

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun de Tiaret



Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique

THÈSE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat

Filière : Génie Mécanique

Par :

Mme KABLIA Aicha

Intitulé de la thèse

**Effet de la porosité sur le comportement mécanique des plaques en
matériau à gradient de propriétés sous diverses conditions aux
limites: analyse et modélisation**

Soutenu publiquement le / /2023 devant le jury composé de :

Nom et prénom	Grade	Qualité	Lieu d'exercice
SAAD CHEMLOUL Nourddine	Pr	Président	U. Tiaret
HASSAINE DAOUADJI Tahar	Pr	Directeur de thèse	U. Tiaret
BOUZIDENE Ahmed	Pr	Co-directeur de thèse	U. Tiaret
ABDELHAK Zohra	MCA	Examineur	U. Relizane
ADIM Belkacem	MCA	Examineur	U. Tissemsilt
BOURADA Fouad	MCA	Examineur	U. Tissemsilt
BENFERHAT Rabia	MCA	Invité	U. Tiaret

Année universitaire 2022-2023

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à mon encadreur Monsieur **HASSAINE DAOUADJI Tahar** Professeur à l'Université de Tiaret d'avoir accepté d'être le directeur de cette thèse et de m'avoir accordé la chance de faire ce travail et pour les remarques et suggestions qui ont permis de l'améliorer. Je le remercie pour ses conseils, ses recommandations et sa confiance, ses encouragements, sa patience, c'est un grand honneur pour moi.

Je voudrais également remercier mon co-directeur de thèse, monsieur **BOUZIDENE Ahmed** Professeur à l'Université de Tiaret, qui a participé à l'encadrement de ma thèse. Pr. **BOUZIDENE** fût mon conseiller et interlocuteur. Je lui adresse ma sincère gratitude.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- Monsieur **SAAD CHEMLOUL Nourddine** Professeur à l'Université de Tiaret d'avoir accepté d'examiner ce travail et de m'avoir honoré de présider le jury.
- Madame **ABDELHAK Zohra** Maitre de conférence à l'Université de Rilizane, qui a acceptée elle aussi d'examiner cette thèse. Je tiens à la remercier pour son extrême gentillesse.
- Monsieur **ADIM Belkacem**, Maitre de conférence à l'Université de Tismssilt, qui m'a fait l'honneur d'examiner ce travail et je lui en suis profondément reconnaissant.
- Monsieur **BOURADA Fouad**, Maitre de conférences à l'Université de Tismssilt, qui a accepté d'être examinateur. Je le remercie très sincèrement.

J'exprime une grande gratitude à Monsieur **BENFERHAT Rabia**, Maitre de conférences à l'Université de Tiaret, je le remercie sincèrement pour toute l'aide qu'il m'a apportée, sa disponibilité tout au long de ce travail.

J'aimerais exprimer ma sincère gratitude et de tout cœur à mes parents a mes frères et mes sœurs pour leurs grands rôles dans ma vie et leurs nombreux sacrifices pour moi. Je voudrais remercier vivement ma cher sœur *Fatiha* qui m'a apportée un soutien important pour la thèse.

Enfin, je ne remercierais jamais assez mon mari et mes enfants pour leur soutien inconditionnel pour accomplir ce travail. **Je leur dédie ce travail.**

ملخص

اثناء تصنيع الصفائح المصنوعة من المواد المتدرجة وظيفياً قد تظهر عيوب مثل المسامية. هذه العيوب يمكن أن تغير السلوك الكامل لهذه الصفائح. يهدف العمل الحالي إلى دراسة تأثير وجود هذه المسامية على السلوك الميكانيكي لهذه الصفائح المتدرجة وظيفياً.

