} \\
&\iff y = \frac{x}{1-cx} \qquad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble S des solutions est

$$S = \{y = 0 \quad ou \quad y = \frac{x}{1-cx}, \qquad c \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 1.2 *Résoudre l'équation :*

$$x^2y' = e^y.$$

Pour $x \neq 0$ *nous avons*

$$\begin{aligned} x^2y' = e^y &\iff \frac{y'}{e^y} = \frac{1}{x^2} \\ &\iff \frac{dy}{e^y} = \frac{dx}{x^2} \\ &\iff e^{-y}dy = \frac{dx}{x} \\ &\iff -e^{-y} = -\frac{1}{x} + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ &\iff e^{-y} = \frac{1}{x} - c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ &\iff -y = \ln\Big(\frac{1}{x} - c\Big), \qquad c \in \mathbb{R} \\ &\iff y = \ln\Big(\frac{x}{1-cx}\Big), \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.1.2 EDs homogènes :

Définition 1.6 (*fonctions homogènes*)
Une fonction $f(x,y)$ *est dite homogène de ses arguments de degré* n *si elle vérifie l'identité*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n = f(x,y)$$

Exemple 1.3 *Montrons que* $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ *est une fonction homogène :*
En effet pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) \\ &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 xy \\ &= \lambda^2(x^2 + y^2 + xy) \\ &= \lambda^2 f(x,y) \end{aligned}$$

Donc f *est une fonction homogène d'ordre 2.*

Exemple 1.4 *Montrons que* $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ *est une fonction homogène :*
En effet pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ &= f(x,y) \end{aligned}$$

Donc f *est une fonction homogène d'ordre 0.*

Définition 1.7 (*ED homogène*)
Une équation différentielle de la forme $y' = f(x,y)$ *est dite homogène lorsque la fonction* $f(x,y)$ *est homogène de degré zéro.*

Remarque 1.3 *Une équation différentielle homogène peut se mettre toujours sous la forme :*

$$y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

1.1.3 La résolution d'une équation différentielle homogène :

Soit l'équation différentielle homogène :

$$y' = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big) \qquad (*).$$

Posons $\dfrac{y}{x} = u$, donc $y = ux \Longleftrightarrow y' = xu' + u$ alors

$$\begin{aligned} (*) &\Longleftrightarrow xu' + u = f(u) \\ &\Longleftrightarrow xu' = f(u) - u \\ &\Longleftrightarrow \frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x} \\ &\Longleftrightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \\ &\Longleftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation (*) sont définies par :

$$y = xu, \quad \text{et} \qquad x = ke^{\displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.5 *Réoudre l'équation suivante*

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y \qquad (**).$$

En effet pour $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} (**) &\Longleftrightarrow y' = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \\ &\Longleftrightarrow y' = \sqrt{1 - \Big(\frac{y}{x}\Big)^2} + \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Posons $\dfrac{y}{x} = u$, donc $y' = xu' + u$, alors

$$\begin{aligned} (**) &\Longleftrightarrow xu' + u = \sqrt{1 - u^2} + u \\ &\Longleftrightarrow xu' = \sqrt{1 - u^2} \\ &\Longleftrightarrow \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{x} \\ &\Longleftrightarrow \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x} \\ &\Longleftrightarrow \arcsin u = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow u = \sin\Big(\ln|x| + c\Big), \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow y = x\sin\Big(\ln|x| + c\Big), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple 1.6 *Intégrer l'équation*

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \qquad (***).$$

$$\begin{aligned}(***) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2y' = \frac{y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy}\\ &\Longleftrightarrow \quad 2y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.\end{aligned}$$

Posons $\frac{y}{x} = u$, *donc* $y' = xu' + u$, *alors*

$$\begin{aligned}(***) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2xu' + 2u = u - \frac{1}{u}\\ &\Longleftrightarrow \quad 2xu' = -\frac{u^2+1}{u}\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2uu'}{1+u^2} = -\frac{1}{x}\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2udu}{1+u^2} = -\frac{dx}{x}\\ &\Longleftrightarrow \quad \ln(1+u^2) = -\ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}\\ &\Longleftrightarrow \quad 1 + u^2 = e^{-\ln|x|+c}, \quad c \in \mathbb{R}\\ &\Longleftrightarrow \quad u^2 = \frac{k}{x} - 1, \quad k \in \mathbb{R}\\ &\Longleftrightarrow \quad y^2 = kx - x^2, \quad k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

1.1.4 EDs se ramenant aux équations homogènes

Considérons une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\Big) \qquad (*)$$

où a, a', b, b', c, c', sont des constantes réelles et f est une fonction continue.
1. Si $c = c' = 0$ l'équation $(*)$ est homogène.
2. Lorsque l'un au moins des nombres c, c' est différent de zéro, il convient de distinguer deux cas :
2.1 Le déterminant $\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0.$
En introduisant les nouvelles variables α et β définies par les formules :

$$\begin{cases} x = \alpha + k \\ y = \beta + l \end{cases}$$

où k et l sont pour l'instant des constantes indéterminées. Alors

$$(*) \Longleftrightarrow \frac{d\beta}{d\alpha} = f\Big(\frac{a\alpha + b\beta + ak + bl + c}{a'\alpha + b'\beta + a'k + b'l + c'}\Big)$$

En choisissant k et l comme solution du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ak+bl+c=0 \\ a'k+b'l+c'=0. \end{cases} \qquad (\triangle \neq 0)$$

On obtient une équation différentielle homogène

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = f\Big(\frac{a\alpha+b\beta}{a'\alpha+b'\beta}\Big).$$

En cherchant son intégrale générale et en y remplaçant α par $(x-k)$ et β par $(y-l)$ on obtient l'intégrale générale de $(*)$

2.2 Le déterminant $\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, dans ce cas il existe un réel λ tel que

$$a' = \lambda a, \qquad b' = \lambda b$$

$$(*) \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c'}\Big)$$

la substitution $z = ax+by$ se ramène cette équation à une équation différentielle à variables séparables.

Exemple 1.7 *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$(x+y-2)dx+(x-y+4)dy = 0 \qquad (*).$$

Considérant le système linéaire

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases},$$

Le déterminant de ce système est

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Alors le système admet une solution unique $(k,l) = (-1,3)$, *en faisant le changement de variables*

$$x = \alpha - 1, \qquad y = \beta + 3.$$

On obtient

$$\begin{cases} x+y-2 = \alpha+\beta \\ x-y+4 = \alpha-\beta \\ dx = d\alpha \\ dy = d\beta, \end{cases}$$

et l'équation $(*)$ *devient*

$$(\alpha+\beta)d\alpha + (\alpha-\beta)d\beta = 0,$$

est une équation homogène. En posant $\beta = t\alpha$, *on obtient*

$$(\alpha+t\alpha)d\alpha + (\alpha-t\alpha)(\alpha dt + td\alpha) = 0$$

d'où (aprés des simplifications)

$$(1+2t-t^2)d\alpha + \alpha(1-t)dt = 0$$

séparons les variables

$$\frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{(1-t)dt}{1+2t-t^2} = 0$$

on intègre il vient

$$\ln|\alpha| + \frac{1}{2}\ln|1+2t-t^2| = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

où

$$\alpha^2(1+2t-t^2) = k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

revenons aux variables x, y :

$$(x+y)^2\left[1+\frac{2(y-3)}{x+1} - \frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right] = k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$x^2+2xy-y^2-4x+8y = c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.8 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0 \qquad (**).$$

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases},$$

on a donc $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Posons $z = x+y, \qquad dz = dx+dy.$

$$\begin{aligned} (**) \quad &\Longleftrightarrow \quad (z+1)dx + (2z-1)(dz-dx) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (-z+2)dx + (2z-1)dz = 0. \end{aligned}$$

En séparant les variables, on obtient

$$dx - \frac{2z-1}{z-2}dz = 0$$

d'où

$$x - 2z - 3\ln|z-2| = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

En revenant aux variables x, y on obtient l'intégrale générale de (**)

$$x + 2y + 3\ln|x+y-2| = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

1.2 Equations différentielles non linéaires

1.2.1 Equation de Bernoulli

Ce sont des équations du premier ordre qui peuvent se ramener à une équation linéaire.

Définition 1.8 *On appelle équation de Bernoulli une équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :*

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)y^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}^* - 1$$

où a, b, et f sont des fonctions continues sur un intervalle I et $a(x) \neq 0$ sur I.

Méthode de résolution : En divisant par y^{α} on obtient :

$$a(x)y'y^{-\alpha} + b(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

le changement de fonction défini par $z = y^{1-\alpha}$ conduit à une équation linéaire.
En effet

$$z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$$

d'où

$$\frac{z'}{1-\alpha}a(x) + b(x)z = f(x)$$

ou encore

$$a(x)z' + (1-\alpha)b(x)z = (1-\alpha)f(x)$$

Exemple : Intégrer l'équation ($y \neq 0$)

$$y - xy' = 2xy^2. \tag{1.2}$$

En divisant (1.2) par y^2 on obtient :

$$\frac{1}{y} - x\frac{y'}{y^2} = 2x$$

en posant $z = \dfrac{1}{y}$ soit $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$ équation (1.2) devient :

$$z + xz' = 2x$$

équation linéaire admettant $z = x$ pour solution particulière. l'équation homogène associée peut s'écrire

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

et admet pour intégrale générale $z = \dfrac{c}{x}$ d'où $z = x + \dfrac{c}{x}$ $\quad c \in \mathbb{R}$
et par conséquent

$$y = \frac{1}{x + \frac{c}{x}} = \frac{x}{x^2 + c} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Equation de Riccati

Ce sont des équations de Bernoulli avec $\alpha = 2$ et second membre.

Définition 1.9 *On appelle équation de Riccati une équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où a, b, et c sont des fonctions continues sur un intervalle I et $a(x) \neq 0$ sur I.

Méthodes de résolution :
Méthode 1 : (Transformons l'équation de Riccati à une équation de Bernoulli)
Soit l'équation de Riccati

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 = f(x), \qquad (*).$$

Soit y_p une solution particulière de l'équation $(*)$, posons $y = y_p + z$, donc $y' = y_p' + z'$, alors la détermination de y revient à déterminer z en effet

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Longleftrightarrow \quad a(y_p' + z') + b(y_p + z) + c(y_p + z)^2 = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad ay_p' + by_p + cy_p^2 + az' + bz + c(z^2 + 2y_p z) = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad (ay_p' + by_p + cy_p^2) + az' + (b + 2cy_p)z + cz^2 = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad az' + (b + 2cy_p)z + cz^2 = 0.
\end{aligned}$$

En résolvant cette dernière équation (une équation de Bernoulli), on obtient z et par conséquent la solution y de l'équation $(*)$ de Riccati.
Méthode 2 : (Transformons l'équation de Riccati à une équation linéaire)
Soit l'équation de Riccati

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 = f(x), \qquad (*).$$

Soit y_p une solution particulière de l'équation $(*)$, posons $y = y_p + \frac{1}{z}$, donc $y' = y_p' - \frac{z'}{z^2}$, alors la détermination de y revient à déterminer z en effet

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\Longleftrightarrow \quad a\Big(y_p' - \frac{z'}{z^2}\Big) + b\Big(y_p + \frac{1}{z}\Big) + c\Big(y_p + \frac{1}{z}\Big)^2 = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad ay_p' - a\frac{z'}{z^2} + by_p + \frac{b}{z} + c\Big(y_p^2 + 2\frac{y_p}{z} + \frac{1}{z^2}\Big) = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(ay_p' + by_p + cy_p^2\big) - \frac{az'}{z^2} + \frac{b}{z} + 2c\frac{y_p}{z} + \frac{c}{z^2} = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{az'}{z^2} + (b + 2cy_p)\frac{1}{z} + \frac{c}{z^2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad az' - \big(b + 2cy_p\big) - c = 0.
\end{aligned}$$

En résolvant cette dernière équation (une équation linéaire de premier ordre), on obtient z et par conséquent la solution y de l'équation $(*)$ de Riccati.
Exemple : Intégrer l'équation

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1. \tag{1.3}$$

Il est facile de vérifier que $y_p = x$ est une solution particulière de (1.3).
En posant $y = x + z$ donc $y' = 1 + z'$,

$$(1.3) \Longleftrightarrow 1 + z' = (x+z)^2 - 2x(x+z) + x^2 + 1$$

soit après simplification : $z' = z^2$

$$\begin{aligned} z' = z^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{z'}{z^2} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{z}\right)' = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{z} = -x + c \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc l'intégrale générale de (1.3) est :

$$y = x - \frac{1}{x-c} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

1.2.3 Equation de Lagrange

Définition 1.10 *L'équation de Lagrange est une équation de la forme*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \qquad (*).$$

Méthode de résolution :
On pose $y' = p$, en dérivant les deux membres de l'équation $(*)$ et en prenant compte que $dy = pdx$, l'équation $(*)$ devient linéaire parraport à x.

$$(*) \Longleftrightarrow pdx = \varphi(p)dx + \big[x\varphi'(p) + \psi'(p)\big]dp, \qquad (**)$$

Si $p \neq \varphi(p)$, alors d'aprés les équations $(*)$ et $(**)$ on déduit la solution générale sous forme paramétrique

$$\begin{cases} x = cf(p) + g(p) \\ y = \big[cf(p) + g(p)\big]\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$$

où p est un paramètre et $f(p)$, $g(p)$ sont des fonctions continues, en outre il peut exister une solution singulière.

Exemple 1.9 *Intégrer l'équation différentielle de Lagrange :*

$$y = -xy' - \ln y' \qquad (1).$$

Dérivons chaque membre de l'équation (1) *et posons* $t = y'$, *donc* $t' = y''$

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Longleftrightarrow \quad y' = -xy'' - y' - \frac{y''}{y'} \\ &\Longleftrightarrow \quad -2y' - \left(x + \frac{1}{y'}\right)y'' = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{t}\right)t' + 2t = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{dx} + 2t = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{1}{t}\right) + 2t\frac{dx}{dt} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2t\frac{dx}{dt} + x = -\frac{1}{t} \qquad (2). \end{aligned}$$

Soit l'équation homogène $2t\dfrac{dx}{dt}+x=0$ *associée à l'équation* (2)

$$\begin{aligned} 2t\frac{dx}{dt}+x=0 &\iff \frac{dx}{x}=-\frac{dt}{2t} \quad et \quad x=0 \\ &\iff \ln|x|=-\ln|\sqrt{t}|+c, \quad et \quad x=0 \qquad c\in\mathbb{R} \\ &\iff x=\frac{k}{\sqrt{t}} \qquad k\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cherchons maintenant une solution particulière x_p *de l'équation* (2), *en appliquant la méthode de la variation de la constante on pose* $x_p(t)=\dfrac{k(t)}{\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned} (2) &\iff 2tx_p'+x_p=-\frac{1}{t} \\ &\iff 2t\left(\frac{k'(t)}{\sqrt{t}}-\frac{k(t)}{2\sqrt{t^3}}\right)+\frac{k(t)}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{t} \\ &\iff 2t\frac{k'(t)}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{t} \\ &\iff k'(t)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \\ &\iff k(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Donc $x_p(t)=\dfrac{1}{t}$ *et la solution générale de l'équation* (2) *est donnée par*

$$x(t)=\frac{k\sqrt{t}+1}{t} \qquad k\in\mathbb{R}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} (1) &\iff y(t)=-xt-\ln t \\ &\iff y(t)=-\Big(\frac{k\sqrt{t}+1}{t}\Big)t-\ln t, \qquad k\in\mathbb{R} \\ &\iff y(t)=-k\sqrt{t}-1-\ln t, \qquad k\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

par conséquent la solution de l'équation (1) *de Lagrange est donnée par la paramétrisation*

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{k\sqrt{t}+1}{t} \\ y(t)=-k\sqrt{t}-1-\ln t. \end{cases} \qquad k\in\mathbb{R}.$$

1.2.4 Equation de Clairaut

L'équation de Clairaut est une équation de la forme

$$y=xy'+\psi(y'), \qquad (*)$$

sa solution générale est donnée par la forme

$$y = x + \psi(c), \quad c \in \mathbb{R}$$

(famille de droites), en outre il existe une solution singulière obtenue en éléminant le paramètre p entre les deux équations du système

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = px + \psi(p). \end{cases}$$

Exemple 1.10 *Intégrer l'équation différentielle de Clairaut :*

$$y = xy' + y' \ln y.' \qquad (2)$$

Dérivons chaque membre de l'équation (2), *en posant* $y' = t$ *on a :*

$$\begin{aligned} (2) \quad &\Longleftrightarrow \quad y' = y' + xy'' + y'' \ln y' + y' \frac{y''}{y'} \\ &\Longleftrightarrow \quad (x + \ln y' + 1)y'' = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x + \ln t + 1)t' \\ &\Longleftrightarrow \quad x + \ln t + 1 = 0, \quad ou \quad t' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t' = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad t = c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = cx + c \ln c, \qquad c \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

(*Courbes intégrales représentées par une famille de droites.*)

$$\begin{aligned} x + \ln t + 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = -1 - \ln t \\ &\Longleftrightarrow \quad y = -(1 + \ln t)t + t \ln t \\ &\Longleftrightarrow \quad y = -t. \end{aligned}$$

Donc le système

$$\begin{cases} x(t) = -1 - \ln t \\ y(t) = -t \end{cases} \qquad (*)$$

est la paramétrisation d'une courbe (*qui est l'enveloppe d'une famille de droites*) *de l'intégrale singulière de l'équation de Clairaut qui peut se mettre sous la forme* $y = -e^{-x-1}$.
En effet

$$\begin{aligned} (*) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \ln t = -1 - x \\ y(t) = -t \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t = e^{-1-x} \\ y(t) = -e^{-1-x}. \end{cases} \end{aligned}$$

1.3 Equations aux différentielles totales

Définition 1.11 *L'équation différentielle*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (*)$$

est appelée équation aux différentielles totales si $M(x,y)$ et $M(x,y)$ sont des fonctions continues et dérivables telles que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ sont contenues dans un certain domaine.

Exemple 1.11 *Résoudre l'équation suivante :*

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0. \qquad (1)$$

En posant $M(x,y) = x^3 + xy^2$ et $N(x,y) = x^2y + y^3$ on obtient

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \quad et \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Donc l'équation est une équation aux différentielles totales. Alors

$$\begin{aligned} M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad &\Longleftrightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)dx \\ &\Longleftrightarrow \quad u(x,y) = \int (x^3 + xy^2)dx + \varphi(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y). \end{aligned}$$

En dérivant $u(x,y)$ par rapport à y

$$\begin{aligned} N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2y + y^3 = \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2y + y^3 = x^2y + \varphi'(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi'(y) = y^3 \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(y) = \frac{y^4}{4} + c_0, \qquad c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

et par conséquent on obtient

$$u(x,y) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4) + \frac{1}{2}x^2y^2 + c_0, \qquad c_0 \in \mathbb{R}$$

et par suite la solution générale de l'équation (1) est donnée par

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.12 *Résoudre l'équation suivante :*

$$x(2x^2+y^2)+y(x^2+y^2)y'=0. \qquad (2)$$

En posant $M(x,y)=2x^3+xy^2$ *et* $N(x,y)=x^2y+y^3$ *on obtient*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2xy \quad et \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Donc (2) *est une équation aux différentielles totales. Alors*

$$\begin{aligned} N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y} &\iff u(x,y)=\int N(x,y)dy \\ &\iff u(x,y)=\int (x^2y+2y^3)dy+\varphi(x) \\ &\iff u(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2y^2+y^4\right)+\varphi(x). \end{aligned}$$

En dérivant $u(x,y)$ *par rapport à* x

$$\begin{aligned} M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x} &\iff xy^2=\frac{\partial u}{\partial x} \\ &\iff x^2y+y^3=xy^2+\varphi'(x) \\ &\iff \varphi'(x)=y^3 \\ &\iff \varphi(x)=\frac{y^4}{4}+c_0, \qquad c_0\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

par conséquent on obtient

$$u(x,y)=\frac{1}{4}(x^4+y^4)+\frac{1}{2}x^2y^2+c_0, \qquad c_0\in\mathbb{R}$$

et par suite la solution générale de l'équation (2) *est donnée par*

$$x^4+y^4+2x^2y^2=c \qquad c\in\mathbb{R}.$$

Exemple 1.13 *Résoudre l'équation suivante :*

$$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0. \qquad (3)$$

En posant $M(x,y)=\dfrac{2x}{y^3}$ *et* $N(x,y)=\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}$ *on obtient*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-6x}{y^4} \quad et \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-6x}{y^4} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Donc (3) *est une équation aux différentielles totales.*
Alors

$$\begin{aligned} M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad &\Longleftrightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)dx \\ &\Longleftrightarrow \quad u(x,y) = \int \frac{2x}{y^3}dx + \varphi(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y). \end{aligned}$$

En dérivant $u(x,y)$ *par rapport à* y

$$\begin{aligned} N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} = \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} = \frac{-3x^2}{y^4} + \varphi'(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi'(y) = \frac{1}{y^4} \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + c_0, \qquad c_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par conséquent on obtient

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + c_0, \qquad c_0 \in \mathbb{R}$$

et par suite la solution générale de l'équation (3) *est donnée par*

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

1.3.1 Facteur intégrant

Exemple 1.14 Exemple illustratif :
L'équation différentielle

$$ydx - xdy = 0, \quad (*)$$

n'est pas totale (exacte), mais lorsque l'on multiplie par $\frac{1}{y^2}$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$$

on obtient une équation totale qui a pour solution

$$\frac{x}{y} = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Si on multiplie $(*)$ *par* $\dfrac{1}{xy}$ *alors* $(*)$ *devient*

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

qui est une équation totale, et admet pour solution

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

qui peut être transformée à la solution trouvée précédemment.

Définition 1.12 (*Facteur intégrant*)
Supposons que le premier membre de l'équation

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.4}$$

ne soit pas une différentielle totale .
Si on multiplie (1.4) par une certaine fonction $\varphi(x,y)$ *telle que*

$$\varphi M(x,y)dx + \varphi N(x,y)dy = 0 \tag{1.5}$$

devienne une équation aux différentielles totales, on dit que φ *est un facteur intégrant.*

Remarque :
Une équation $Mdx + Ndy = 0$ (non totale) peut admettre une infinité de facteurs intégrants comme le montre l'exemple illustratif 1.14 .

Détermination d'un facteur intégrant
Pour que l'équation (1.5) soit une équation aux différentielles totales il est nécessaire et suffisant que l'on ait :

$$\frac{\partial(\varphi M)}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi N)}{\partial x} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
(1.6) \quad &\Longleftrightarrow \quad M\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial N}{\partial x} \\
&\Longleftrightarrow \quad M\frac{\partial\varphi}{\partial y} - N\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{M\frac{\partial\varphi}{\partial y} - N\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\varphi} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \\
&\Longleftrightarrow \quad M\frac{\partial\log\varphi}{\partial y} - N\frac{\partial\log\varphi}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

(1.7) est une équation aux dérivées partielles de fonction inconnue φ dépendant de deux variables x et y, la résolution de cette équation dans le cas général n'est pas toujours facile, mais il y a des cas particuliers où l'on arrive à déterminer φ.

① φ **dépendant seulement de** y **:**
On a

$$(1.7) \iff M\frac{d\log\varphi}{dy} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\iff \frac{d\log\varphi}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \qquad (5)$$

d'où l'on détermine $\log\varphi$ donc φ.

Remarque Il est évident que l'on ne peut procéder ainsi que si l'expression $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ne dépend pas de x.

② φ **dépendant seulement de** x **:**
D'une manière analogue à celle du cas précédent si l'expression $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ ne dépend pas de y. Alors

$$N\frac{d\log\varphi}{dx} = -\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{d\log\varphi}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (6)$$

d'où on peut déterminer $\log\varphi$ et par la suite on détermine φ.

Exemple 1.15 *Résoudre l'équation suivante en déterminant un facteur intégrant*

$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0. \tag{1.8}$$

Soit $M(x, y) = x + y^2$, *et* $N(x, y) = -2xy$,
on a $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -2y$. *Comme* $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ *alors l'équation (1.8) n'est pas exacte. Cherchons maintenant un facteur intégrant en calculant*

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

Donc

$$\frac{d\log\varphi}{dx} = -\frac{2}{x} \Longrightarrow \log\varphi(x) = -2\ln|x| \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{x^2}.$$

L'équation

$$\frac{x + y^2}{x^2}dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0$$

est une équation aux différentielles totales son intégrale générale est

$$x = ce^{\frac{y^2}{x}}, \qquad c = Const.$$

Exemple 1.16 *Résoudre l'équation*

$$(y + xy^2)dx - xdy = 0. \tag{1.9}$$

En posant $M(x,y) = y + xy^2$, *et* $N(x,y) = -x$
on obtient $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$, *l'équation (1.9) n'est pas totale, cherchons un facteur intégrant.*

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-2-2xy}{y+xy^2} = \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy} = -\frac{2}{y}$$

on conclut que

$$\frac{d\log\varphi}{dx} = -\frac{2}{y} \Longrightarrow \log\varphi(y) = -2\ln|y| \Longrightarrow \varphi(y) = \frac{1}{y^2}.$$

On obtient après la multiplication par $\frac{1}{y^2}$

$$(\frac{1}{y} + x)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

est une équation aux différentielles totales son intégrale générale est

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + c = 0 \qquad c = Const$$

ou

$$y = \frac{-2x}{x^2+2c}, \qquad c = Const.$$

Exemple 1.17 *Intégrer l'équation*

$$(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0,$$

sachant qu'elle admet un facteur intégrant dépend de $x + y^2$.

Posons

$$M(x,y) = 3x + 2y + y^2, \qquad N(x,y) = x + 4xy + 5y^2.$$

On a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 4y.$$

En posant $t = x + y^2$, alors $u = \varphi(t)$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln u}{\partial x} &= \frac{\partial \ln u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \\ &= \frac{d\ln u}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln u}{\partial y} &= \frac{\partial \ln u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} \\ &= 2y\frac{d\ln u}{dt}\end{aligned}$$

donc

$$N\frac{\partial \ln u}{\partial x} - M\frac{\partial \ln u}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

devient

$$(N-2yM)\frac{d\ln u}{dt}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$

d'où

$$\frac{d\ln u}{dt}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-2yM}.$$

Puisque

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=1-2y$$

et

$$\begin{aligned}N-2yM &= x-2xy+y^2-2y^3\\ &= x(1-2y)+y^2(1-2y)\\ &= (1-2y)(x+y^2).\end{aligned}$$

On a :

$$\frac{d\ln u}{dt}=\frac{1}{x+y^2}=\frac{1}{t}$$

$$\ln u=\ln|t| \Longleftrightarrow u=t=x+y^2.$$

1.4 Equations différentielles linéaires d'ordre un

Définition 1.13 *la forme générale d'une équation linéaire du premier ordre est*

$$a(x)y'+b(x)y=f(x), \qquad (*)$$

ou a, b, et f sont des fonctions continues sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$.

① Elle est linéaire car l'opérateur $L(y)\equiv a(x)y'+b(x)y$ est linéaire.

② Si la fonction $f\equiv 0$ sur I l'équation $(*)$ est dite homogène où sans second membre.

③ La solution générale se donne par $y=y_h+y_p$ où y_h est la solution générale de l'équation homogène, et y_p est une solution particulière de l'équation $(*)$.

Soit en effet y la solution générale et y_p une solution particulière de l'équation $(*)$

$$\begin{cases} ay'+by=f(x)\\ ay_p'+by_p=f(x).\end{cases}$$

D'où par différence

$$a(y'-y_p')+b(y-y_p)=0$$

ou encore

$$a(y-y_p)'+b(y-y_p)=0,$$

alors $(y-y_p)$ représente la solution générale notée y_h de l'équation homogène(sans second membre) donc

$$y=y_h+y_p.$$

Cherchons la solution générale de l'équation homogène associée à $(*)$, si $a(x) \neq 0$ sur I alors

$$\begin{aligned} a(x)y' + b(x)y = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)} \\ &\iff \ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\ &\iff y = ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}, \qquad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h = ke^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer y_p une solution particulière de l'équation $(*)$, pour cela on peut utiliser la méthode de la variation de la constante (Méthode de Lagrange) qui consiste à chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p = k(x)e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

en supposant que la constante k est une fonction en x, puis on détermine $k(x)$ à partir de l'équation complète $(*)$.

Exemple 1.18 *Intégrer l'équation différentielle suivante :*

$$xy' + x + y = 0, \quad \textit{pour} \quad x \neq 0. \qquad (1)$$

Résolvons l'équation homogène associée à l'équation (1)

$$\begin{aligned} xy' + y = 0 &\iff xy' = -y \\ &\iff (y = 0) \quad \textit{ou} \quad \left(\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}\right) \\ &\iff (y = 0) \quad \textit{ou} \quad \left(\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}\right) \\ &\iff (y = 0) \quad \textit{ou} \quad \left(\ln|y| = -\ln|x| + c, \qquad c \in \mathbb{R}\right) \\ &\iff (y = 0) \quad \textit{ou} \quad \left(y = \frac{k}{x} \qquad k \in \mathbb{R}\right) \\ &\iff y(x) = \frac{k}{x} \qquad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation homogène est $y_h(x) = \dfrac{k}{x} \qquad k \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \dfrac{k(x)}{x}$

$$\begin{aligned} (1) &\iff xy_p' + y_p = -x \\ &\iff x\left(\frac{xk'(x) - k(x)}{x^2}\right) + \frac{k(x)}{x} = -x \\ &\iff k'(x) = -x \\ &\iff k(x) = -\frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Donc on peut prendre $y_p(x) = -\dfrac{x}{2}$ *comme solution particulière, et par conséquent la solution générale de* (1) *est donnée par*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{k}{x} - \frac{x}{2} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.19 *Intégrer l'équation différentielle suivante :*

$$y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour} \quad x \neq 0. \qquad (2)$$

Résolvons l'équation homogène associée à l'équation (2)

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2xy}{1+x^2} = 0 &\iff xy' = -y \\
&\iff (y=0) \quad ou \quad \left(\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{1+x^2}\right) \\
&\iff (y=0) \quad ou \quad \left(\frac{dy}{y} = -\frac{2xdx}{1+x^2}\right) \\
&\iff (y=0) \quad ou \quad \left(\ln|y| = -\ln|1+x^2| + c, \qquad c \in \mathbb{R}\right) \\
&\iff (y=0) \quad ou \quad \left(y = \frac{k}{1+x^2} \qquad k \in \mathbb{R}\right) \\
&\iff y(x) = \frac{k}{1+x^2} \qquad k \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation homogène est $y_h(x) = \dfrac{k}{1+x^2} \qquad k \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \dfrac{k(x)}{1+x^2}$

$$\begin{aligned}
(2) &\iff y_p' + \frac{2xy_p}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \\
&\iff \frac{(1+x^2)k'(x) - 2xk(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{2xk(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} \\
&\iff k'(x) = 1 \\
&\iff k(x) = x.
\end{aligned}$$

Donc on peut prendre $y_p(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ *comme solution particulière, et par conséquent la solution générale de* (2) *est donnée par*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{k+x}{1+x^2} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

1.5 Exercices

Exercice 1.1 (**EDs à variables séparables**)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

$xy' = y$ $\quad (x^2+1)y' = 2xy$

$y' = y + 1$ $\quad xyy' = y^2 + 1$

$(x^2+1)y' = y^2 + 1$ $\quad y' = y(1 - \dfrac{1}{x^2})$

$(1 + y^2)dx + xydy = 0.$

Exercice 1.2 (**EDs homogènes**)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

$x^2y' = xy - y^2$ $\quad y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$

$2x^2y' = x^2 + y^2$ $\quad xyy' = y^2 - x\sqrt{x^2 - y^2}.$

Exercice 1.3 (**EDs linéaires**)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

$xy' + x + y = 0$ $\quad 2y' - y - 6 = 0$

$y' + ay = e^{-x}$ $\quad xy' - y = (x+1)e^{-x}$

$y' + 3\dfrac{y}{x} = \dfrac{e^x}{x^2}$ $\quad xy' + 2y = \dfrac{2x+1}{x(x^2+1)}.$

Exercice 1.4 (**Problèmes de Cauchy**)

$$\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y' = e^{-y} \\ y(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y' = 2x\cos^2 y \\ y(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x+2} + \dfrac{1}{4x} \\ y(-1) = 1. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y' + (\tan x)y = \cos x, \qquad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y' + x\tan y = 0 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} y'\sin x = y\ln y \\ y(\dfrac{\pi}{2}) = e. \end{cases} \quad (7)$$

Exercice 1.5 (**EDs de Bernoulli**)
Intégrer les équations différentielles suivantes :

$y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$ $\quad y' = xy(x^2y^2 - 1)$ $\quad xy' - y = y^2\ln x$

$y' = xy(1 - y^2)$ $\quad y' = xy(1 - y^2)$ $\quad xy' + y = y^3$

$y - xy' = 2xy^2$ $\quad xy' + y = y^3$ $\quad y' - 2xy + xy^2 = 0.$

Exercice 1.6 (**EDs de Riccati**)
Intégrer les équations suivantes (y_p solution particulière)

$y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1$ $\qquad y_p = x$
$y' = y^2 - 2ye^x + e^{2x} + e^x$ $\qquad y_p = e^x$
$y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$ $\qquad y_p = \sin x$
$y' = -y^2 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad y_p = \dfrac{1}{x}.$

Exercice 1.7 (**Equations aux différentielles totales**)
Résoudre les équations différentielles suivantes :
$(\sin xy + xy\cos xy)dx + (x^2\cos xy)dy = 0$
$x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$
$(2x + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y})dx = \dfrac{x^2 + y^2}{xy^2}dy.$

Exercice 1.8 (**Facteur intégrant**)
Résoudre les équations différentieles suivantes :

$$(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0, \qquad \varphi = f(x).$$

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0, \qquad \varphi = f(y).$$

$$(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0, \qquad \varphi = f(x + y^2).$$

Exercice 1.9 *Déterminer les trajectoires orthogonales du faisceau de paraboles d'équation*

$$y^2 = \lambda x.$$

Exercice 1.10 *Déterminer les trajectoires orthogonales du faisceau de cercles d'équation*

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + a^2 = 0, \qquad (a = cost).$$

Exercice 1.11 *Déterminer les trajectoires orthogonales de la famille de coniques d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1.$$

Chapitre 2

Equations différentielles d'ordre deux

2.1 Equations différentielles du deuxième ordre

Définition 2.1 *On appelle équation différentielle du deuxième ordre toute relation de la forme*

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

entre la variable x, la fonction inconnue $y(x)$ et ses dérivées première et seconde.
La solution φ deux fois dérivable, est dite solution (où intégrale) sur $I \subset \mathbb{R}$ si

$$\forall \in I \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) = 0.$$

Remarques :
① - Une équation différentielle du deuxième ordre admet une infinité de solutions dépendant de deux constantes arbitraires λ_1 et λ_2 tels que

$$y(x) = \varphi(x, \lambda_1, \lambda_2)$$

② - L'ensemble des solutions constitue l'intégrale générale et représente l'équation d'une famille de courbes dépendant de deux paramètres C_{λ_1,λ_2} appelées courbes intégrales.
③ - Inversement à toute famille de courbes dépendant de deux paramètres d'équation

$$F(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

on peut associer une équation différentielle du second ordre.

2.1.1 Equations différentielles se ramenant au premier ordre

L'intégration de certaines équations du second ordre peut se ramener à celle d'équations du premier ordre.

2.1.2 Equation ne contenant pas y

Soit une équation du second ordre de la forme

$$F(x, y', y'') = 0.$$

En posant $y' = z$ l'équation de vient :

$$F(x, z, z') = 0$$

z est donc solution d'une équation du 1^{er} ordre. Lorseque z est connue on obtient l'intégrale générale de l'équation proposée par une nouvelle intégration.
Exemple : Intégrer l'équation

$$y'' + y'^2 = 0.$$

En posant $y' = z$ on obtient $z' + z^2 = 0$
c'est-à-dire $-\dfrac{dz}{z^2} = dx$
d'où $\dfrac{1}{z} = x - x_0 \quad (x_0 \text{ constant})$
par conséquent $z = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x - x_0}$
donc $dy = \dfrac{dx}{x - x_0}$
en intégrant

$$y - y_0 = \ln|x - x_0|$$

la solution générale dépend de deux constantes x_0 et y_0.