تم تسليط الضوء على ثلاث دراسات رئيسية في هذا العمل، باستخدام نظرية جديدة مبسطة للتشوه القصي تم اشتقاق معادلات التوازن لصفحة متدرجة الخصائص تحتوى على مسامات و تتركز على اسس وينكلر-باسترنك مع الأخذ بعين الاعتبار عدة شروط حدية. عدة أشكال من نسب توزيع المسامية أخذت بعين الاعتبار. يتم الحصول على المعادلات الحاكمة ارتكازاً على مبدأ التفاعل لوحة-أساس. يحترم هذا النموذج الجديد انعدام إجهادات القص عند الحواف العلوية والسفلية من الصفحة. يتم التحقق من صحة هذه النظرية من خلال مقارنة بعض النتائج الحالية مع نظريات أخرى ذات رتبة أعلى ذكرت في الأدبيات. تمت مناقشة تأثيرات كل من: اختلاف معدل توزيع المسامية ، وظروف الحدود ، ومعلمات الأساس ، ومؤشر قانون القوة ، و نسبة العرض إلى الارتفاع ، ونسبة الجانب إلى السماكة على الانحرافات والاجهادات.

في هذا العمل أيضاً، نجد دراسة حول خصائص الاهتزاز الحر للألواح متدرجة وظيفياً والمحتوية على المسامية و القائمة على أسس مرنة. يُفترض أن معامل يونغ للصفحة يتغير باستمرار من خلال السماكة وفقاً لصيغة قانون القوة ، وتظل نسبة بواسون ثابتة. يتم النظر في أنواع مختلفة من نسب توزيع المسامية. لفحص دقة الصيغة الحالية، تم فحص العديد من الدراسات المقارنة. تم دراسة تأثير معدل توزيع المسامية المتفاوت، معامل الأساس ، مؤشر قانون القوة ، ونسبة السماكة على تردد الأساسي للصفحة. الجزء الأخير من النتائج الرقمية مقدم لتوضيح تأثير معدل توزيع المسامية في المادة الأساسية على السلوك الميكانيكي في هياكل سندويتش متدرجة وظيفياً.

الكلمات المفتاحية: مواد متدرجة وظيفياً، نظرية الصفحة المبسطة ، اهتزاز حر، لوحة سندويتش متدرجة وظيفياً ؛ أساس مرن، لوحات غير كاملة، معدل توزيع المسامية.

Résumé

Lors de la fabrication des plaques en matériau à gradient de propriétés FGM, des défauts tels que des porosités peuvent apparaître. Ceux-ci peuvent changer tout le comportement de ces plaques. Le présent travail a pour but d'étudier l'effet de la présence de cette porosité sur le comportement mécanique des plaques FGM.

Trois grandes études sont mises en évidence dans ce travail, les équations d'équilibre d'une plaque FG poreuse reposant sur des fondations de Winkler-Pasternak avec diverses conditions aux limites sont dérivées à l'aide d'une nouvelle théorie raffinée de la déformation par cisaillement. Différents types de taux de distribution de la porosité sont considérés. Les équations gouvernantes sont obtenues incluant l'interaction plaque-fondation. Ce nouveau modèle respecte la nullité de la contrainte de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. La validité de cette théorie est étudiée en comparant certains des résultats actuels avec d'autres théories d'ordre supérieur rapportées dans la littérature. Les effets de la variation du taux de distribution de la porosité, des conditions aux limites, des paramètres de la fondation, de l'indice de loi de puissance, du rapport d'aspect de la plaque, du rapport côté-épaisseur sur les déviations et les contraintes sont tous discutés.

Egalement, dans ce travail nous trouvons une étude sur les caractéristiques de vibration libre des plaques poreuses en FGM reposant sur des fondations élastiques. Le module de Young de la plaque est supposé varier de manière continue à travers l'épaisseur selon une formulation de loi de puissance, et le coefficient de Poisson est maintenu constant. Différents types de taux de distribution de porosité sont considérés. Pour examiner l'exactitude de la présente formulation, plusieurs études de comparaison sont étudiées. Les effets de la variation du taux de distribution de la porosité, du paramètre de fondation, de l'indice de loi de puissance et du rapport d'épaisseur sur la fréquence fondamentale des plaques ont été étudiés. La dernière partie des exemples numériques sont présentés pour illustrer l'influence du taux de répartition de cette porosité dans le matériau de base sur le comportement mécanique de la plaque sandwiches en matériau FGM.