2.1.3 Equation ne contenant pas x

Soit une équation du second ordre dans laquelle x ne se figure pas :

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Si l'on considère y' comme fonction inconnue de y, en posant $y' = z(y)$ on obtient :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}$$

y joue donc le rôle de variable et l'équation devient :

$$F\Big(y, z, z\frac{dz}{dy}\Big) = 0$$

c'est-à-dire une équation du 1^{er} ordre pour z.
Soit $z = \varphi(y, \lambda_1)$ l'intégrale générale de cette équation :

$$z = \frac{dy}{dx} = \varphi(y, \lambda_1) \quad \text{ou encore} \quad \frac{dy}{\varphi(y, \lambda_1)} = dx$$

en intégrant on obtient $x = f(y, \lambda_1) + \lambda_2$, avec $f(y, \lambda_1) = \displaystyle\int \frac{dy}{\varphi(y, \lambda_1)}$ la solution générale

dépend de deux constantes λ_1 et λ_2.
Exemple : Intégrer l'équation

$$y^2 y'' + y' = 0. \qquad (*)$$

En posant $y' = z(y)$ soit $y'' = z \cdot z'$
l'équation devient :

$$y^2 z z' + z = 0$$

ou encore, en ecartant la solution $z = 0$ (correspondant à $y = const$) :

$$y^2 z' + 1 = 0$$

qui conduit à $z' = -\dfrac{1}{y^2}$ puis $z = \dfrac{1}{y} + \lambda_1 \qquad \lambda_1 \in \mathbb{R}$.
On est donc ramené $(*)$ à une équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} + \lambda_1.$$

En séparant les variables :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{\dfrac{1}{y} + \lambda_1} \\ &= \frac{y dy}{\lambda_1 y + 1} \\ &= \frac{1}{\lambda_1}\Big(1 - \frac{1}{\lambda_1 y + 1}\Big) dy \end{aligned}$$

d'où finalement : $x = \dfrac{1}{\lambda_1} y - \dfrac{1}{\lambda_1^2} \ln|\lambda_1 y + 1| + \lambda_2 \qquad \lambda_1 \in \mathbb{R}^*, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

2.1.4 Equations différentielles linéaires du deuxième ordre

Définition 2.2 *On appellle équation différentielle linéaire du deuxième ordre une équation de la forme*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

avec a, b, c et f sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Théorème 2.1 *La solution générale de l'équation*

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

s'obtient en ajoutant à une intégrale particulère de l'équation complète l'intégrale générale de l'équation homogène associée (sans second memmbre).

L'intégration de l'équation sans second membre : soit

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \qquad (*).$$

On distingue trois cas :
❶ On connait deux solutions particulières

Remarque 2.1 *L'ensemble des solutions :*
Soit y_1 et y_2 deux solutions de l'équation $(*)$ il en est evidemment que $y_1 + y_2$, et λy_1, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ sont encore des solutions de $(*)$, l'ensemble des solutions de l'équation $(*)$ est donc est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur I.

Définition 2.3 *L'indépendance linéaire*
Deux fonctions y_1 et y_2 seront dites linéairement indépendantes si

$$\forall x \in I \quad \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Définition 2.4 *Le Wronskien :*
Le Wronskien de deux fonctions dérivables y_1 et y_2 est donné par

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Remarque 2.2 *Propriétés du Wronskien*

1. *Si y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur I alors $W(x)$ est non nul sur I.*
2. *Si $W(x) = 0$ sur I alors y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.*
3. *$W(x_0) = 0 \Longrightarrow W(x) = 0$ sur I.*

Exemple 2.1 *Vérifier que les solutions $y_1(x) = x^3$ et $y_2(x) = \dfrac{1}{x}$ de léquation*

$$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0$$

sont linéairement indépendantes sur tout intervalle ne contenant pas 0.

Théorème 2.2 *La dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation $(*)$ est égale à 2.*

Conséquence : Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (sans second membre), alors la solution générale s'ecrit

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x), \qquad (\lambda_1, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2.$$

❷ On ne connait qu'une solution particulière :
Soit y_1 une solution de l'équation $(*)$ alors

$$a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1 = 0.$$

En posant $y = y_1 z$ où z représente une fonction inconnue de x on obtient successivement

$$y' = y_1'z + y_1z',$$

$$y'' = y_1''z + 2y_1'z' + y_1z''$$

soit en remplaçant dans l'équation $(*)$

$$a(x)\left[y_1''z + 2y_1'z' + y_1z''\right] + b(x)\left[y_1'z + y_1z'\right] + c(x)y_1z = 0$$

ou encore (en tenant compte de $ay_1'' + by_1' + cy_1' = 0$)

$$a(x)y_1z'' + (2ay_1' + by_1)z' = 0$$

qu'est une équation sans second membre que l'on intègre par les méthodes données au paragraphe précédent.
❸ Cas général l'équation n'est pas intégrable par les méthodes élémentaires.
Un cas particulier où a, b, c sont des constantes sera étudié ultérierement.

Exemple 2.2 *Résoudre sur* $\mathbb{R}_+^*$ *l'équation différentielle suivante :*

$$x^2y'' - 6y = 0, \qquad (*)$$

sachant qu'elle admet $y_1(x) = x^3$ *comme solution.*

Posons $y_2(x) = x^3z$ on obtient

$$y_2' = 3x^2z + x^3z',$$
$$y_2'' = 6xz + 6x^2z' + x^3z''$$

En portant dans $(*)$ on obtient

$$x^2(6xz + 6x^2z' + x^3z'') - 6x^3z = 0$$

donc

$$6x^2z' + x^3z'' = 0$$

où encore $6z' + xz'' = 0$.
En posant $z' = \varphi$ l'équation devient :

$$6\varphi + x\varphi' = 0$$

donc on a

$$\begin{aligned} 6\varphi + x\varphi' = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ \dfrac{\varphi'}{\varphi} = \dfrac{-6}{x} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi = \dfrac{c}{x^6} \qquad c \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi = \frac{c}{x^6} \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{cases} z' = 0 \\ \text{ou} \\ z' = \dfrac{c}{x^6} \quad c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} z = Const \\ \text{ou} \\ z = \dfrac{k}{x^5} \quad k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors $\quad y_2(x) = \dfrac{k}{x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$
Finalement la solution générale de $(*)$ est

$$y(x) = \lambda_1 x^3 + \frac{\lambda_2}{x^2}, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2.1.5 La solution générale de $y'' + ay' + by = 0$:

Définition 2.5 (*L'idépendance linéaire*)
Deux fonctions y_1 et y_2 sont dites linéairement indépendantes sur un intervalle I si :

$$\Big(\forall x \in I \quad \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0\Big) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Théorème 2.3 *L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel de dimension deux.*

Cherchons une solution de

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2.1}$$

de la forme $y = e^{rx}$, alors

$$\begin{aligned} (2.1) \quad &\Longleftrightarrow \quad r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad r^2 + ar + b = 0. \end{aligned}$$

Donc $y = e^{rx}$ est solution de (2.1) ssi $\; r^2 + ar + b = 0$.
L'équation algébrique $r^2+ar+b = 0$ s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle (2.1).
On distingue trois cas possibles :
Cas 1 :
$\triangle = a^2 - 4b > 0$ dans ce cas l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet deux racines distinctes

$$r_1 = \frac{-a - \sqrt{\triangle}}{2}, \qquad r_2 = \frac{-a + \sqrt{\triangle}}{2}$$

Alors $\quad y_1 = e^{r_1 x} \quad$ et $\quad y_2 = e^{r_2 x}$ sont deux solutions de l'équation (2.1) donc

$$y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

est solution de l'équation $\quad y'' + ay' + by = 0$.
Cas 2 :
$\triangle = 0$ donc $r^2 + ar + b = 0$ admet $r = -\dfrac{a}{2}$ comme racine double. Alors $y_1 = e^{rx}$ et $\; y_2 = xe^{rx}$ sont deux solutions de (2.1), donc la solution générale de (2.1) est donnée par

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Cas 3 :
$\triangle < 0$ dans ce cas l'équation possède deux racines complexes distinctes

$$r_1 = \alpha + i\beta, \qquad r_2 = \alpha - i\beta, \quad (r_1 = \overline{r}_2)$$

alors $y = e^{r_1 x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ est une solution complexe de (2.1).
La partie réelle $\mathrm{Re}(y) = y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ et la partie imaginaire $\mathrm{Im}(y) = y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ sont deux solutions réelles de l'équation (2.1), par suite la solution générale de (2.1) est

$$y = \lambda_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + \lambda_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 2.3 *Intégrer les équations différentielles suivantes :*
$y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$ ①
$y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$ ②
$y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 4x + 4$ ③

Solution :
l'équation caractéristique de $y'' - 3y' + 2y = 0$ est $r^2 - 3r + 2 = 0$ elle admet deux racines 1, et 2 donc

$$y = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme le second membre de ① est un polynôme du troisième degré en x cherchons une solution particulière de ① sous la forme

$$y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

on a $y_p' = 3ax^2 + 2bx + c$ et $y_p'' = 6ax + 2b$ d'où en portant dans l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} 2a = 2 \\ 2b - 9a = -7 \\ 2c - 6b + 6a = 2 \\ 2b - 3c + 2d = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{array}\right.$$

donc la solution générale de ① est

$$y = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + x^3 + x^2 + x \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

l'équation caractéristique de $y'' - 4y' + 4y = 0$ est $r^2 - 4r + 4 = 0$ elle admet une racine double $r = 2$ donc

$$y = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{2x} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme le second membre de ② se présente sous la forme de produit d'un polynôme du premier degré par e^x cherchons une solution particulière de ② sous la forme

$$y_p = (ax + b)e^x$$

on a $y_p' = (ax + a + b)e^x, \qquad y_p'' = (ax + 2a + b)e^x$
d'où en portant dans l'équation ②

$$(ax + b + 2a - 4ax - 4b - 4a + 4ax + 4b)e^x = (2x - 4)e^x$$

soit

$$ax + b - 2a = 2x - 4$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b - 2a = -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

donc

$$y_p(x) = 2xe^x$$

et la forme générale des solutions de l'équation ② est

$$y(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{2x} + 2xe^x, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

► l'équation caractéristique associée à l'équation ③ est $r^2 - 2r + 2 = 0$ elle admet deux racines complexes $1 + i$, et $1 - i$ donc la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation ③ est

$$y = (\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x)e^x \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme le second membre de ③ est une fonction polynôme du second degré en x cherchons une solution particulière de ③ sous la forme

$$y_p = ax^2 + bx + c.$$

on a $y_p' = 2ax + b$ et $y_p'' = 2a$ d'où en portant dans l'équation ③

$$2a - 4ax - 2b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 2x^2 - 4x + 4$$

soit

$$2ax^2 + 2(b - 2a)x + 2(a - b + c) = 2x^2 - 4x + 4$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a = 2 \\ 2(b - 2a) = -4 \\ 2(a - b + c) = 4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{array} \right.$$

donc

$$y_p(x) = x^2 + 1$$

et la forme générale des solutions de l'équation ③ est

$$y(x) = (\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x)e^x + x^2 + 1, \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2.1.6 Méthode de variation des constantes

Soit

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (1)$$

l'équation homogène associée

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (H)$$

qui admet comme solution générale

$$y(x) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

pour déterminer une solution particulière de (1) on pose

$$y_p(x) = \lambda_1(x) y_1 + \lambda_2(x) y_2$$

Méthode 1 : $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ sont solutions du système

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)y_1 + \lambda_2'(x)y_2 = 0 \\ \lambda_1'(x)y_1'(x) + \lambda_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Méthode 2 : $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ sont données par :

$$\lambda_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2}{W(y_1, y_2)}dx$$

$$\lambda_2(x) = \int \frac{f(x)y_1}{W(y_1, y_2)}dx$$

avec $W(y_1, y_2)$ est le Wronskien de y_1, y_2.

Exemple 2.4 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-2)$$

admet deux racines

$$r = 1 \quad \text{ou} \quad r = 3.$$

Donc on obtient

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{3x}$$

par suite on a

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons une solution particulière de $(*)$

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)e^x + \lambda_2'(x)e^{3x} = 0 \quad (1) \\ \lambda_1'(x)e^x + \lambda_2'(x)e^{3x} = xe^x \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} 2\lambda_2'(x)e^{3x} = xe^x \quad &\Longrightarrow \quad \lambda_2'(x) = \frac{1}{2}xe^{-2x} \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_2(x) = \frac{1}{2}\int xe^{-2x}dx \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_2(x) = (-\frac{1}{4}x - \frac{1}{8})e^{-2x}. \end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Longrightarrow \quad \lambda_1'(x)e^x + \frac{1}{2}xe^x = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_1'(x) = -\frac{1}{2}x \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\frac{1}{4}x^2e^x + (-\frac{1}{4}x - \frac{1}{8})e^x \\ &= -(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8})e^x \\ &= -\frac{1}{4}(x^2 + x + \frac{1}{2})e^x \end{aligned}$$

donc

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2.1.7 La résoution d'une ED par un changement de variable

On va traiter ce paragraphe par deux exemples.

Exemple 2.5 *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0,$$

en posant $z = xy$.

Solution :

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0, \qquad (1)$$

Posons $z = xy$ donc $z' = xy' + y$, $z'' = xy'' + 2y'$ donc $xy'' = z'' - 2y'$ alors

$$\begin{aligned} (1) &\iff xy'' + 2xy' + 2y' + xy + 2y = 0 \\ &\iff z'' - 2y' + 2z' - 2y + 2y' + z = 0 \\ &\iff z'' + 2z' + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 1 = 0 &\iff (r+1)^2 = 0 \\ &\iff r = -1 \end{aligned}$$

donc la solution générale est donnée par

$$z(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2)e^{-x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

par conséquent

$$y(x) = (\lambda_1 x + \frac{\lambda_2}{x})e^{-x}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 2.6 *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x},$$

en posant $t = e^x$.

Solution :

$$y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}, \qquad (2)$$

Posons $t = e^x$ et $z(t) = y(x)$ donc $y(x) = z(t) = z(e^x)$, alors

$$y'(x) = e^x z'(e^x) = tz'(t) \qquad (1)$$

$$y''(x) = e^x z'(e^x) + e^{2x} z''(e^x) = tz'(t) + t^2 z''(t)$$

donc

$$\begin{aligned}
(2) \iff\ & tz' + t^2 z'' - tz' - t^2 z = t^3 \\
\iff\ & t^2 z'' - t^2 z = t^3 \\
\iff\ & z'' - z = t
\end{aligned}$$

$$z'' - z = 0 \iff z = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

$z(t) = -t$ est une solution particulière, alors la solution générale $z(t)$ est donnée par

$$z(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t} - t, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

En revenant à y on trouve

$$y(x) = \lambda_1 e^{e^x} + \lambda_2 e^{-e^x} - e^x, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

2.1.8 Equation différentielle d'Euler

Définition 2.6 *Toute équation différentielle de la forme*

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

avec a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0 sont des constantes, s'appelle équation d'Euler.

Méthode de résolution :
Les solutions particulières de l'équation $(*)$ peuvent être cherchées sous la forme $y = x^\lambda$.
Dans ce cas on obtient pour λ une équation de degré n qui coincide avec l'équation caractéristique de $(*)$.

Exemple 2.7 *Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante :*

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0. \qquad (1)$$

Cherchons la solution de l'équation donnée sous la forme $y = x^\lambda$, ou k est nombre inconnu. Donc $y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$$\begin{aligned}
(*) \iff\ & x^2 \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 2x\lambda x^{\lambda-1} - 6x^\lambda = 0 \\
\iff\ & 2\lambda(\lambda-1)x^\lambda + 2\lambda x^\lambda - 6x^\lambda = 0 \\
\iff\ & 2\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 6 = 0 \qquad (x^\lambda \neq 0) \\
\iff\ & \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \\
\iff\ & \lambda = -3 \quad ou \quad \lambda = 2.
\end{aligned}$$

Donc $y_1(x) = x^{-3}$, *et* $y_2(x) = x^2$ *sont deux solutions de l'équation* (1). *Et par conséquent*

$$y(x) = c_1 x^{-3} + c_2 x^2 \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

est la solution générale de l'équation (1) *d'Euler.*

Remarque 2.3 *Pour résoudre l'équation* $(*)$ *on peut faire le changement de variable* $x = e^t$ *pour ramener l'équation* $(*)$ *à une équation linéaire homogène à coefficients constants.*

2.2 Exercices

Exercice 2.1 *Résoudre les équations différentielles :*

$$y'' + 9y' = x + 1,$$

$$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x},$$
$$y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{x},$$
$$y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^{x} + e^{3x},$$
$$y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{x} + xe^{2x} \cos x,$$
$$y'' - 2y' + y = x, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Exercice 2.2 *(Problème aux limites)*
Résoudre le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} xy'' + y' = 0, \\ y(2) = 1, \\ y(2e) = 3. \end{cases}$$

Exercice 2.3 *(Problème aux conditions initiales)*
Résoudre les équations différentielles :

$$\begin{cases} 1 + (y')^2 = 2yy', \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2.4 *Résoudre les équations différentielles :*

$$y'' + y'^2 = 0,$$

$$y^2 y'' + y' = 0.$$

Exercice 2.5 *Résoudre les équations différentielles*
$yy'' - 2y'^2 = y^2 \qquad xy'' = y'$
$1 + y'^2 - yy'' = 0 \qquad y'' + yy' = 0.$

Exercice 2.6 *Résoudre les équations différentielles :*

$$y'' - y' + e^{2x} y = e^{3x}, \qquad \textit{en posant} \quad t = e^{x},$$

$$y'' + y' \tan - y \cos^2 x = 0, \qquad \textit{en posant} \quad t = \sin x,$$
$$(1 - x^2)y'' - xy' + yx = 0, \qquad \textit{sur} \quad]-1, 1[.$$

Exercice 2.7 (*Problèmes de Cauchy*)
Résoudre les problèmes suivants.

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 0 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - y' = xe^{x} \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -2x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 2.8 *Soit l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x. \tag{2.2}$$

❶ **M***ontrer que* $W' = 4W$ *(W est le Wronskien).*
❷ **R***ésoudre l'équation* (2.2).
Remarque *: (Utiliser le Wronskien pour déterminer une solution particulière).*

Exercice 2.9 *Résoudre le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} y'' + y = |x^2 - \pi^2| \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.10 *Déterminer une série entière dont la somme* $\phi(t)$ *prenne la valeur 1 pour* $t = 0$ *et soit solution de l'équation différentielle*

$$x' = t + x.$$

Exercice 2.11 *Déterminer une série entière dont la somme* $\psi(t)$ *soit solution de l'équation différentielle*

$$(1-t^2)x'' - tx' + 4x = 0,$$

et qui vérifient les égalités $\psi(0) = \psi'(0) = 1$.

Exercice 2.12 *On considère l'équation différentielle*

$$t^2x'' + 3tx' + x = \frac{1}{t^2} \qquad (*).$$

Soit $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ *et* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tau \longmapsto \psi(e^\tau)$.
① *Montrer que* ψ *est solution de* $(*)$ *si et seulement si* ϕ *est solution d'une équation différentielle* $(**)$ *que l'on précisera.*
② *Résoudre l'équation* $(**)$.
③ *Déduire l'ensemble des solutions de l'équation* $(*)$.
④ *Montrer qu'il existe une unique solution* ψ *de telle que* $\psi(1) = \psi'(1) = 0$.

Chapitre 3

Etude théorique d'une équation différentielle

3.1 Equations différentielles du premier ordre

3.1.1 Résultats fondamentaux :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, on considère l'équation différentielle

$$x' = f(t,x), \quad (t,x) \in U$$

Définition 3.1 (*Solution*)
Une solution de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

1. $(\forall t \in I), \qquad (t, \varphi(t)) \in U$

2. $(\forall t \in I), \qquad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Définition 3.2 (*Prolongement*)
Soient $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, et $\widetilde{x} : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions de $x' = f(t,x)$. On dit que $\widetilde{x}$ est un prolongement de x si $\widetilde{I} \supset I$ et $\widetilde{x}_{|_I} = x$.

Définition 3.3 (*Solution maximale*)
On dit qu'une solution est maximale si elle n'admet pas de prolongement.

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U = J \times \Omega$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.4 (*Solution globale*)
Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.

Remarque 3.1 *Toute solution globale est une solution maximale, mais la réciproque est fausse.*

Exemple 3.1 *On considère l'équation différentielle* $x' = x^2 \qquad (*)$ *sur* $U = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Les solutions de $(*)$ sont

$$x = 0, \quad et \quad x = -\frac{1}{t+c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$x = 0$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$ donc elle est globale.
$x = -\dfrac{1}{t+c}$ est une solution maximale (non globale) sur $]-\infty, -c[$.
$x = -\dfrac{1}{t+c}$ est une solution maximale (non globale) sur $]-c, +\infty[$.

Définition 3.5 *(Cylindre de sécurité)*
Soit $C = [t_0 - l, t_0 + l] \times \overline{B}(x_0, r) \subset C_0$ un sylindre de mème diamètre que C_0 et demi-longueure $l \leqslant l_0$.
On dit que C est un cylindre de sécurité pour l'équation $x' = f(,x)$ si toute solution $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$ avec $I \subset [t_0 - l, t_0 + l]$ rest contenue dans $\overline{B}(x_0, r)$.

Remarque 3.2 *Pour que C soit un sylindre de sécurité, il suffit de prendre*

$$l \leqslant \min(l_0, \frac{r}{M}) \quad \text{avec} \quad M = \sup_{(t,x)\in C_0} \|f(t,x)\|.$$

Le choix $l = \min(l_0, \frac{r}{M})$ convient par exemple.

Remarque 3.3 *Si $C \subset C_0$ est un sylindre de sécurité, toute solution $x : [t_0 - l, t_0 + l] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy vérifie $\|x'(t)\| \leqslant M$ est lipschitzienne de rapport M.*

Régularité des solutions :

Définition 3.6 *Une fonction de plusieures variables est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'au l'ordre k.*

Théorème 3.1 *Si la fonction $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ alors toute solution de $x' = f(t,x)$ est une solution de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.*

Démonstration : On raisonne par récurrence sur k.
Pour $k = 0$ la fonction f est continue.
Par hypothèse $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable, donc continue, et par conséquent
$x'(t) = f(t, x(t))$ est continue, donc x est de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que le résultat est vrai à l'ordre $k-1$, alors x est au moins de classe $\mathcal{C}^k$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^k$, il s'ensuit que x' est de classe $\mathcal{C}^k$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, donc x est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

3.2 Equations différentielles (problème de Cauchy)

Soit l'équation différentielle

$$a(t)x' + b(t)x = f(t), \quad t \in I, \ (I \subset \mathbb{R}) \quad (*)$$

Définition 3.7 (*Equation normalisée*)
On dit que l'équation différentielle $(*)$ est normalisée ou résolue en x' si on peut l'ecrire sur I sous la forme

$$x' = \varphi(t)x + \psi(t).$$

Définition 3.8 (*Point singulier*)
Soit $t_0 \in I$*, on dit que* t_0 *est un point singulier de l'équation différentielle* $(*)$ *si* $\varphi(t_0) = 0$.

Exemple 3.2 *Soit l'équation différentielle :*

$$t(t-1)x' + x = \cos t, \quad \text{sur } I = \mathbb{R}.$$

L'équation précédente a deux points singuliers 0 et 1.

Définition 3.9 (*Equation autonome*)
on appelle équation différentielle autonome une équation de la forme $x' = f(x)$ *ou la variable independante n'intervient pas dans l'équation.*

Remarque 3.4 *Une équation différentielle autonome est en particulier une équation différentielle à variables séparables.*

Exemple 3.3 *Les équations différentielles*

$$x' = x^2 - 1, \qquad 2x' + \cos x = 0, \quad x' - \ln x = 1$$

sont des équations autonomes. Par contre les équations

$$x' + tx = 0, \quad x' = \cos t + x, \quad x' = tx^2 - 1$$

ne le sont pas.

Théorème 3.2 *(Théorème des accroissements finis)*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie et continue sur un intervalle* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *avec* $a < b$*, dérivable sur* $]a,b[$*, Alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Définition 3.10 (*Fonctions lipschitziennes*)
Soit $f(t,x)$ *une fonction définie dans un ouvert* U *d* $\mathbb{R}^2$ *on dit que* f *est lipschitzienne par rapport à* x *s'il existe une constante* $k \geq 0$ *telle que pour tout* $(x_1, x_2) \in U$ *l'on ait*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant k|x_1 - x_2|.$$

On dit que f *est localement lipschitzienne par rapport à* x *si tout point de* U *possède un voisinage dans lequel* f *est lipschitzienne par rapport à* x.

Remarque 3.5 *Le fait que* $f(t,x)$ *soit lipschitzienne par rapport à* x *n'entraine pas que* f *soit continue de* (t,x).
Exemple : $f(t,x) = t^2 + x$.
Une fonction peut être localement lipschitzienne dans U *sans être lipschitzienne.*
Exemple : $f(t,x) = x^2, \qquad U = \mathbb{R}^2$.

Définition 3.11 *(EVN complet (Banach))*
$*$ *Un evn $(E, \|\cdot\|)$ est dit de Banach s'il est complet pour la distance de la norme c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans E converge.*
$*$ *C'est le cas de tous les espaces normés de dimension finie.*
$*$ *Une partie $A \subset E$ est dite complète si toute suite de Cauchy de A converge dans A.*
$*$ *Dans un espace de Banach, on a l'equivalence :*

$$A \text{ fermé} \iff A \text{ est complet.}$$

Définition 3.12 *(Contraction)*
Une contraction f de $A \subset E$ est une application $f : A \longrightarrow A$ est $k-$lipschitizienne avec $k \in [0, 1[$.

Remarque

$$f \text{ contraction} \Longrightarrow f \text{ uniformément continue} \Longrightarrow f \text{ continue.}$$

Définition 3.13 (*Espace métrique précompact*)
Un espace métrique E est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de points y_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ (N ne dépend pas de ε) tel que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(y_i, \varepsilon)$$

où $B(y_i, \varepsilon)$ désigne la boule ouverte de centre y_i et de rayon ε.

Remarques :

1. Tout espace métrique compact est précompact.
2. Tout espace métrique précompact et complet est compact.

Définition 3.14 (*L'équicontinuité*)
Soit $\mathcal{H}$ un sous ensemble de fonctions continues de X dans Y. On dit que $\mathcal{H}$ est équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \|x_1 - x_2\| < \delta \Longrightarrow \forall f \in \mathcal{H}, \quad \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$$

Théorème 3.3 *(***Ascoli-Aarzéla***)*
Soient X un espace métrique compact et Y un espace de Banach quelconque. Une partie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}(X, Y)$ est relativement compact si est seulement si :

1. *$\mathcal{H}$ est uniformément bornée.*
2. *$\mathcal{H}$ est équicontinue.*
3. *Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{H}(x)$ défini par :*

   $$\mathcal{H}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{H}\}$$

   est relativement compact dans Y.

Remarque :

1. Ce théorème caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues.

2. Une partie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}([a,b],\mathrm{I\!R})$ est relativement compacte si elle est équicontinue et uniformément bornée.

Théorème 3.4 *(Point fixe de Banach)*
Toute contraction f d'une partie fermée non vide d'un espace de Banach possède un unique point fixe (i.e. $f(x) = x$).

Démonstration : Remarquons qu'il y a unicité d'un point fixe en cas d'existence.
En effet Si x et y sont deux points fixes, alors

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|,$$

comme $0 \leqslant k < 1$, nécessairement $\|x-y\| = 0$ donc $x = y$. on établit alors l'existence d'un point fixe on se donne $x_0 \in A$ et on définit la suite récurrente

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

on a donc

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\|$$

et par une récurrence on obtient

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n\|x_1 - x_0\|$$

de l'inégalité triangulaire pour $(m < n)$ on déduit alors

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leqslant (k^n + k^{n-1} + \cdots + 1)\|x_1 - x_0\| \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

l'hypothèse $0 \leqslant k < 1$ entraine que la suite est de Cauchy donc converge et sa limite notée x appartient à $\bar{A} = A$. par continuité de f on peut ainsi ecrire

$$f\big(\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}\big) = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

donc

$$f(x) = x.$$

Corollaire 3.1 *Si A est fermé dans un espace de Banach et $f : A \longrightarrow A$ est telle qu'une de ses itérées*

$$f^p = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f.$$

est une contraction, alors f possède un unique point fixe.

Démonstration :
Remarquons que tout point fixe de f est également un point fixe pour f^p, il sera donc unique en cas d'existence en vertu du théorème précédent.
Montrons que f possède un point fixe. D'après le théorème précédent, il existe un unique x tel que $f^p(x) = x$ d'où $f^p(f(x)) = f(x)$ donc $f(x)$ est lui aussi comme x, fixe pour f^p donc par unicité, $f(x) = x$.

Théorème 3.5 *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, alors pour chaque $(t_0, x_0) \in \Omega$ il existe une unique solution de l'équation $x' = f(t,x)$ avec $x(t_0) = x_0$ dans un certain intervalle ouvert contenant t_0.*

Définition 3.15 *Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite localement lipschitizienne en x (par raport à la seconde variable), si pour chaque ensemble compact $K \subset \Omega$, il existe $l > 0$ tel que*

$$\big|f(t,x) - f(t,y)\big| \leqslant l|x - y|$$

pour tout $(t,x), (t,y) \in K$

Théorème 3.6 *Si la fonction $f(t,x)$ est continue dans le domaine U et possède dans U une dérivée $f_x(t,x)$ bornée, alors par chaque point (t_0, x_0) de U passe une et seulement une courbe intégrale $x = \varphi(t)$ de l'équation $x' = f(t,x)$ avec $(\varphi(t_0) = x_0)$.*

Exemple 3.4 *Soit $f(t,x) = |x|$.*
La fonction f est localement lipschitizienne en x en effet : on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \big|f(t,x) - f(t,y)\big| &= \big||x| - |y|\big| \\ &\leqslant |x - y|. \end{aligned}$$

Donc f est localement lipschitzienne en x avec $l = 1$.

Exemple 3.5 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t,x) = \sqrt{|x|}$*
n'est pas lipschitizienne car

$$\big|f(t,x) - f(t,0)\big| = \sqrt{|x|} \leqslant \frac{1}{\sqrt{|x|}}|x - 0|$$

puisque $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}} \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow 0$ la fonction f n'est pas localement lipschitizienne dans tout ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui croise $\mathbb{R} \times \{0\}$.

3.2.1 Existence et unicité de la solution satisfaisante à une condition initiale

On considère l'équation différentielle $x' = f(t,x)$, supposons que $f(t,x)$ est définie et continue dans un ouvert Ω du plans $\mathbb{R}^2$.
Le lemme ci-dessous montre que la résolution de $x'(t) = f(t,x)$ est équivalent à la résolution d'une équation intégrale :

Lemme 3.1 *Une fonction $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution du problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, x_0) si et seulement si*

1. *x est continue et $\forall t \in I \quad (t, x(t)) \in U$,*
2. *$\forall t \in I \qquad x(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$.*

Démonstration :
En effet si x vérifie 1 et 2 alors x est différentiable et on a $x(t_0) = x_0$, par dérivation on obtient $x'(t) = f(t, x(t))$. Inversement si ces deux relations sont satisfaites, 2 s'en déduit par intégration.

Théorème 3.7 *Si les fonctions f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues dans Ω et si (t_0, x_0) est un point de Ω, il existe une solution φ et une seule définie dans un voisinage de (t_0, x_0) qui satisfait à $\varphi(t_0) = x_0$.*

Exemple 3.6 *Soit l'équation différentielle*

$$x' = \alpha x, \quad \textit{avec} \qquad (\alpha \quad \textit{constant}).$$

Nous avons

$$f(t,x) = \alpha x, \qquad et \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \alpha$$

f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues dans tout le plan (t, x), le Théorème 3.7 ci-dessus montre qu'il existe une solution unique qui passe par le point (t_0, x_0) du plan. Cette solution est $\varphi(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$, qui est la seule solution passant par ce point et elle est définie pour tout t·

Exemple 3.7 *Soit l'équation différentielle :*

$$y' = \frac{y}{x+1} = f(x,y),$$

comme f et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues dans tout le plan (x, y) sauf sur la droite $x = -1$, théorème précédent montre qu'il existe une solution unique passant par un point quelconque (x_0, y_0) du plan (x, y) mais ne donne aucune information sur les solutions passant par $(-1, y_0)$.

Exemple 3.8 *Soit l'équation différentielle :*

$$y' + \varphi(x)y = \psi(x),$$

où φ et ψ sont deux fonctions continues sur un intervalle $]a, b[$ qui peut être l'axe des x tout entier, soit $x_0 \in]a, b[$ et un y_0 quelconque, on peut utiliser le Théorème 3.7 pour montrer qu'il existe une solution unique φ satisfaisant à la condition $\varphi(x_0) = y_0$ en effet

$$f(x,y) = \psi(x) - \varphi(x)y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\varphi(x)$$

qui sont continues dans

$$\Omega = \{(x,y) : a < x < b, y \in \mathbb{R}\}$$

le Théorème 3.7 peut être appliqué en tous point (x_0, y_0) de Ω.

3.2.2 L'inégalité de Gronwall

Cette inégalité simple est souvent utile, elle permet par exemple à la démonstration de l'unicité de solution d'une équation différentielle.

Lemme 3.2 *Soient φ, et ψ deux fonctions continues, positives définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, soient $t_0 \in I$ et $c \geqslant 0$ tels que*

$$\psi(t) \leqslant c + \Big| \int_{t_0}^{t} \phi(s)\psi(s)ds \Big|, \quad t \in I.$$

Alors

$$\psi(t) \leqslant c \exp\Big(\Big| \int_{t_0}^{t} \phi(s)ds \Big| \Big), \quad t \in I.$$

En particulier si $c \equiv 0$ alors $\psi \equiv 0$.

Démonstration :
Supposons d'abord que $c > 0$ et posons

$$f(t) = c + \Big| \int_{t_0}^{t} \phi(s)\psi(s)ds \Big|, \quad t \in I,$$

notre hypothèse est que $\psi(t) \leqslant f(t)$, $t \in I$.
Si $t \geqslant t_0$,

$$f(t) = c + \int_{t_0}^{t} \phi(s)\psi(s)ds, \quad t \in I,$$

donc

$$f'(t) = \phi(t)\psi(t) \leqslant \phi(t)f(t)$$

ce qui donne

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \phi(t)$$

Puisque $f(t_0) = c$ on obtient

$$\ln f(t) - \ln c = \int_{t_0}^{t} \frac{f'(s)}{f(s)} ds \leqslant \int_{t_0}^{t} \phi(s)ds, \quad t \geqslant t_0,\ t \in I$$

d'où

$$\psi(t) \leqslant f(t) \leqslant c \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \phi(s)ds \Big), \quad t \geqslant t_0,\ t \in I$$

Si $t \leqslant t_0$, on a

$$f(t) = c + \int_{t}^{t_0} \phi(s)\psi(s)ds, \quad t \in I,$$

et

$$f'(t) = -\phi(t)\psi(t) \leqslant -\phi(t)f(t)$$

donc

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \geqslant -\phi(t)$$

ce qui entraine que

$$\ln c - \ln f(t) = \int_t^{t_0} \frac{f'(s)}{f(s)} ds \geqslant - \int_t^{t_0} \phi(s) ds,$$

d'où

$$\begin{aligned}\psi(t) &\leqslant f(t)\\ &\leqslant c \exp\Big(\int_{t_0}^t \phi(s) ds\Big)\\ &\leqslant c \exp\Big(\Big| \int_{t_0}^t \phi(s) ds\Big|\Big).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\psi(t) \leqslant f(t) \leqslant c \exp\Big(\Big| \int_{t_0}^t \phi(s) ds\Big|\Big), \quad t \leqslant t_0,\ t \in I.$$

Si $c \equiv 0$ on a

$$\psi(t) \leqslant \varepsilon + f(t), \quad t \in I, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

On en déduit que

$$\psi(t) \leqslant f(t) \leqslant \varepsilon \exp\Big(\Big| \int_{t_0}^t \phi(s) ds\Big|\Big), \quad t \in I$$

d'où en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient $\psi \equiv 0$.