Mots-clés : *matériaux fonctionnellement gradués ; théorie des plaques raffinée ; vibration libre ; plaque sandwich FGM; fondation élastique ; plaques imparfaites ; taux de distribution de la porosité.*

Abstract

During the manufacture of FGM plates, defects such as porosities may appear. These can change the whole behavior of these plates. The present work aims to study the effect of the presence of this porosity on the mechanical behavior of FGM plates.

Three major studies are highlighted in this work, the equilibrium equations of a porous FG plate resting on Winkler-Pasternak foundations with various boundary conditions are derived using a new refined theory of deformation by shear. Different types of porosity distribution rates are considered. The governing equations are obtained including the plate-foundation interaction. This new model respects the nullity of the shear stress transverse to the surfaces higher and lower of the plate. The validity of this theory is investigated by comparing some of the current results with other higher order theories reported in the literature. The effects of varying porosity distribution rate, boundary conditions, foundation parameters, power law index, plate aspect ratio, side-to-thickness ratio on the deflection and stresses are all discussed.

Also in this work, we find a study on the characteristics of free vibration of porous FGM plates resting on elastic foundations. The Young's modulus of the plate is assumed to vary continuously through the thickness according to a power law formulation, and the Poisson's ratio is held constant. Different types of porosity distribution rates are considered. To examine the accuracy of the present formulation, several comparison studies are investigated. The effects of varying porosity distribution rate, foundation parameter, power law index, and thickness ratio on the fundamental plate frequency were investigated. The last part of the numerical examples is presented to illustrate the influence of the rate of distribution of t porosity in the base material on the mechanical behavior of the sandwich plate in FGM material.

Keywords: *functionally graded materials; refined plate theory; free vibration; FGM sandwich plate; elastic foundation; imperfect plates; porosity distribution rate.*

Sommaire

ملخص.....	i
Résumé	ii
Abstract.....	iii
Liste des figures.....	vi
Liste des tableaux.....	ix
Liste des notations.....	xi
Introduction générale.....	1

Chapitre I: Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés type FGM

I.1. Introduction.....	3
1.2. Idée générale	3
1.3. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel.....	5
I.4. Applications des matériaux FGM dans l'industrie.....	7
I.5. Structures sandwiches en FGM.....	8
1.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM.....	8
I.7. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM.....	10
I.8. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	11
I.9. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	12
I.10. Conclusion.....	12

Chapitre II: Théories des plaques en matériaux à gradient de propriétés

II.1. Introduction.....	14
II.2. Historique.....	14
II.3. Revue sur les théories des plaques FGM.....	14
II.3.1. Théorie de plaques bidimensionnelles	15
II.3.1 a. La théorie classique des plaques (CPT)	15
II.3.1 b. Théorie des plaques du premier ordre (FSDT).....	16
II.3.1 c. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)...	17
II.4. Théorie de plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D)	21
II.5 Approches quasi-tridimensionnelles.....	23
II.6 Conclusion.....	25

Chapitre III : Comportement mécanique sous chargement statique des plaques poreuses en FGM

III.1. Introduction.....	26
III.2. Formulation du problème.....	28
III. 2.1. Relations constitutives des plaques fonctionnellement graduées (métal/céramique).....	28
III. 2.2. Formulation théorique.....	30
III. 2.2.1. Hypothèses de base.....	30
III. 2.2.2. Cinématique.....	32
III. 2.2.3. Équations gouvernantes.....	33
III.2.2.4. Des solutions exactes pour les plaques FGM.....	36
III.3. Présentation et analyse des résultats.....	38
III.4. Conclusions.....	49

Chapitre IV : Analyse dynamique des plaques poreuses en FGM

IV.1. Introduction.....	51
IV.2. Formulation du problème.....	53
IV.2.1. Relations constitutives des plaques (métal/céramique) FGM.....	53
IV.2.2. Champs de déplacement et Déformations.....	55
IV.2.3. Équations gouvernantes.....	57
IV.3. Solution exacte pour une plaque FGM simplement appuyée	59
IV.4. Résultats numériques et discussion.....	61
IV.5. Conclusions	69

Chapitre V : Comportement dynamique des plaques sandwich en FGM

V.1. Introduction.....	70
V.2. Formulation théorique des plaques sandwich FGP	72
V.2.1. Propriétés des matériaux FGM.....	72
V.2.2. Déplacements et déformations.....	74
V.3. Résultats numériques et discussion	76
V.4. Conclusions.....	86
Conclusion générale.....	90
Références Bibliographiques.....	93

Liste des figures

Chapitre I: Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés type FGM

Figure I.1	Schematic illustration of a two-phase FGM sample: (a) typical microstructure including A and B phases; (b) three zones in macroscopic scale X ; and (c) RVE in the microscopic scale x	6
Figure I.2	Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.....	6
Figure I.3	Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP).Aspect externe (gauche) et section transversale (droite)	8
Figure I.4	Géométrie d'une poutre FGM.....	9
Figure I.5	Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM.....	10

Chapitre II: Théories des plaques en matériaux à gradient de propriétés

Figure. II.1	Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (J.N. Reddy, 1997).....	15
Figure. II.2	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (J.N. Reddy, 1997).....	17
Figure. II.3	Illustration de la plaque d'ordre élevé (J.N. Reddy, 1997).....	19
Figure. II.4	Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur.....	23

Chapitre III : Comportement mécanique sous chargement statique des plaques poreuses en FGM

Figure III.1	Géométrie d'une plaque rectangulaire en FGM.....	31
Figure III.2	Déviations centrale sans dimension (w) en fonction du rapport d'aspect (a/b) d'une plaque FGM poreuse pour différents cas de taux de distribution de porosité.....	45
Figure III.3	Flèche centrale sans dimension (w) en fonction de l'épaisseur latérale du rapport	

	(a/h) d'une plaque carrée poreuse en FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité.....	46
Figure III.4	Variation de la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque poreuse en FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité.....	47
Figure III.5	Variation de la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque poreuse en FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité.....	48
Figure III.6	Variation des contraintes de cisaillement σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité.....	49
Chapitre IV : Analyse dynamique des plaques poreuses en FGM		
Figure IV. 1	Géométrie et dimensions de la plaque FGM reposant sur une fondation élastique.	55
Figure IV. 2	Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaque FG carrée Al/Al ₂ O ₃ par rapport au rapport a/b . (a) sans fondation élastique, (b) fondation Winkler-Pasternak, (c) Fondation élastique Winkler (d) Fondation élastique Pasternak.....	67
Figure IV. 3	Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaque FG carrée Al/Al ₂ O ₃ par rapport au rapport a/h . (a) sans fondation élastique, (b) fondation Winkler-Pasternak, (c) Fondation élastique Winkler (d) Fondation élastique Pasternak.....	68
Figure IV. 4	Figure IV. 4 : Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaque FG carrée Al/Al ₂ O ₃ par rapport à l'indice de loi de puissance k . (a) sans fondation élastique, (b) fondation Winkler-Pasternak, (c) Fondation élastique Winkler (d) Fondation élastique Pasternak.....	69
Chapitre V : Comportement dynamique des plaques sandwich en FGM		
Figure V. 1.a	Plaque FG sandwich avec une peau de couverture homogène et âmes en FGM.....	72
Figure V. 1.b	Plaque FG sandwich avec une peau de couverture en FGM et âme homogène...	73