Corollaire 3.2 *Soient $b > 0$, $a \in \mathbb{R}$, et $w : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que*

$$w(t) \leqslant a + b \int_0^t w(s) ds, \qquad \forall t \in [0, T]$$

alors pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$w(t) \leqslant a e^{bt}.$$

Corollaire 3.3 *Sous les hypothèses précédentes, si f est une fonction constante égale à $a \geqslant 0$ et g est une fonction constante égale à $b \geqslant 0$ alors on a*

$$\forall t \in I \qquad u(t) \leqslant a e^{b\left|t - t_0\right|}.$$

Corollaire 3.4 *Soit $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant*

$$\|y'(t)\| \leqslant \beta + \alpha \|y(t)\|, \qquad \forall t \in [a, b], \quad \alpha > 0,\ \beta \geqslant 0$$

Alors

$$\|y(t)\| \leqslant \|y(a)\| e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}\Big(e^{\alpha(t-a)} - 1\Big), \qquad \forall t \in [a, b], \quad \alpha \geqslant 0.$$

3.2.3 Existence et unicité globale

On considère le problème de Cauchy (problème à valeur initiale) suivant

$$\begin{cases} x' = \psi(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Théorème 3.8 [*Existence et unicité globale*]
On suppose que $U = E$, et $\psi \in \mathcal{C}(I \times U)$ une fonction globalement lipschitzienne par rapport à x. Alors pour tout $x_0 \in U$, le problème de Cauchy (3.1) admet une solution globale unique. De plus toute solution locale est une restriction de celle-ci.

Démonstration :
On suppose en premier lieu que l'intervalle I est compact. On pose $\mathcal{E} = \mathcal{C}(I, E)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans E, muni de la norme

$$\|x\|_{\mathcal{E}} = \max_{t\in I} e^{-2L|t-t_0|}\|x(t)\|_E$$

où L est la constante de Lipschitz de ψ. Il est clair que $\mathcal{E}$ est espace normé complet (Banach) (car I est compact). On définit l'opérateur $\chi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ par

$$(\chi x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi(s, x(s))ds, \qquad t \in I$$

Il est clair que l'opérateur χ envoie $\mathcal{E}$ dans lui-même.
Supposons que $t \geq t_0$. Pour tout x_1 et x_2 dans $\mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} |(\chi x_2)(t) - (\chi x_1)(t)| &\leqslant \int_{t_0}^{t} L\|x_2(s) - x_1(s)\|_E ds \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} Le^{2L|s-t_0|}\|x_2 - x_1\|_{\mathcal{E}} ds \\ &\leqslant \frac{1}{2}Le^{2L|t-t_0|}\|x_2 - x_1\|_{\mathcal{E}} \\ \|(\chi x_2) - (\chi x_1)\|_{\mathcal{E}} &\leqslant \frac{1}{2}Le^{2L|t-t_0|}\|x_2 - x_1\|_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|\chi x_2 - \chi x_1\|_{\mathcal{E}} \leqslant \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|_{\mathcal{E}}.$$

Donc l'opérateur χ est contractant de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ et le Théorème du point fixe de Banach assure l'existence d'une unique solution.
De manière similaire on montre que le problème (3.1) admet une solution unique pour $t \leqslant t_0$.
Si maintenant I n'est pas fermé et borné. Alors on peut toujours écrire $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, avec pour tout n, $I_n \subset I_{n+1}$ et I_n fermé, borné :
Soit x_n la solution sur I_n. Par unicité, on a

$$x_{n+1}|_{I_n} = x_n.$$

On définit alors x par $x = x_n$ sur I_n, ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution.
Soit maintenant $(\widetilde{x}, \widetilde{I})$, une autre solution. On décompose $\widetilde{I} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{I}_n$ avec $\widetilde{I}_n = \widetilde{I} \bigcap I_n$ fermé borné. Par unicité, on a $\widetilde{x}|_{\widetilde{I}_n} = x|_{\widetilde{I}_n}$, ce qui montre que $\widetilde{x} = x|_{\widetilde{I}}$.

Proposition 3.1 *Sous les hypotèses du Théorème 3.8, soit x_1 et x_2 deux solutions. Alors on a l'estimation suivante*

$$\forall t \in I, \quad \|x_1(t) - x_2(t)\|_E \leqslant e^{L|t-t_0|}\|x_1(t_0) - x_2(t_0)\|_E.$$

3.2.4 Existence et unicité locale

On considère un intervalle I d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, et U un ouvert connexe d'un espace de Banach E. Pour $x_0 \in U$ et $r > 0$, on définit la boule fermée

$$B_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leqslant r\}.$$

Théorème 3.9 (*Existence locale*)
Soit $\psi \in \mathcal{C}(I \times U, E)$. Soient μ, r, M et L des constantes telles que

$$[t_0 - \mu, t_0 + \mu] \times B_r(x_0) \subset I \times U$$

$$\forall (t,x) \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu] \times B_r(x_0), \qquad \|\psi(t,x)\| \leqslant M$$

$$\forall (t,x_1),(t,x_2) \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu] \times B_r(x_0), \quad \|\psi(t,x_1) - \psi(t,x_2)\|_E \leqslant \|x_1 - x_2\|_E$$

Alors il existe (J,x) une solution locale du problème (3.1) avec

$$J = [t_0 - \widetilde{\mu}, t_0 + \widetilde{\mu}], \qquad et \quad \widetilde{\mu} = \min(\mu, \frac{r}{2M}).$$

Remarque 3.6 *Si ψ est localement Lipschitzienne, alors il est clair qu'elle vérifie les hypothèses précédentes.*

Démonstaration :
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ une fonction de troncature telle que

$$\begin{cases} \varphi(t) = 1 & t \leqslant \frac{1}{2} \\ \varphi(t) = 0 & t \geqslant 1 \\ |\varphi(t)| \leqslant 1 & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

On pose

$$F(t,x) = \begin{cases} \varphi(\dfrac{\|x_1 - x_2\|_E}{r})\psi(t,x) & (t,x) \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu] \times B_r(x_0) \\ 0 & (t,x) \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu] \times E \setminus B_r(x_0). \end{cases}$$

On montre facilement que $F(t,x)$ est globalement lipschitzienne sur $[t_0 - \mu, t_0 + \mu] \times E$. De plus, on a $\|F(t,x)\|_E \leqslant M$. On en déduit par le théorème précédent qu'il existe une unique solution globale au problème

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

De plus, en utilisant l'équation intégrale, on voit facilement que

$$\|x(t) - x(t_0)\|_E \leqslant M|t - t_0|.$$

Maintenant, par définition de $\widetilde{\mu}$ on a

$$|t-t_0)| \leqslant \widetilde{\mu} \Longrightarrow |t-t_0| \leqslant \frac{r}{2M}$$

et donc

$$\|x(t)-x(t_0)\|_E \leqslant \frac{r}{2}.$$

Or pour t et x tels que $|t-t_0| \leqslant \widetilde{\mu}$ et $x \in B_r(x_0)$ on a $F(t,x)=\psi(t,x)$, et donc x est solution de problème (3.1).

Lemme 3.3 *Soit ψ une fonction localement lipschitzienne par rapport à x, et soient $J \subset I$ un compact de I et $K \subset U$ un compact de U. Alors ψ est uniformément lipschitizienne par rapport à x sur $J \times K$.*

Démonstration :
Soit $M=\max_{J\times K}\|(\psi(t,x)\|_E$. Par hypothèse, pour tout $(t,x)\in J\times K$, il existe $L(t,x)$ et un voisinage $\mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_x$ de (t,x) dans $I \times K$ tels que

$$\forall (s,x_2),(s,x_1) \in \mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_x \quad \|\psi(s,x_2)-\psi(s,x_1)\|_E \leqslant L(t,x)\|x_2-x_1\|_E.$$

On peut toujours supposer que $\mathcal{V}_x = B_{r(x)}(x)$ pour un certain $r(x)>0$. Puisque $J\times K$ est compact, il existe $(t_i,x_i)\in J\times K$, $i=1,2,\dots,n$ tels que

$$J\times K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{t_{i_0}} \times B_{r(x_{i_0})/2}(x_{i_0}).$$

On pose alors

$$L=\max_{i=1,2,\dots,n} L(t_i,x_i), \qquad \text{et} \qquad r=\min_{i=1,2,\dots,n} r(x_i).$$

Soient (t,x_1) et (t,x_2) des élements de $J\times K$. Il existe un indice i_0 tel que

$$(t,x_1)\in \mathcal{U}_{t_{i_0}} \times B_{r(x_{i_0})/2}(x_{i_0})$$

On distingue alors deux cas :
Le premier cas 1 : Si $\|x_2-x_1\|_E \leqslant \frac{r}{2}$, dans ce cas on a $x_2 \in B_r(x_{i_0})$ et donc par hypothèse

$$\|\psi(t,x_2)-\psi(t,x_1)\|_E \leqslant L\|x_2-x_1\|_E.$$

Le deuxième cas 2 : Si $\|x_2-x_1\|_E > \frac{r}{2}$, on a alors

$$\|\psi(t,x_2)-\psi(t,x_1)\|_E \leqslant 2M \leqslant \frac{4M}{r}\|x_2-x_1\|_E.$$

On conclut en prenant la constante de Lipschitz $L:=\max(\frac{4M}{r},L)$.

Théorème 3.10 *Soit $\psi : I\times U \longrightarrow E$ une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport à x. Soient (J_1,x_1) et (J_2,x_2) deux solutions locales du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t)=\psi(t,x(t)) \\ x(t)=x_0. \end{cases}$$

Alors

$$x_1|_{J_1\cap J_2} = x_2|_{J_1\cap J_2}.$$

Démonstration :
Soit $I \subset J_1 \bigcap J_2$ un intervalle compact, et soit $K = x_1(I) \bigcup x_2(I)$ qui est donc compact. Le lemme précédent implique que ψ est globalement lipschitzienne sur $J \times K$. On en déduit que $x_1|_I = x_2|_I$. Le fait que I soit un compact arbitraire de $J_1 \bigcap J_2$ montre le résultat.

Corollaire 3.5 *Sous les hypothèses du théorème précédent, si deux solutions de l'équation* $x'(t) = \psi(t, x(t))$ *coïncident en un point, elle coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition.*

3.2.5 Solution maximale

Théorème 3.11 *(Existence d'une unique solution maximale)*
Sous les hypothèses du Théorème 3.7, il existe une unique solution maximale (J, x) *au problème* (3.1). *De plus* J *est ouvert de* I.

Démonstration : On pose

$$t^+ = \max\{\tilde{t} : \text{il existe une solution sur } [t_0, \tilde{t}]\},$$

$$t^- = \min\{\tilde{t} : \text{il existe une solution sur } [\tilde{t}, t_0]\}.$$

On définit une solution sur $]t^-, t^+[$ en recollant les morceaux de la façon suivante : si $t \in]t^-, t^+[$ avec $\tilde{t} > t_0$, alors il existe $\tilde{t} > t$ tel que $([t_0, \tilde{t}], \tilde{x})$ soit solution. On pose alors $x(t) = \tilde{x}(t)$. Par unicité locale, ceci définit bien une solution.

Supposons maintenant que t^+ soit dans l'intérieur (relatif) de I. Alors on peut résoudre le problème

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) = \psi(t, \tilde{x}(t)) \\ \tilde{x}(t^+) = x(t^+) \end{cases}$$

ce qui fournit une solution sur $[t^+, t^+ + \varepsilon]$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Ceci est impossible. Le même raisonnement montre que t^+ et t^- ne sont pas dans l'intérieur de I.

3.2.6 Solutions approchées

On suppose que $E = \mathbb{R}^n$ (dimension finie). I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $U \subset E$ un ouvert connexe. On considère à nouveau le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \psi(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

avec $\psi : I \times U \longrightarrow E$ continue.

Définition 3.16 (*ε-solution approchée*)
Soit $\varepsilon > 0$, $J \subset I$ *et* $x : J \longrightarrow U$. *On dit que* (J, x) *est une* ε*-solution approchée si*

1. J *est d'intérieur non vide et* $t_0 \in J$,
2. $x \in \mathcal{C}(J, U)$
3. $x(t_0) = x_0$

4. *Pour tout* $t \in J$,

$$\|x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} \psi(s, x(s))ds\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \varepsilon$$

Lemme 3.4 *Soient* $\psi \in \mathcal{C}(I \times U, E)$, $(t_0, x_0) \in I \times U$, $\mu, r > 0$ *tels que*

$$I_\mu = [t_0 - \mu, t_0 + \mu] \subset I \quad et \quad \bar{B}_r(x_0) \subset U.$$

On pose

$$\begin{array}{rcl} C_{\mu,r} & = & I_\mu \times \bar{B}_r(x_0) \\ M & = & \max \|\psi(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \\ \tilde{\mu} & = & \min(\mu, \dfrac{r}{M}) \end{array}$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe une* ε*-solution approchée* $x_\varepsilon \in \mathcal{C}(I_{\tilde{\mu}}, \bar{B}_r(x_0))$. *De plus,*

$$\forall t, s \in I_{\tilde{\mu}}, \quad \|x(t) - x(s)\| \leqslant M|t - s|.$$

Démonstration :
L'ensemble $C_{\mu,r}$ étant compact, la fonction $\psi|_{C_{\mu,r}}$ est uniformément continue (hypothèse de dimension finie). Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que si $\|x - \bar{x}\|_{\mathbb{R}^n}$ et $|t - \bar{t}| < \delta$ alors

$$\|\psi(t,x) - \psi(\bar{t}, \bar{x})\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\tilde{\mu}}. \tag{3.2}$$

Considérons alors des points t_i , $i = -n, \ldots, n$, tels que

$$t_0 - \tilde{\mu} = t_{-n} < t_{-n+1} < \cdots < t_0 < \cdots < t_n = t_0 + \tilde{\mu}$$

et tels que

$$\max_{i=-n,\cdots,n-1} |t_{i+1} - t_i| \leqslant \min(\delta, \frac{\delta}{M}).$$

On définit alors

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} x_\varepsilon(t_i) + (t - t_i) f(t_i, x_\varepsilon(t_i)), & \text{pour} \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i \geqslant 0 \\ x_\varepsilon(t_{i+1}) + (t - t_{i+1})\psi(t_{i+1}, x_\varepsilon(t_{i+1})) & \text{pour} \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i \leqslant -1. \end{cases}$$

A priori, cette fonction est définie sur un intervalle du type $[t_{-\tilde{k}}, t_k]$ avec $\tilde{k}$,$k \leqslant n$ où k est défini comme le plus petit indice pour lequel il existe $t \in [t_{k-1}, t_k]$ tel que $x_\varepsilon(t_i) + (t - t_i)\psi(t_i, x_\varepsilon(t_i))$ ne soit pas dans $B_r(x_0)$ ($\tilde{k}$ est défini similairement). Pour $t \in [t_0, t_k]$. on a

$$\begin{array}{rcl} \|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t_0)\| & \leqslant & \|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t_{k-1})\| \\ & + & \displaystyle\sum_{l=1}^{k-1} \|x_\varepsilon(t_l) - x_\varepsilon(t_{l-1})\| \\ & \leqslant & (t - t_{k-1})\|\psi(t_{k-1}, x_\varepsilon(t_{k-1})\| \\ & + & \displaystyle\sum_{l=1}^{k-1} (t_l - t_{k-1})\|\psi(t_{l-1}, x_\varepsilon(t_{l-1})\| \\ & \leqslant & M(t - t_0) \\ & \leqslant & M\tilde{\mu} \\ & \leqslant & r. \end{array}$$

Ainsi on obtient que x_ε ne sort pas de $\bar{B}_r(x_0)$ et ceci montre que $K = n$. Le même raisonnement montre que $\tilde{K} = n$, et de plus pour t et s dans $I_{\tilde{\mu}}$ on a

$$\|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(s)\| \leqslant M|t-s|. \tag{3.3}$$

Enfin, pour $0 \leqslant \ell < n$ et $t \in [t_0, t_{l+1}]$, on a

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) - x_0 - \int_{t_0}^t \psi(s, x_\varepsilon(s))ds &\leqslant (t - t_\ell)\psi(t_\ell, x_\varepsilon(t_\ell)) + \sum_{i=0}^{\ell-1}(t_{i+1} - t_i)\psi(t_i, x_\varepsilon(t_i)) \\ &- \int_{t_0}^t \psi(s, x_\varepsilon(s))ds \\ &= \int_{t_0}^t \Big[\psi(t_\ell, x_\varepsilon(t_\ell)) - \psi(s, x_\varepsilon(s))\Big]ds \\ &+ \sum_{i=0}^{\ell-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big[\psi(t_i, x_\varepsilon(t_i)) - \psi(s, x_\varepsilon(s))\Big]ds. \end{aligned}$$

Notons que pour un i fixé et $s \in [t_i, t_{i+1}]$, on a évidemment $|s - t_i| < \delta$ et

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon(t_i) - x_\varepsilon(s)\|_{\mathbb{R}^n} &\leqslant |t_i - s| \\ &\leqslant M\frac{\delta}{M} = \delta. \end{aligned}$$

L'inégalité (3.2) peut donc s'appliquer, et on obtient

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon(t) - x_0 - \int_{t_0}^t \psi(s, x_\varepsilon(s))ds\|_{\mathbb{R}^n} &\leqslant \frac{\varepsilon}{\widetilde{\mu}}(t - t_0) \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Le même raisonnement pour $t \leqslant t_0$ montre le résultat.

Théorème 3.12 *(Cauchy Peano)*
Avec les notations et les hypothèses utilisées dans le lemme précédent, il existe au moins une solution locale définie sur $I_{\tilde{\mu}}$. De plus $x \in \mathcal{C}^1(I_{\tilde{\mu}}, \bar{B}_r(x_0))$.

Démonstration :
On utilise le lemme précédent, avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$. On note $x_n \in \mathcal{C}(J, \bar{B}_r(x_0)))$ la $\frac{1}{n}-$solution approchée. Le point important ici que $\widetilde{\mu}$ et M ne dépendent pas de n dans l'éstimation (3.3).
On utilise le théorème d'Ascoli-Arzéla avec $Y = \mathbb{R}^n$, $X = I_{\widetilde{\mu}}$, et $\mathcal{H} = \{x_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$. En utilisant (3.3) on voit que $\mathcal{H}$ est équicontinue (en prenant $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$.) De plus pour tout $t \in I_{\widetilde{\mu}}$ on a montré que

$$\mathcal{H} = \{x_n(t) : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B_r}(x_0)$$

et donc $\mathcal{H}(t)$ est relativement compacte. On en déduit donc qu'il existe une sous suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathcal{C}(I_{\widetilde{\mu}}, \bar{B}_r(x_0)))$. Enfin on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n_k}(t) - x_0 - \int_{t_0}^t \psi(s, x_{n_k}(s))ds\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{1}{n_k},$$

ce qui montre que l'expression du membre de gauche tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Mais on a vu que x_{n_k} tend vers x uniformément sur I_{mu}. Ceci implique en particulier que

$$\int_{t_0}^{t} \psi(s, x_{n_k}(s))ds \longrightarrow \int_{t_0}^{t} \psi(s, x_{n_k}(s))ds, \qquad \text{pour} \quad k \longrightarrow +\infty$$

On en déduit donc que

$$\forall t \in J \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi(s, x(s))ds,$$

ce qui montre le résultat.