Figure V. 2	Fréquences fondamentales de trois types de plaques sandwich FGM avec différentes combinaisons de couches (1-1-1 et 1-8-1).....	81
Figure V. 3	Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec âme FGM en fonction du rapport épaisseur/longueur et pour les conditions aux limites simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).....	82
Figure V. 4	Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec noyau homogène en fonction du rapport épaisseur/longueur et pour des conditions aux limites simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich (1-8-1) FG.....	82
Figure V. 5	Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG à âme tendre homogène en fonction du rapport épaisseur/longueur et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich (1-8-1) FG.....	83
Figure V. 6	Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec âme FGM en fonction du rapport d'aspect $s = a/b$, et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich (1-8-1) FG.....	83
Figure V. 7	Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec noyau homogène en fonction des rapports d'aspect $s = a/b$, et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).....	84
Figure V. 8	Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG à âme tendre homogène en fonction du rapport d'aspect $s = a/b$, et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).....	84
Figure V. 9	Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec FGM Core en fonction de l'indice de loi de puissance P , et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).....	85
Figure V. 10	Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec noyau	85

homogène en fonction de l'indice de loi de puissance P , et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).....

Figure V. 11 Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG à âme tendre homogène en fonction de l'indice de loi de puissance P , et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1)..... 86

Liste des tableaux

Chapitre I: Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés type FGM

Tableau I.1	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	5
-------------	---	---

Chapitre III : Comportement mécanique sous chargement statique des plaques poreuses en FGM

Tableau III. 1	Tableau récapitulatif qui regroupe les différentes répartitions de porosité dans le FGM (Céramique / Métal).....	30
Tableau III.2	Fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$	37
Tableau III.3	Déviations maximales sans dimension d'une plaque rectangulaire homogène en FGM sous des charges uniformes pour différents cas de taux de distribution de la porosité.....	39
Tableau III.4	Comparaison des déplacements normalisés et des contraintes d'une plaque rectangulaire poreuse en FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité($b = 3a, k = 2, \alpha = 0.2$).....	39
Tableau III.5	Déformations et contraintes sans dimension d'une plaque rectangulaire sous chargements uniformes pour différents cas de distribution de taux de porosité $\alpha = 0,2, a = 10h, b = 3a$	41
Tableau III.6	variations de la flèche w pour une plaque carrée en FGM simplement appuyées sous chargements sinusoïdales pour différents cas de taux de distribution de porosité avec $\alpha = 0,2$	41
Tableau III.7	Déplacement transversal sans dimension d'une plaque carrée FGM soumise à une charge uniforme pour différents cas de taux de distribution de porosité. $\alpha = 0,2, P = 1$	42
Tableau III.8	Flèche adimensionnelle w d'une plaques carrées en FGM reposant sur des fondations élastiques sous chargements sinusoïdales ($a = 10h, \alpha = 0,2$) (Al/Al ₂ O ₃).....	43

Tableau III.9	Flèches adimensionnelles w des plaques carrées FG selon diverses conditions aux limites sans fondations élastiques pour différents cas de taux de distribution de porosité. $P = 10$	44
----------------------	--	----

Tableau III.10	Flèches adimensionnelles w des plaques carrées FG selon diverses conditions aux limites avec des fondations élastiques pour différents cas de taux de distribution de porosité. ($k_0 = k_1 = 10$), $P = 10$	44
-----------------------	--	----

Chapitre IV : Analyse dynamique des plaques poreuses en FGM

Tableau IV.1	Tableau récapitulatif qui regroupe les différentes répartitions de porosité dans le FGM (Céramique / Métal).....	55
---------------------	--	----

Tableau IV. 2	Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FGM.....	61
----------------------	---	----

Tableau IV.3	Comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque rectangulaire $k = 1$, $\alpha = 0$ et $E_{11} = E_{22} = \rho_{11} = \rho_{22} = 1$ (matériaux homogènes).....	61
---------------------	--	----

Tableau IV. 4	Comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée (Al/ZrO2) avec $k = 1$	62
----------------------	--	----

Tableau IV. 5	Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ de la plaque carrée (Al/ZrO2) $\alpha = 0,2$	63
----------------------	--	----