Théorème 3.13 *Sous les hypothèses précédentes, il existe une solution maximale définie sur un intervalle ouvert J de I.*

Remarque 3.7 *Pour toute solution locale, il existe une solution maximale qui la prolonge.*

3.3 Continuité par rapport à la condition initiale

On considère cette fois $f : I \times E \longrightarrow E$ une fonction globalement Lipschitzienne par rapport à y. On note $t \longrightarrow x(t, x_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

La proposition suivante montre la continuité de la solution par rapport à la condtion initiale $x(t_0) = x_0$.

Proposition 3.2 *Avec les notations précédentes, pour tout intervalle J compact inclus dans I, l'application*

$$E \longrightarrow \mathcal{C}(J, E)$$

$$x_0 \longmapsto x_0(t, x_0)$$

est continue, et de plus pour tout x_0 et $\tilde{x}_0$ dans E, on a l'estimation

$$\forall t \in J \quad \|x(t, x_0) - x(t, \tilde{x}_0)\| \leqslant e^{L|t-t_0|}\|y_0 - \tilde{x}_0\|.$$

Démonstration : On a par définition pour tout $J \subset I$ compact,

$$\forall t \in J \quad x(t, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, x_0))ds,$$

d'où

$$x(t, x_0) - x(t, \tilde{x}_0) = x_0 - \tilde{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \big[f(s, x(s, x_0)) - f(s, x(s, \tilde{x}_0))\big]ds,$$

ce qui donne la majoration

$$\forall t \in J \quad \|x(t, x_0) - x(t, \tilde{x}_0)\| \leqslant \|x_0 - \tilde{x}_0\| + L \int_{t_0}^{t} \|x(s, x_0) - x(s, \tilde{x}_0)\|ds.$$

Le lemme de Gronwall donne alors immédiatement le résultat. On vérifiera en exercice qu'en fait l'application

$$J \times E \longrightarrow E$$

$$(t, x_0) \longmapsto x(t, x_0)$$

est continue. On se place maintenant dans le cas localement Lipschitz décrit plus haut.

Proposition 3.3 *Avec les notations habituelles, soit $f : I \times U \longrightarrow E$ une fonction localement lipschitizienne. Alors pour tout x_0 dans U, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et $\mu > 0$ tel que pour tout $\tilde{x}_0$ dans $\mathcal{V}$, il existe une unique solution sur l'intervalle $I_\mu = [t_0 - \mu, t_0 + \mu]$. De plus l'application*

$$\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{C}(I_\mu, U)$$

$$\tilde{x}_0 \longmapsto x(., \tilde{x}_0)$$

est continue.

Démonstration : On reprend la construction du théorème 2.5 (Existence d'une unique solution). Partant de l'hypothèse f continue et localement lipschitzienne sur $[t_0 - \mu, t_0 + \mu] \times B_r(x_0)$, on a obtenu l'existence d'une solution unique sur l'intervalle $[t_0 - \mu, t_0 + \mu]$ avec $\tilde{\mu} = \min(\mu, \frac{r}{2M})$. De plus, la solution obtenue satisfait

$$\|x(t, x_0) - x_0\| \leqslant \frac{r}{2}$$

de sorte que $x(t, x_0)$ ne sort pas de la boule de centre x_0 et de rayon $\frac{r}{2}$. Considérons maintenant $\tilde{x}_0 \in B_{\frac{r}{4}}(x_0)$. On peut à nouveau construire une solution sur un intervalle $[t_0 - \mu, t_0 + \mu]$ en prenant cette fois $\tilde{\mu} = \min(\mu, \frac{r}{4M})$, de sorte que

$$\|x(t, \tilde{x}_0) - \tilde{x}_0\| \leqslant \frac{r}{4}.$$

Ainsi, on a :

$$\|x(t, \tilde{x}_0) - x_0\| \leqslant \|x(t, \tilde{x}_0) - \tilde{x}_0\| + \|\tilde{x}_0 - x_0\| \leqslant \frac{r}{2}$$

c'est-à-dire que $x(t, \tilde{x}_0)$ ne sort pas de la boule $B_{\frac{r}{2}}(x_0)$ sur l'intervalle

$$[t_0 - \mu, t_0 + \mu] \subset [t_0 - \mu, t_0 + \mu]$$

Donc les deux solutions $y(t, x_0)$ et $x(t, \tilde{x}_0)$ sont bien définies sur $[t_0 - \mu, t_0 + \mu]$ et restent dans $B_{\frac{r}{2}}(x_0)$. Elles coincident donc avec les solutions de $x' = f(t, x)$ avec conditions initiales $x(t_0, x_0) = x_0$ et $x(t, \tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$. Comme f est globalement lipschitzienne, on a la dépendance continue.

3.4 Continuité par rapport à un paramètre

Théorème 3.14 *Considérons l'équation différentielle*

$$x' = f(t, x, \lambda) \tag{3.4}$$

où f est une application continue de $I \times E \times \Pi$ à valeurs dans E, lipschitzienne par rapport à x. Soient $t_0(\lambda) = t_0 \in I$ et $x_0(\lambda) = x_0 \in E$. On suppose que les applications

$$\lambda \in \Pi \longrightarrow t_0(\lambda) \in I, \quad \text{et} \quad \lambda \in \Pi \longrightarrow x_0(\lambda) \in E$$

sont continues. Soit $x : I \times \Pi \longrightarrow E$ l'unique solution de

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0, \lambda) = x_0(\lambda). \end{cases}$$

Alors $x(t, \lambda)$ converge uniformément vers $x(t, \lambda_0)$ sur tout compact de I lorsque λ tend vers λ_0.

Démonstration :
Notons par $x(., \lambda)$ la solution de l'équation différentielle (3.4) correspondant à la condition initiale $(t_0(\lambda), x_0(\lambda))$. On a

$$x(t, \lambda) = x_0(\lambda) + \int_{t_0(\lambda_0)}^{t} f(v, x(v, \lambda), \lambda) dv$$

et

$$x(t, \lambda_0) = x_0(\lambda_0) + \int_{t_0(\lambda_0)}^{t} f(v, x(v, \lambda_0), \lambda_0) dv.$$

Posons

$$\psi(t) = x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0).$$

Alors

$$\begin{aligned} \psi(t) &= x_0(\lambda) - x_0(\lambda_0) + \int_{t_0(\lambda_0)}^{t} f(v, x(v, \lambda), \lambda) dv \\ &\quad - \int_{t_0(\lambda_0)}^{t} f(v, x(v, \lambda_0), \lambda_0) dv \\ &= x_0(\lambda) - x_0(\lambda_0) + \int_{t_0(\lambda_0)}^{t_0(\lambda)} f(v, x(v, \lambda_0), \lambda_0) dv \\ &\quad + \int_{t_0(\lambda_0)}^{t} \Big(f(v, x(v, \lambda_0) + \psi(v), \lambda) - f(v, x(v, \lambda_0), \lambda_0) \Big) dv. \end{aligned}$$

Posons

$$y_0 = x_0(\lambda) - x_0(\lambda_0) + \int_{t_0(\lambda_0)}^{t_0(\lambda)} f(v, x(v, \lambda_0), \lambda_0) dv$$

et

$$\varphi(t, x) = f(t, x(t, \lambda_0) + x, \lambda) - f(t, x(t, \lambda_0), \lambda_0).$$

L'application φ est continue et lipschitzienne par rapport à x à valeurs dans E, puisque pour tout $t \in I$ et $(x_1, x_2) \in E^2$ on a

$$\begin{aligned} \|\varphi(t, x_2) - \varphi(t, x_1)\| &= \|f(t, x(t, \lambda_0) + x_2, \lambda) - f(t, x(t, \lambda_0) + x_1, \lambda)\| \\ &\leqslant k\|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

L'application ψ vérifie l'égalité

$$\psi(t) = y_0 + \int_{t_0(\lambda)}^{t} \varphi(v, \psi(t))dv.$$

On en déduit que ψ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \varphi(t, x(t)) \\ \psi(t_0) = y_0. \end{cases}$$

De plus on a

$$\varphi(t, 0) = 0.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz on obtient

$$\|\psi(t)\| \leqslant e^{k|t-t_0(\lambda_0)|}\Big(\|x_0(\lambda) - x_0(\lambda_0)\| + \int_{t_0(\lambda_0)}^{t_0(\lambda)} f(v, x(v, \lambda_0), \lambda_0)\|dv\Big)$$

ce qui donne

$$\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| \leqslant e^{k|t-t_0(\lambda_0)|}\Big(\|x_0(\lambda) - x_0(\lambda_0)\| + \int_{t_0(\lambda_0)}^{t_0(\lambda)} f(v, x(v, \lambda_0), \lambda_0)\|dv\Big).$$

Par conséquent $x(t, \lambda)$ converge uniformément vers $x(, \lambda_0)$ quand $\lambda \longrightarrow \lambda_0$.

Remarque 3.8 *Le résultat n'est pas vrai sur tout compact de I si f est seulement localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.*

3.5 Exercices

Exercice 3.1 *Montrer que pour l'équation différentielle définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$y' = \begin{cases} 0 & si \quad y < 0, \\ \sqrt{y} & si \quad y \geq 0. \end{cases}$$

il n'y a pas unicité au problème de Cauchy.

Exercice 3.2 *Soit*

$$E : y' = x^2 + y^2.$$

① *Justifier l'existence d'une unique solution maximale* y *de* E *vérifiant* $y(0) = 0$.
② *Montrer que* y *est une fonction impaire.*
③ *Etudier la monotonie et la concavité de* y.
④ *Montrer que* y *est définie sur un intervalle borné de* $\mathbb{R}$.

Exercice 3.3 *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+xy} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

① *Montrer que le problème possède une solution maximale unique.*
② *Montrer que celle-ci est impaire et strictement croissante.*
③ *Etablir qu'elle est définie sur* $\mathbb{R}$.
④ *Déterminer la limite en* $+\infty$ *de cette solution.*

Exercice 3.4 *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = e^{-xy} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

① *Montrer que le problème possède une solution maximale unique.*
② *Montrer que celle-ci est impaire.*
③ *Montrer qu'elle est définie sur* $\mathbb{R}$.
④ *Montrer qu'elle possède une limite finie* a *en* $+\infty$.

Exercice 3.5 *On considère le problème suivant :*

$$y' = \cos(xy), \qquad y(0) = 0. \qquad (*)$$

① *Justifier l'existence d'une unique solution maximale* y *de* $(*)$.
② *En observant que*

$$y(x) = y_0 + \int_0^x \cos(ty)dt$$

montrer que y *est définie sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3.6 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$(E)\left\{\begin{array}{l}(x^2+e^y)y'+2xy+\cos x=0\\ y(0)=0\end{array}\right.$$

① **M***ontrer que l'équation (E) admet une unique solution maximale φ de classe C^1.*
② **M***ontrer que l'équation (E) est totale. En déduire que φ est solution de l'équation implicite* $x^2\varphi(x)+e^{\varphi(x)}+\sin x=1$.
③ **M***ontrer que la solution φ est globale.*

Exercice 3.7 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$(E)\left\{\begin{array}{l}y'=2xe^{-x^2}+\dfrac{y^5}{1+y^4}\cos(xe^y)\\ y(0)=1.\end{array}\right.$$

① **M***ontrer que l'équation (E) admet une unique solution maximale φ de classe C^1.*
② **E***n utilisant la formule intégrale de (E) montrer que*

$$|\varphi(x)|\leqslant 2+\int_0^x|\varphi(s)|ds,\qquad \forall x\in I$$

③ **E***n déduire que* $\quad |\varphi(x)|\leqslant 2e^{|x|},\qquad \forall x\in I$
④ **M***ontrer que $I=\mathbb{R}$.*

Exercice 3.8 *Soient ψ et $y:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^+$ deux fonctions continues vérifiant*

$$y(t)\leqslant\alpha+\int_a^t\psi(s)y(s)ds,\qquad\forall t\in[a,b],\quad\alpha\geqslant 0.$$

Alors

$$y(t)\leqslant\alpha\exp\Big(\int_a^t\psi(s)\Big),\qquad\forall t\in[a,b],\quad\alpha\geqslant 0.$$

Exercice 3.9 *Soient $b>0$, $a\in\mathbb{R}$, et $w:[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que*

$$w(t)\leqslant a+b\int_0^t w(s)ds,\qquad\forall t\in[0,T].$$

M*ontrer que pour tout $t\in[0,T]$ on a*

$$w(t)\leqslant ae^{bt}.$$

Exercice 3.10 *Soit $y:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant*

$$\|y'(t)\|\leqslant\beta+\alpha\|y(t)\|,\qquad\forall t\in[a,b],\quad\alpha>0,\,\beta\geqslant 0.$$

Alors

$$\|y(t)\|\leqslant\|y(a)\|e^{\alpha(t-a)}+\frac{\beta}{\alpha}\Big(e^{\alpha(t-a)}-1\Big),\qquad\forall t\in[a,b],\quad\alpha\geqslant 0.$$

Chapitre 4

Systèmes différentiels

4.1 Notions fondamentales et définitions

Définition 4.1 *(Système canonique)*
Un système d'équations différentielles ordinaires

$$F_k(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n)}) = 0 \quad k = 1, 2, ..., n \qquad (1)$$

résolu par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé $y_1^{(k_1)}$ $y_2^{(k_2)}$ *, ... ,* $y_n^{(k_n)}$*) s'appelle système canonique .*
On appelle ordre du système (1) le nombre p *égale à* $p = k_1 + k_2 + ... + k_n$*.*
Intégrer ce système c'est déterminer les fonctions $y_1, y_2, ..., y_n$ *vérifiant les équations du système*

Exemple 4.1 *Ramener à la forme canonique le système :*

$$\begin{cases} y_2 y_1' - \ln(y_1'' - y_1) = 0, \\ e^{y_2'} - y_1 - y_2 = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Solution : Le système considéré est du troisième ordre. En résolvant la première équation par rapport à y_1''

$$\begin{aligned} (1) \iff & y_2 y_1' = \ln(y_1'' - y_1) \\ \iff & e^{y_2 y_1} = y_1'' - y_1 \\ \iff & y_1'' = e^{y_2 y_1} + y_1 \end{aligned}$$

En résolvant la dexième équation par rapport à y_2'

$$\begin{aligned} (2) \iff & e^{y_2'} = y_1 + y_2 \\ \iff & y_2' = \ln(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

alors (1) devient :

$$\begin{cases} y_1'' = e^{y_2 y_1'} + y_1, \\ y_2' = \ln(y_1 + y_2) \end{cases} \tag{4.2}$$

4.1.1 Système différentiel du premier ordre

Définition 4.2 *Définition : Soit $x_1, x_2, ...x_n$ n fonctions dérivables de la variable t on appelle système d'équations différentielles du 1^{er} ordre tout système d'équ*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, ..., x_n) \\ \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, ..., x_n). \end{cases} \tag{4.3}$$

On démontre que si la fonction $x_1 = \varphi_1(t)$ vérifie le système (1) elle vérifie le système (2)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = g_2(t, x_1, ..., x_n) \\ \\ \dfrac{d^nx_1}{dt^n} = g_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{4.4}$$

obtenu en dérivant $(n-1)$ fois successivement la 1^{re} équation et en tenant compte des équations suivantes, et par conséquent l'équation différentielle d'ordre n appelée **équation résolvante**

$$F(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{d^nx_1}{dt^n}) = 0 \qquad (3)$$

obtenue en éliminant $x_2, x_3, ..., x_n$ entre les équations du système (2).
On admettra que réciproquement si $x_1 = \varphi_1(t, \lambda_1, ..., \lambda_n)$ représente l'intégrale générale de l'équation (3) ($\lambda_1, \lambda_2..., \lambda_n$ étant n constantes arbitraires)la solution du système différentiel s'obtient sans nouvelle intégration en résolvant en $x_2, x_3, ..., x_n$ les $(n-1)$ premières équations du système (2)
La solution générale d'un système différentiel du 1^{er} ordre peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, \lambda_1, ..., \lambda_n) \\ x_2 = \varphi_2(t, \lambda_1, ..., \lambda_n) \\ \\ x_n = \varphi_n(t, \lambda_1, ..., \lambda_n) \end{cases} \tag{4.5}$$

elle dépend de n constantes arbitraires.

Exemple 4.2 *Intégrer le système différentiel*

$$\begin{cases} t\dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 \\ t\dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 2x_2. \end{cases} \tag{4.6}$$

On associe à ce système une équation différentielle d'ordre 2 en x_1 par exemple. En effet la première équation se dérive en :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} + t\frac{d^2x_1}{dt^2} &= 3\frac{dx_1}{dt} + 2\frac{dx_2}{dt} \\ &= 3\frac{dx_1}{dt} + 2\Big[\frac{-2}{t}(x_1 + x_2)\Big] \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} t\frac{d^2x_1}{dt^2} - 2\frac{dx_1}{dt} - \frac{4}{t}(x_1 + x_2) &= 0 \\ t^2\frac{d^2x_1}{dt^2} - 2t\frac{dx_1}{dt} - 4(x_1 + x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Or d'aprés la première équation

$$x_2 = \frac{1}{2}\Big(t\frac{dx_1}{dt} - 3x_1\Big)$$

Aprés simplification on obtient donc l'équation suivante

$$t^2\frac{d^2x_1}{dt^2} - 2x_1 = 0$$

équation linéaire du second ordre dont on peut chercher des solutions particulières de la forme $x_1 = t^r$. L'identification conduit à l'équation du second degré $r(r-1) - 2 = 0$ dont les racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$

D'où $x_1 = \lambda_1\frac{1}{t} + \lambda_2 t^2 \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}\Big(t\frac{dx_1}{dt} - 3x_1\Big) \\ &= \frac{-2\lambda_1}{t} - \frac{\lambda_2}{2}t^2 \end{aligned}$$

la solution générale cherchée s'écrit donc

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda_1}{t} + \lambda_2 t^2 \\ x_2 = \dfrac{-2\lambda_1}{t} - \dfrac{\lambda_2}{2}t^2 \end{cases} \tag{4.7}$$

qui dépend de deux constantes λ_1 et λ_2

Remarque 4.1 *L'élimination de x_1 conduit à la même équation différentielle du second ordre en x_2*

$$t^2\frac{d^2x_2}{dt^2} - 2x_2 = 0.$$

Définition 4.3 *(Forme normale)*
un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad k = 1, 2, ..., n \qquad (*)$$

où t est une variable indépendante et $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des fonctions inconnues de t s'appelle système normal.
Le nombre n s'appelle ordre du système normal $(*)$

Remarque 4.2 *On dit que deux systèmes d'équations différentielles sont équivalents s'ils possèdent les même solutions.*

Remarque 4.3 *Tout système canonique peut être ramené au système normal équivalent et l'ordre de ces systèmes sera le même.*

Exemple 4.3 *Ramener au système normal le système d'équations différentielles suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_3}{dt^2} - y = 0 \\ t^3\dfrac{dy}{dt} - 2x = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Solution :
Posons $x = x_1$, $\dfrac{dx}{dt} = x_2$, $y = x_3$ alors on aura
$\dfrac{dx_1}{dt} = x_2$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dx_3}{dt}$ et le système donné sera ramené au système normal du troisième ordre suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{2x_1}{t^3}. \end{cases} \tag{4.9}$$

4.2 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre

Définitions 4.1 (Vecteur, valeur et sous espace propre)
Un vecteur non nul $x \in E$ est un **vecteur propre** *de f s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Le scalaire λ est la valeur propre associée à x.*
Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** *de f s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$. Le vecteur $x$est un vecteur propre associé à λ.*
L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E : f(x) = \lambda x\} = \ker(f - \lambda Id_E)$ est le **sous-espace propre** *associé à λ.*
Le **spectre** *de f est l'ensemble $S_p(f)$ des valeurs propres de f.*

Propriétés :

1. λ est une valeur propre de f si, et seulement si,

$$\ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}.$$

2. En particulier, 0 est valeur propre de f si, et seulement si,

$$\ker f \neq \{0\}, \quad \text{soit } f \text{ non injectif}$$

3. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres toutes distinctes, est libre.
4. La somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Définition 4.4 (Polynôme caractéristique)
Soit E de dimension finie et A une matrice carrée représentant un endomorphisme f dans une base fixée.
Le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ est le polynôme caractéristique de A.

Propriétés :

1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, ce qui permet de définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.
2. Les zéros de P_A sont les valeurs propres de A. Si λ est racine d'ordre m_λ A de P_A, on dit que λ est valeur propre d'ordre m_λ.
3. On a toujours $1 \leq m_\lambda \leq \dim(E_\lambda)$ où E_λ est l'espace propre associé.
4. Cas où P_A est scindé. On a alors :

$$trA = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k, \qquad \text{et} \qquad \det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Diagonalisation :
Soit E de dimension finie.

Définitions 4.2 *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est* **diagonalisable** *s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, c'est-à-dire s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.*
Une matrice carrée A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale D, c'est-à-dire si elle s'écrit :

$$A = PDP^{-1}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de A.

Si $\dim E = n$ et si f a n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.
Trigonalisation :

Définition 4.5 *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est* **trigonalisable** *s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.*
Une matrice carrée A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 4.1 *Si le polynôme caractéristique de f est scindé, f est trigonalisable.*

En particulier, tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Définition 4.6 (*Polynôme annulateur*)
On dit que Pest un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$.

Théorème 4.2 *(Théorème de Cayley-Hamilton)*
Si E est de dimension finie, le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f.

Définition 4.7 *On appelle système différentiel linéaire du premier ordre un système de la forme*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

dans lequel les fonctions $a_{ij}(t)$ et $b_i(t)$ sont supposées continues sur un sous ensemble I de $\mathbb{R}$. En utilisant la notation matricielle un tel système s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t) + B(t). \qquad (*)$$

Cette dernière écriture s'appelle système différentiel avec second membre.
▶ Si $B(t) = 0$ le système $(*)$ s'appelé système homogène (ou sans second membre).
▶ Lorsque les fonctions a_{ij} sont constantes on dit qu'il s'agit d'un système à coefficients constants.
▶ Comme dans le cas des équations différentielles linéaires la solution générale du système $(*)$ s'obtient en ajoutant à une solution particulière la solution générale du système homogène associé $\left(\dfrac{dX}{dt} = AX(t)\right)$.

Remarque 4.4 *Il est toujours possible de ramener l'intégration du système $X'(t) = AX(t)$ à celle d'une équation différentielle d'ordre n.*

4.2.1 Système différentiel linéaire à coefficients constants

Si la matrice $A = (a_{ij})$ est à coefficients constants, on peut considérer la matrice comme représentant les composantes d'un vecteur x d'un espace vectoriel E (dim $E = n$) rapporté à une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, l'écriture matricielle équivaut alors à l'écriture vectorielle $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$.

4.2.2 Exponentielle d'une matrice

Théorème 4.3 *La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$ converge normalement sur toute partie bornée de $M_n(\mathbb{K})$.*

Preuve : Soit E une partie bornée de $M_n(\mathbb{K})$ il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall A \in E \ \ \|A\| \leqslant M$ on alors :

$$\|\frac{1}{k!}A^k\| \leqslant \frac{1}{k!}\|A\|^k \leqslant \frac{M^k}{k!}$$

comme $\sum_{k\geq 0} \frac{M^k}{k!}$ est convergente
alors $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$ est normalement convergente.

Définition 4.8 *On appelle exponentielle d'une matrice et on note* exp, *l'application de* $M_n(\mathbb{K})$ *dans* $M_n(\mathbb{K})$ *définie par*

$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{K}) \quad \exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

$$\left(e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots\right).$$

Définition 4.9 (*Matrice diagonalisable*)
La matrice A est dite diagonalisable s'il existe deux matrice D diagonale et P inversible tel que $A = PDP^{-1}$.

Définition 4.10 (*Matrice nilpotente*)
On dit qu'une matrice A est nilpotente s'il existe un entier k tel que $A^k = 0$.

Propriétés 4.1 *L'exponentielle d'une matrice a les propriétés suivantes*
① $e^0 = I_n + 0 + \frac{1}{2}0^2 + \cdots = I_n$
② $AB = BA \Longrightarrow e^{A+B} = e^A.e^B = e^B.e^A$
③ $e^A \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
④ e^{tA} *est dérivable et* $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.
⑤ *Si A est diagonalisable* ($A = PDP^{-1}$) *alors* $e^A = Pe^DP^{-1}$
⑥ *Si A est nilpotente d'indice k alors* $e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k$.

Exemple 4.4 *Calculons l'exponentielle de la matrice A.*
1. La matrice A est diagonale.
$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \Longrightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^y \end{pmatrix}$.
2. La matrice A est diagonalisable :
$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$, *avec*
$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Donc

$$\begin{aligned} e^A = PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-1} & e^2 \\ e^{-1} & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-1} + e^2 & e^{-1} - e^2 \\ -e^{-1} + e^2 & e^{-1} - e^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. La matrice A est nilpotente :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *donc A est nilpotente d'indice 2, alors*

$$e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.3 Décomposition de Dunford

Si A a un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$ alors il existe un couple unique (D, N) de matrices tel que

1. $A = D + N$
2. D est diagonalisable, N nilpotente
3. $N \circ D = D \circ N$

Remarque 4.5

$$e^A = e^D \cdot e^N = e^N \cdot e^D.$$

Théorème 4.4 *Soit* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ *L'unique solution de*

$$X'(t) = AX(t)$$

vérifiant $X(t_0) = X_0$ *est donnée par*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad X(t) = e^{(t-t_0)A}.X_0.$$

Exemple 4.5 *Résoudre le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \\ x(0) = \alpha, \quad y(0) = \beta, \quad z(0) = \gamma \end{cases} \qquad (*)$$

La matrice associée au système $(*)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda - 1)^3. \end{aligned}$$

On peut écrire $N = A - I_3$, *avec*
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = 0_3.$$
Comme $N^3 = 0_3$, N *est nilpotente d'indice 3 alors*

$$A = I_3 + N \Longrightarrow tA = tI_3 + tN.$$

Donc

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tI_3+tN} \\ &= e^{tI_3} \cdot e^{tN} \\ &= e^t(I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2) \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1+t & t^2 & t+t^2 \\ t & 1-2t+t^2 & -t+t^2 \\ -t & 2t-t^2 & 1+t-t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors l'unique solution $X(0)$ *valant* $X_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *est* $X(t) = e^{tA}.X(0)$ *avec*

$$\begin{cases} x(t) = \alpha(1+t)e^t + \beta t^2 e^t + \gamma(t+t^2)e^t \\ y(t) = \alpha t e^t + \beta(1-2t+t^2)e^t + \gamma(-t+t^2)e^t \\ z(t) = -\alpha t e^t + \beta(2t-t^2)e^t + \gamma(1+t-t^2)e^t \end{cases}$$

4.3 Système différentiel linéaire à coefficients constants

On va étudier les systèmes différentiels linéaires suivants

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$ La résolution de $X'(t) = AX(t)$ avec A est diagonalisable.

4.3.1 Système différentiel linéaire homogène à coefficients constants

4.3.2 Cas où A est diagonalisable

A est diagonalisable donc il existe deux matrices P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ alors

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff X' = PDP^{-1}X \\ &\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \end{aligned}$$

Posons $P^{-1}X = Y$, $(Y' = P^{-1}X')$. donc

$$X' = AX \iff \begin{cases} Y = P^{-1}X \\ Y' = DY \end{cases}$$

En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$

donc

$$\begin{aligned} Y' = DY \iff Y' &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

par conséquent

$$X(t) = PY(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

Exemple 4.6 *Résoudre le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y - 4z \\ y' = -2x + 3y + 2z \\ z' = 3x - 3y - 4z \end{cases} \qquad (*)$$

La matrice associée au système $(*)$ *est*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Le polynome caractéristique :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1) \end{aligned}$$

Les valeurs propres :

$$\begin{aligned}(\lambda \textit{ est une valeur propre de } A) &\iff \det(A-\lambda I_3)=0\\ &\iff -(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda+1)=0\\ &\iff \lambda=2 \textit{ ou } \lambda=1 \textit{ ou } \lambda=-1.\end{aligned}$$

Donc P_A admet trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1=2, \quad \lambda_2=1, \quad \lambda_3=-1.$
Les vecteurs propres :

$$V_{-1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad V_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Donc

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}, \qquad P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

d'où $\quad Y(t)=\begin{pmatrix}c_1e^{-t}\\c_2e^{t}\\c_3e^{2t}\end{pmatrix}$

par conséquent

$$\begin{aligned}X(t) &= PY(t)\\ &= \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1e^{-t}\\c_2e^{t}\\c_3e^{2t}\end{pmatrix} \qquad (c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3\\ &= \begin{cases}x=c_1e^{-t}+c_2e^{t}\\ y=c_2e^{t}+c_3e^{-2t}\\ z=c_1e^{-t}+c_3e^{2t}\end{cases} \qquad (c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3\end{aligned}$$

donc la solution du système $(*)$ est

$$X(t)=\begin{cases}x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{t}\\ y(t)=c_2e^{t}+c_3e^{-2t}\\ z(t)=c_1e^{-t}+c_3e^{2t}\end{cases} \qquad (c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3.$$

4.3.3 Cas où A est trégonalisable

A est trégonalisable donc il existe deux matrices P inversible et T tréongulaire telles que $A=PTP^{-1}$ alors

$$\begin{aligned}X'=AX &\iff X'=PTP^{-1}X\\ &\iff P^{-1}X'=TP^{-1}X\end{aligned}$$

Posons $\quad P^{-1}X=Y, \quad (Y'=P^{-1}X')$. donc

$$X'=AX \iff \begin{cases}Y=P^{-1}X\\ Y'=TY\end{cases}$$

En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$, $\quad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

on a donc

$$Y' = TY \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{nn}y_n. \end{cases}$$

On résout ce système différentiel en portant de la dernière équation. Par conséquent

$$X(t) = PY(t).$$

Exemple 4.7 *Résoudre le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y - 4z \\ y' = -x + y - 2z \\ z' = x - 3y \end{cases} \qquad (*)$$

La matrice associée au système $(*)$ *est*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynome caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -(\lambda + 2)(\lambda - 4)^2.$$

Les valeurs propres :
$P_A(\lambda)$ *admet deux valeurs propres* $\lambda_1 = -2$ *(simple)* $\quad \lambda_2 = 4$, *(double).*

Les vecteurs propres : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Comme* $\dim E_4 = 1 \neq 2$, *la matrice* A *n'est pas diagonalisable.*

Pour trigonaliser A *nous devons déterminer un vecteur* $V_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *et un réel* α *tels que*

$$AV_2 = 4V_2 + \alpha V_1$$

$$AV_2 = 4V_2 + \alpha V_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a - 3b - 4c = \alpha \\ -a - 3b - 2c = -\alpha \\ a - 3b - 4c = \alpha \end{cases}$$

on peut choisir $b = 1$, *et* $\alpha = 2$ *alors on obtient*

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff Y' = TY \\ &\iff Y' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} u' = 4u + 2v & (1) \\ v' = 4v & (2) \\ w' = -2w & (3). \end{cases} \end{aligned}$$

Les équations (3) *et* (2) *sont deux équations différentielles à variables séparables donc*

$$\begin{aligned} (3) &\iff w' = -2w \\ &\iff w = c_3 e^{-2t}, \qquad c_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &\iff v' = 4v \\ &\iff v = c_2 e^{4t}, \qquad c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'équation (1) *est une équation différentielle linéaire non homogène (avec second membre) donc*

$$u' = 4u \iff u = c_1 e^{4t}, \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

alors

$$\begin{aligned} u' = 4u + 2v &\iff u' = ce^{4t} + 2c_2 e^{4t} \\ &\iff u = (c_1 + 2c_2)e^{4t}. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{cases} u = (c_1 + 2c_2)e^{4t} \\ v = c_2 e^{4t} \\ w = c_3 e^{-2t} \end{cases} \qquad (c_1, c_1, c_3) \in \mathbb{R}^3$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} X = PY &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c_1 + 2c_2)e^{4t} \\ c_2 e^{4t} \\ c_3 e^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} x = (c_1 + 3c_2)e^{4t} + c_3 e^{-2t} \\ y = -(c_1 + c_2)e^{4t} + c_3 e^{-2t} \\ z = (c_1 + c_2)e^{4t} + c_3 e^{-2t} \end{cases} \qquad (c_1, c_1, c_3) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

4.3.4 Système différentiel linéaire non homogène à coefficients constants

Soit le système différentiel non homogène

$$X'(t) = AX(t) + B(t).$$

Supposons que la matrice A est diagonalisable alors

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) + B(t) &\iff X'(t) = PDP^{-1}X(t) + B(t) \\ &\iff P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}B(t). \end{aligned}$$

On pose $\quad Y(t) = P^{-1}X(t)$ donc $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$

$$X' = AX + B \iff \begin{cases} Y(t) = P^{-1}X(t) \\ Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t) \end{cases}$$

Exemple 4.8 *Considérons le système différentiel*

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y - 4z - t \\ y' = -2x + 3y + 2z + te^t \\ z' = 3x - 3y - 4z + t - 1. \end{cases} \qquad (*)$$

La matrice associée au système $(*)$ *est*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>Le polynôme caractéristique :</u>

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-1)(1+\lambda). \end{aligned}$$

<u>Les valeurs propres :</u>

$$\begin{aligned} (\lambda \text{ est une valeur propre de } A) &\iff \det(A - \lambda I_3) = 0 \\ &\iff -(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda+1) = 0 \\ &\iff \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1. \end{aligned}$$

Donc P_A admet trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1.$

<u>Les vecteurs propres :</u>

$$V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) + B(t) &\iff X'(t) = PDP^{-1}X(t) + B(t) \\ &\iff P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}B(t). \end{aligned}$$

On pose $\quad Y(t) = P^{-1}X(t)$ donc $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$

$$X' = AX + B \iff \begin{cases} Y(t) = P^{-1}X(t) \\ Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t). \end{cases}$$

En notant $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_n' \end{pmatrix}$

alors

$$Y' = DY + P^{-1}B \iff \begin{cases} y_1'(t) = -y_1 - t \\ y_2'(t) = y_2 + te^t \\ y_3'(t) = 2y_3 + t - 1 \end{cases}$$

donc on résout séparément chacune de ces trois équations on obtient

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-t} + 1 - t \\ y_2(t) = c_2 e^t + \frac{1}{2}t^2 e^t \\ y_3(t) = c_3 e^{2t} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t \end{cases} \qquad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Comme $\quad X = PY$ on conclut que

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + 1 - t + \frac{1}{2}t^2 e^t \\ y(t) = c_2 e^t - 2c_3 e^{2t} - \frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}t^2 e^t \\ z(t) = c_1 e^{-t} + c_3 e^{2t} + \frac{5}{4} - \frac{3}{2}t \end{cases} \qquad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3,$$

ou encore

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + (c_2 + \frac{1}{2}t^2)e^t + 1 - t \\ y(t) = c_2 e^t - (2c_3 - \frac{1}{2}t^2)e^{2t} - \frac{1}{2} + t \\ z(t) = c_1 e^{-t} + c_3 e^{2t} + \frac{5}{4} - \frac{3}{2}t \end{cases} \qquad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

4.4 La résolvante et formule intégrale

Consdirons le système linéaire homogène

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad t \in J, \quad X \in \mathbb{R}^n. \tag{4.10}$$

Théorème 4.5 *L'ensemble $\mathcal{B}$ des solutions de l'équation (4.10) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$ de dimension finie n.*

Définition 4.11 *(Système fondamental de solutions)*
On appelle système fondamental de solutions de l'équation (4.10) une base de l'espace vectoriel $\mathcal{B}$.