Tableau IV. 6	Comparaison du paramètre de fréquence propre $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ de la plaque carrée (Al/Al2O3), $\alpha = 0,2$	64
----------------------	---	----

Tableau IV. 7	Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ de (Al/Al2O3) plaque carrée $a = 20h$ et $\alpha = 0.2$ (cas de fondation élastique).....	65
----------------------	--	----

Tableau IV. 8	Fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_m / E_m}$ de la plaque SS (Al/Al2O3) $k = 2$ et $\alpha = 0.2$	66
----------------------	---	----

Chapitre V : Comportement dynamique des plaques sandwich en FGM

Tableau V.1	Propriétés des matériaux de la céramique et du métal.....	76
--------------------	---	----

Liste des Tableaux

Tableau V.2	Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ des plaques sandwich FGM à loi de puissance carrée simplement appuyées avec un noyau FGM.....	77
Tableau V.3	Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de la plaque carrée en sandwich FGM (1-8-1) (Al_2O_3/Al) avec noyau FGM.....	77
Tableau V.4	Paramètres de fréquence fondamentaux des plaques sandwich FGM carrées simplement appuyées avec noyau FGM.....	78
Tableau V.5	Paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de plaques sandwich FGM à loi de puissance carrée simplement appuyées avec noyau tendre homogène. $\alpha = 0.1....$	79
Tableau V.6	Paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de plaques sandwich FGM à loi de puissance carrée simplement appuyées avec noyau tendre homogène. $\alpha = 0.1....$	80

Liste des notations

Symboles :

1,2,3 : les axes des coordonnées locales

\int : Intégrale

\square : Matrice

$\{ \}$: Vecteur

df : dérivée de la fonction f

δ : opérateur de variation

f, x : dérivée de la fonction f par rapport à x

Σ : somme

3D : tridimensionnelle

2D : bidimensionnelle

Minuscules romaines :

$f(z)$: fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)

$f'(z)$: la première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z

$g(z)$: dérivée de la fonction de cisaillement

x, y, z : les axes de coordonnées cartésiennes

a, b : dimensions de la plaque

h : épaisseur de la plaque

k : l'indice de la variation matériel

u, v, w : composantes de déplacement

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$: Composantes des dérivées de déplacement par rapport le temps

w_b : composante de déplacement de flexion

w_s : composante de déplacement de cisaillement

q : charge répartie

t : temps

k^b : la courbure due à la flexion

k^s : la courbure due au cisaillement

d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} les opérateurs différentiels

Majuscules romaines :

FGM : en anglais « Functionally Graded Materials ».

C_{ij} : Matrice élastique de Houke

U : énergie de déformation

V : travail des efforts extérieurs

K : énergie cinétique

$E(z)$: Module de Young à travers l'épaisseur en fonction de (z)

E_0 : Module de Young de la face homogène.

E_c : Module de Young de la céramique.

E_m : Module de Young du Métal.

V_c : Fraction volumique de la céramique.

V_m : Fraction volumique du Métal.

$G(z)$: Module de Cisaillement à travers l'épaisseur en fonction de (z)

A : l'aire de la plaque.

C : contour de la plaque

N_x, N_y, N_{xy}, N_z : Efforts normaux dans la plaque

M_x, M_y, M_{xy} : Moments de flexion dans la plaque

M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b : Moments supplémentaires dus à la flexion

M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s : Moments supplémentaires dus au cisaillement

S_{xz}, S_{yz} : Efforts tranchants dans la plaque

$A, B, D, D^s, B^s, H^s, A^s$: les matrices de rigidités de la membrane, couplage membrane/flexion, flexion et de cisaillement.

$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$: les inerties massiques

a_{ij} : coefficients de la matrice de rigidité

m_{ij} : coefficient de la matrice masse

Minuscules grecques

α : porosité

σ_x, σ_y : contraintes normales

τ_x, τ_y, τ_z : contraintes de cisaillement

τ_{xz}, τ_{yz} : contraintes de cisaillement en plan.

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: déformations dans les directions x, y et z

$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$: déformations de distorsion

ν : Coefficient de Poisson

$\mu(z), \lambda(z)$: Coefficients de Lamé.

φ_x, φ_y : rotations d'une normale transversale

φ_z : déformation normale

$\rho(z)$: la masse volumique à travers l'épaisseur en fonction de (z).

θ_1, θ_2 : composantes de rotation autour les axes x et y respectivement

g_{xz}, g_{yz} : les déformations en plan.

∂ : dérivée partielle.

δ : quantité virtuel.

ω, β : fréquences propres.

Majuscules grecques :

$\Psi(z)$: fonction de cisaillement (Hyperbolique)

Introduction générale

Les matériaux, l'énergie et la science moderne sont les trois piliers de la technologie moderne. Le développement durable de notre civilisation nous offre des stratégies l'utilisation des matériaux innovants. Selon les besoins de la récente technologie, tenant en compte l'évolution de l'industrie avec toutes ses spécialités et les recherches scientifiques expérimentales sur ce sujet.

Une nouvelle classe des matériaux apparaît sous le nom « matériaux composites » qui offrent un grand challenge vis-à-vis les matériaux classiques. Le développement de ces matériaux a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. Une avancée de matériaux composites appelés matériaux à gradient de propriétés (FGM) ont reçu une considération appréciable dans la conception de l'ingénierie structurelle, en particulier lorsque les matériaux sont soumis à très forte charge thermique. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; est un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans une ou plusieurs directions pour obtenir un profil bien déterminé. Cette transition continue des propriétés qui élimine le problème d'interface en raison du changement compétent et continue des propriétés matérielles d'une surface à l'autre permet d'atténuer le problème de singularité, de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques, leur utilisation et leur progression croissante dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique. Cependant les FGM touchent un large éventail d'applications dans de multiples autres domaines comme ceux de la médecine, de l'électricité, du nucléaire,... etc.

L'objectif de cette étude doctorale est de présenter une nouvelle théorie raffinée pour analyser l'effet de la porosité qui peut éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux en FGM lors de leur fabrication sur le comportement mécanique des plaques (statique, dynamique). Par ailleurs, un autre objectif de ce travail est d'étudier l'influence de différents paramètres sur les différents types de comportements tels que la géométrie, les conditions aux limites, l'épaisseur (mince ou épaisse), le paramètre du matériau utilisé (homogène ou isotrope (FGM)).

Cette thèse est organisée en cinq (05) chapitres :

Dans le **Premier chapitre**, nous présentons une rapide revue sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs historiques, leurs évolutions et les domaines d'utilisation, ensuite une synthèse bibliographique donne un aperçu général des méthodes de la détermination de leurs caractéristiques mécaniques, basant sur les aspects fondamentaux du comportement des matériaux hétérogènes

Le chapitre Deux intéresse aux différentes théories développées pour étudier et analyser les plaques en FGM et leurs modèles, une présentation de leurs principes de base et leurs hypothèses sont aussi discutées. On trouve également une démonstration détaillée des théories d'ordre supérieur et leurs raffinements. Bien évidemment, le nombre de variables dépend de la théorie adaptée, ce qui augmente considérablement le taux de calculs. Une source de nombreux travaux récents et complémentaires introduisant l'effet de la déformation normale est présentée à la fin de ce chapitre.

Dans le **chapitre Trois**, une formulation d'une nouvelle théorie raffinée est utilisée pour analyser des plaques FGM imparfaites sous différentes conditions aux limites en flexion, en tenant compte de la porosité qui peuvent éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) lors de leur fabrication. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente solution, en montrant l'influence du taux de répartition de la porosité dans le matériau de base sur le comportement mécanique de la plaque FGM.