Théorème 4.6 *(Formule de Liouville)*
Soient $X_1, \cdots, X_n$, n solutions de (4.10) avec $W \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$, leur Wronskien, défini par $W(t) = \det(X_1(t), \cdots, X_n(t))$*. Alors, pour $(s,t) \in J^2$, on a la formule suivante, dite de Liouville :*

$$W(t) = W(s) \exp\Big(\int_s^t (Tr(A(x)dx)\Big).$$

Démonstration : On note $X(t)$ la matrice de $M(\mathbb{K}^n)$ dont les colonnes sont constituées des vecteurs solutions de (4.10) notées $X_1(t), \cdots, X_n(t)$. La matrice $X(t)$ est solution du système différentiel matriciel

$$X'(t) = A(t)X(t).$$

Soient $x_1(t), \cdots, x_n(t)$, les lignes de $X(t)$ et $a_{ij}(t)$ les coefficients de $A(t)$ pour i et j compris entre 1 et n. Il est immédiat que

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \qquad x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t)$$

on peut écrire $W(t)$ comme suite

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

la multi-linéarité du déterminant donne

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{i-1}(t) \\ x_i(t) \\ x_{1+1}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{i-1}(t) \\ x_j(t) \\ x_{1+1}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) W(t). \end{aligned}$$

Par conséquent on trouve

$$W'(t) = Tr(A(t))W(t).$$

En résolvant cette dernière équation différentielle on obtient la formule de Liouville.

Définition 4.12 *(Matrice résolvante)*
On appelle matrice résolvante du système (4.10), l'unique solution du système différentiel matriciel

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

satisfaisant la condition initiale $X(t_0) = I_n$, où I_n désigne la matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$, et on la note $\mathcal{R}(t, t_0)$.

Propriétés 4.2 *Pour tout $(t, t_0, t_1) \in J^3$, la matrice résolvante S vérifie l'égalité suivante*

$$\mathcal{R}(t, t_0) = \mathcal{R}(t, t_1)\mathcal{R}(t_1, t_0).$$

En outre, pour tout $(t_1, t_0) \in J^2$, $\mathcal{R}(t_1, t_0) \in GL_n(\mathbb{K})$ et

$$(\mathcal{R}(t_1, t_0))^{-1} = \mathcal{R}(t_0, t_1).$$

Par ailleurs, la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

est donnée par $X(t) = \mathcal{R}(t, t_0)X_0$.

4.4.1 Systèmes différentiels non homogènes

Considérons le système différentiel non homogène (avec second membre)

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t). \tag{4.11}$$

L'ensemble des solutions de (4.11) est l'espace affine $X_p+\mathcal{B}$ de dimension finie n, où $\mathcal{B}$ est l'espace vectoriel des solutions du système homogène et X_p est une solution particulière de (4.11). La solution générale du système (4.11) est donnée par la formule intégrale de Duhamel

$$\forall t \in J \quad X(t) = \mathcal{R}(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t} \mathcal{R}(t, \tau)B(\tau)d\tau.$$

Elle s'obtient par la technique de variation de la constante : étant donnée $\mathcal{R}(t, t_0)X_0$ la solution du système homogène, on cherche la solution de (4.11) sous la forme $X(t) = \mathcal{R}(t, t_0)X_p(t)$, de sorte que

$$\mathcal{R}'(t, t_0)X_p(t) + \mathcal{R}(t, t_0)X_p(t) = A(t)\mathcal{R}(t, t_0)X_p(t) + B(t),$$

d'où l'on tire l'équation

$$X_p(t) = (\mathcal{R}(t, t_0))^{-1}B(t) = \mathcal{R}(t_0, t)B(t).$$

L'intégration terme à terme entre t_0 et t donne alors

$$X_p(t) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{R}(t_0, \tau)B(\tau)d\tau + X_p$$

où X_p reste à déterminer. En reportant $X_p(t)$ dans $X(t)$, il vient

$$X(t) = \mathcal{R}(t, t_0)X_p(0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{R}(t, t_0)\mathcal{R}(t_0, \tau)B(\tau)d\tau.$$

La condition initiale impose de prendre $X_p(0) = X_0$ et la formule de Duhamel en découle.

4.4.2 Systèmes à coefficients constants

$$X'(t) = AX(t) \qquad (*)$$

Dans le cas constant, la matrice résolvante devient

$$\mathcal{R}(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}$$

et les solutions du système différentiel $(*)$ s'écrivent

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0.$$

4.5 Exercices

Exercice 4.1 *Ramener l'équation différentielle suivante au système normal*

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} + f(t)\frac{dx}{dt} + g(t)x = 0.$$

Exercice 4.2 *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt} + x + 2y = 0 \\ t\dfrac{dy}{dt} - 3x - 4y = 0. \end{cases}$$

Former l'équation résolvante en x et chercher les solutions de la forme $x = t^r$.
En déduire la solution générale du système

Exercice 4.3 *Intégrer le système*

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x \qquad \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x$$

avec les conditions initiales : $y(0) = 1, \qquad z(0) = 0.$

Exercice 4.4 *Résoudres les systèmes différentiels suivants.*

$\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y. \end{cases}$

$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x. \end{cases}$

$\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = -3x - y. \end{cases}$

$\begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = x - 2y \\ x(1) = 1, \quad y(1) = -1 \end{cases}$

Exercice 4.5 *Montrer que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$*

$$\begin{cases} x' = y - x^3 + x \\ y' = -x. \end{cases}$$

Exercice 4.6 *Discuter selon les valeurs du réel m les solutions du système*

$$\begin{cases} x' = -mx + (1 + 3m)y \\ y' = -mx + 3m. \end{cases}$$

Exercice 4.7 *Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} tx' + x + 2y = 0 \\ ty' - 3x - 4y = 0 \\ x(1) = y(1) = 1 \end{cases}$$

① *Former l'équation résolvante en x et chercher les solutions de la forme $x = t^r$*
② *En déduire la solution générale du système.*

Exercice 4.8 *Résoudres les problèmes de Cauchy.*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -2x + y + 2z \\ x(0) = z(0) = 0, \quad y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = x + 2y \\ z' = 2x + 3y \\ x(0) = 2, \quad y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 3x - y - z \\ y' = 5x - 2y - 4z \\ z' = -4x + 3y + 5z \\ x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 4.9 *Résoudre*

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = 2y + z \\ z' = x - y + z \end{cases}$$

Exercice 4.10 *Résoudre*

$$\begin{cases} x' = 2x + y + 2 \\ y' = x + 2y + z \\ z' = 3z \\ x(0) = \alpha, \quad y(0) = \beta, \quad z(0) = \gamma \end{cases}$$

Exercice 4.11 *Résoudre*

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y + 2z + 1 \\ y' = -2x + y + 2z + sint \\ z' = -2x + 2y + z + \cos t \end{cases}$$

Exercice 4.12 *Résoudre*

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y - 4z + te^t - t \\ y' = -2x + 3y + 2z + te^t - 2t + 2 \\ z' = 3x - 3y - 4z - 1 \end{cases}$$

Exercice 4.13

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y - 18z + 25t + 45 \\ y' = -2x + 6z - 4t - 12 \\ z' = 2x - 2y - 9z + 11t + 23 \end{cases}$$

① *Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de la matrice A associée au système précédent.*
② *Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres de A.*
③ *Diagonaliser A $\quad (A = PDP^{-1})$.*
④ *Résoudre le système précédent.*

Exercice 4.14 *Sachant que :*

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} A^{2p} = (-1)^p I_2 \\ A^{2p+1} = (-1)^p A. \end{cases}$$

***C**alculer* e^{tA} *pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4.15 ① *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x' = x - 3y + 3z \\ y' = 3x - 5y + 3z \\ z' = 6x - 6y + 4z. \end{cases}$$

② *Déterminer la solution vérifiant*

$$x(0) = z(0) = 1, \quad y(0) = -1$$

③ *Calculer l'exponentielle de la matrice associée au système précédent.*

Exercice 4.16 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad avec \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

① *Calculer* e^A.
② *Déduire la solution générale du système*

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \end{cases}$$

Chapitre 5

Introduction aux notions de stabilité

Nous allons introduire dans ce chapitre la notion de stabilité d'un équilibre, et donner quelques définitions générales de la stabilité d'une solution.

5.1 Stabilité des systèmes autonomes

On considère le système

$$x' = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Définition 5.1 *Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est dit point d'équlibre ou état d'équilibre si*

$$f(x^*) = 0.$$

Définition 5.2 *Quelques types de stabilité.*

1. *x^* est dit stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\|x_0 - x^*\| <\Longrightarrow \|x(t) - x^*\| \leq \varepsilon \, pour \; tout \, t > 0.$$

   (Dans le cas contraire il est dit instable).

2. *x^* est dit asymptotiquement stable s'il est stable et*

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$$

3. *x^* est dit marginablement stable s'il est stable mais non asymptotiquement stable.*
4. *x^* est dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives α et β telles que*

$$\|x(t) - x^*\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|x_0 - x^*\|.$$

Remarque 5.1

$$x^* \text{ est exponentiellement stable } \Longrightarrow x^* \text{ est asymptotiquement stable } \Longrightarrow x^* \text{ est stable.}$$

5.2 Stabilité des systèmes linéaires

On s'intéresse à l'etude de la stabilité des systèmes différentiels régis par l'équation

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \qquad (S)$$

où A est une matrice carrée de dimension $n \times n$.

Théorème 5.1 *Le système (S) est stable si et seulement si*

1. *$Re(\lambda) \leq 0$ pour toute valeure propre simple λ de A*
2. *S'il existe une valeur propre λ de multiplicité k telle que $Re(\lambda) = 0$ alors $\dim E_\lambda = k$ où E_λ est le sous espace propre associé à λ*

Exemple 5.1 *Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - 2y \end{cases} \qquad (*)$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice associée au système $(*)$.
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$ qui sont simples d'où le système $(*)$ est stable.

Exemple 5.2 *Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associée au système $(**)$.
La seule valeur propre de A est 0 de multiplicité 2 et $\dim E_\lambda = 1$ donc le système $(**)$ est instable.

Théorème 5.2 *Le système (S) est asymptotiquement stable si pour toute valeur propre λ de A on a $Re(\lambda) < 0$.*

Exemple 5.3 *Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -2y. \end{cases}$$

Les valeurs propres associées sont -1 et -2. Donc le système est assymptotiquement stable.

5.3 Les types les plus simples de points d'équilibre

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \quad \det A \neq 0.$$

Le point $x^*(0,0)$ est le seul point d'équilibre du système (1)
Soit λ_1, λ_2 les valeurs propres associées à la matrice A : la discussion de la nature du point d'équilibre se faire en plusieurs cas :

1. **λ_1, λ_2 sont réelles distinctes :**
   a) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ le point x^* est asymptotiquement stable (noeud stable)
   b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ le point x^* est instable (noeud instable)
   c) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ le point x^* est instable (col)
2. **λ_1, λ_2 sont commplexes :** $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$
   a) $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$ le point x^* est asymptotiquement stable (foyer stable)
   b) $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$ le point x^* est instable (foyer instable)
   c) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ le point x^* est stable (centre)
3. **$\lambda_1 = \lambda_2$ (sont multiples) :**
   a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ le point x^* est asymptotiquement stable (noeud stable)
   b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ le point x^* est instable (noeud instable)

Exemple 5.4 *Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = 4x - 3y. \end{cases}$$

Les valeurs propres sont -2, et -3 par suite $x^*(0,0)$ est un noeud stable.

Exemple 5.5 *Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2y. \end{cases}$$

Les valeurs propres sont 1, et 2 par suite $x^*(0,0)$ est un noeud instable.

Exemple 5.6 *Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$$

Les valeurs propres sont 1, et -1 par suite $x^*(0,0)$ est un col.

Exemple 5.7 *(A titre d'éxercice)*
Etudier la stabilité et la nature de l'origine pour les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = dy + cx, \qquad \text{avec } (c.d > 0) \end{cases}$$

Définition 5.3 *(Fonction définie positive)*
Une fonction $V(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ (continument différentiable) est dite définie positive si :

1. $V(0) = 0$
2. $V(x) > 0$ *pour* $x \in \Omega$ *et* $x \neq 0$

Si 2 est remplacée par $V(x) \geq 0$ alors $V(x)$ est dite semi définie positive

Exemple 5.8 *Soient $V_1(X) = x^2 + y^2$ et $V_2(X) = (x+y)^2$ alors*
V_1 est définie positive sur $\mathbb{R}^2$ et semi définie poitive sur $\mathbb{R}^3$.
V_2 est semi définie poitive sur $\mathbb{R}^2$, (car $V_2(x) = 0$ sur $x + y = 0$).

Définition 5.4 *On appelle fonction de Lyapunov une fonction V de classe $\mathcal{C}^1$ définie au voisinage du point d'équilibre x^* et à valeurs réelles possédant les deux propriétés :*

❶ *$V(x) \geq 0$, la fonction étant nulle uniquement en $x = x^*$.*

❶ *$< \nabla V(x), f(x) > \leq 0$ ou ∇V est le gradiant de V.*

Si (sauf en $x = x^*$) on parle de fonction stricte de lyapunov.

Théorème 5.3 *Pour qu'un point d'équilibre soit stable, il suffit qu'il existe une fonction de Lyapunov au voisinage de ce point.*
Si de plus cette fonction de Lyapunov est stricte alors le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable.

Exemple 5.9 *On considère le système*

$$\begin{cases} x' = -x + xy^2 \\ y' = -2x^2y - y^3 \end{cases}$$

Cherchons une fonction de Lyapunov. Soit

$$V(x,y) = ax^2 + by^2 \quad \text{avec } a, b > 0 \text{ a déterminées.}$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned} V'(x,y) &= 2axx' + 2byy' \\ &= 2ax(-x + xy^2) + 2by(-2xy^2 - y^3) \\ &= -2ax^2 + 2ax^2y^2 - 4bx^2y^2 - 2by^4 \end{aligned}$$

Si on prend $a = 2$, $b = 1$, alors on obtient $V(x,y) = 2x^2 + y^2$ qui est une fonction définie positive et $V'(x,y) = -4x^2 - 2y^2$ qui est définie négative. Alors le point d'équilibre $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

5.4 Exercices

Exercice 5.1 *Soit le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

avec le seul point d'équilibre $x^* = (0,0)$, *et* λ_1, λ_2 *comme valeurs propres.*
Dire selon les valeurs propres quand on a :
① **F***oyer instable.*
② **C***entre.*
③ **N***oeud instable.*

Exercice 5.2 *Soit le système linéaire*

$$\dot{X} = AX, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec le seul point d'équilibre $x^* = (0,0)$, *et* λ_1, λ_2 *comme valeurs propres.*
Dire selon les valeurs propres quand on a :
① **F***oyer stable.*
② **C***ol.*
③ **N***oeud stable.*
④ **C***alculer* $P_A(\lambda)$ *le polynôme caractéristique en fonction de* $tr(A)$ *et* $det(A)$

Exercice 5.3 *Etudier la stabilité et la nature de l'origine pour les systèmes suivants :*
$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$
$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$
$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$
$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = by + ax, \qquad \text{avec}\,(a.b > 0) \end{cases}$

Exercice 5.4 *On considère le système*

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - 2y^2) \end{cases}$$

① **R***echercher les points d'équilibre.*
② **F***aire l'étude de la stabilité au voisinage des points d'équilibre en linéarisant (S)*
③ **V***érifier que* $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ *avec* $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$ *est une fonction de Lyapunov en déduire la nature des points d'équilibre.*

Exercice 5.5 *On considère le système*

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y^2 \\ \dot{y} = 2xy - y^3 \end{cases}$$

① **R***echercher les points d'équilibre.*
② **J***ustifier que on peut pas étudier la stabilité au voisinage des points d'équilibre en linéarisant le système (S).*
③ **E***n déterminant une fonction de Lyapunov étudier la stabilité du système (S).*

Exercice 5.6 *Soit le système en coordonnées polaires* (r, θ)

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

avec $r = r(t), \qquad \theta = \theta(t)$
❶ **D***essiner le portrait de phase.*
❷ **E***xiste-t-il un cycle limite ? Est-il stable ?*
❸ **R***éecrire le système précédent en coordonnées cartésiennes* (x, y).

Exercice 5.7 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - (x + y) \\ \dot{y} = (x + y) - \alpha y, \qquad \alpha > 1 \end{cases}$$

① **T***rouver l'unique point d'équilibre* (x^*, y^*) *du système.*
② *On introduit les nouvelles variables*

$$u = x - x^*, \qquad v = y - y^*, \qquad Z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

a) **M***ontrer que* $Z' = AZ$, *avec* $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$
b) **D***iscuter suivant les valeurs de* α *la stabilité du système.*

Bibliographie

[1] V. I. Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1974.

[2] A. Avez, *Calcul différentiel*, Masson, Paris, 1983.

[3] E. Azoulay, J. Avignant, G. Auliac, *Mathématiques cours et exercices résolus*, EdiScience 1997.

[4] J. Bass, *Mathématiques tome 3 analyse*. Masson et Cie , 1972.

[5] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1977.

[6] S. D. Chatterji, *Cours d'analyse*, vol. 1, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1997.

[7] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations, With Applications*, Springer, 2005.

[8] Gustave Choquet *Cours mathematiques* ellipses 2002.

[9] M. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.

[10] Jean-Marie Monier *Analyse MP*, 2013.

[11] M. Abdelhamid *Analyse Cours et exercices résolus*, OPU, 1992.

[12] Jean-Pierre Demailly, *analyse numérique et équations différentielles*. Presses universitaires de Gronoble, 1991.

[13] S. Lefschetz, *Differential Equations : Geometric Theory*, New York 1977.

[14] Philippe Chartier Introduction in the theory of ordinary equations(in french), 2016.

[15] A. Philippov, *Receuil de problèmes d'équations différentielles* . Editions Mir. Moscou, 1975.

[16] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral*

[17] Mohamed Mehbali *Mathématiques Fonction d'une variable réelle*, OPU.

[18] L. Pontriaguine, *Equations différentielles ordinaires*. Editions Mir. Moscou, 1975.

[19] M. Maumy, J. Vauthier *Calcul différentiel et intégral*, Ellipses, 1998.

[20] Earl D. Rainville, *Elementary Differential Equations*, Macmillan Publishing New York 1981.

[21] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales tome 4*, Masson, 1993.

[22] P. Thuillier , J.C. Belloc, *Mathématiques 2 Analyse*, Masson 1981.

[23] L. Todjihounde *Calcul différentiel*, Cépaduès 2009.

[24] D. G. Zill, *A first Course in Differential Equations, With Modeling Applications*, Brook/Cole, 2009.