Le chapitre quatre est basée sur l'analyse des vibrations libres de plaques FGM poreuses en tenant compte du taux de distribution des porosités. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente solution, en montrant l'influence du taux de répartition de la porosité du matériau de base sur le comportement mécanique de la plaque FGM.

Le cinquième chapitre est réservé à une nouvelle étude des plaque sandwich en FGM, une nouvelle distribution des porosités est proposée, des exemples numériques sont présentés pour illustrer l'influence du taux de répartition de cette porosité dans le matériau de base sur le comportement mécanique de ces dernier.

Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

Chapitre I:
Généralités sur les matériaux
à gradient de propriétés type
FGM

I.1 Introduction

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes. En effet, les FGM sont une classe de composites particuliers caractérisée par une composition et une structure qui varient d'une manière graduelle dans le matériau, conduisant ainsi à une variation progressive des propriétés [Nabil Ferguen et al, 2011]. Cette gradation des propriétés confère à ces matériaux une plus grande efficacité par rapport aux matériaux composites conventionnels. Le potentiel des matériaux à gradient de propriétés est illustré pour les applications de haute technologique: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et le génie civil [O. Bouaziz, 2011].

Cette stratégie de développement semble très prometteuse en particulier pour optimiser la tenue en température et la ténacité. La plupart des FGM sont constituées d'un mélange de céramique et de métal. Cette composition est variée d'une surface riche en céramique à une surface riche en métal avec une variation graduelle des fractions volumiques de ces deux matériaux entre les deux surfaces [J. N. Reddy, 2000]. La diversité des matériaux et de leurs propriétés correspond à la diversité des applications techniques : éléments porteurs d'une construction civile ou mécanique, éléments d'un circuit électromagnétique, protecteurs résistants aux agressions thermique ou chimiques, capteurs. La multitude d'objectifs provoque toujours de nouveau matériau.

1.2. Idée générale

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques".L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [Koizumi, 1997].

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux et les murs thermiques spéciaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. [Koizumi, 1992]

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier de charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Côté haute températures) et des métaux (Côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SIC/C par C.V.D (Chemical Vapor Deposition ou dépôt chimique en phase vapeur) ;
- Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
- Le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température ;
- Et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches. [Okamura, 1991].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé

pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique. [Okamura, 1991]

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini, 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas [Koizumi, 1997].

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires»	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

1.3. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel

Généralement les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes (figure 1).

Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de

gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

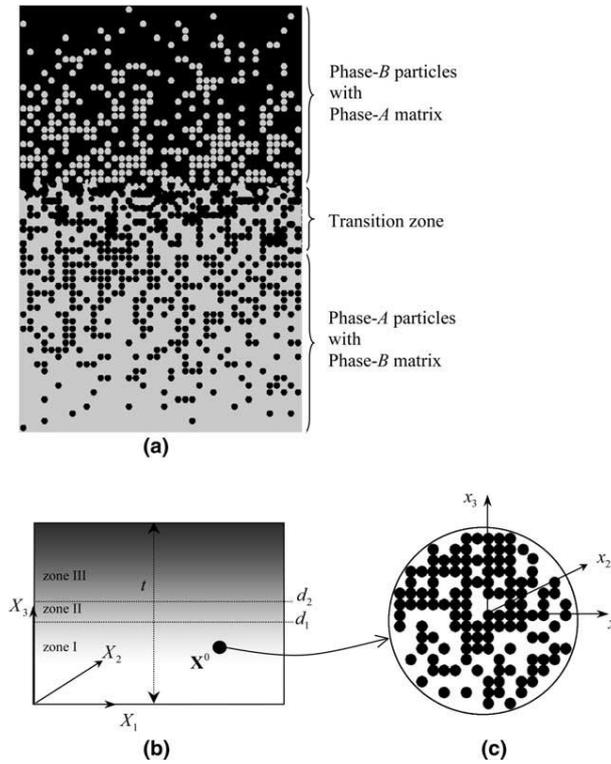


Figure I.1. Schematic illustration of a two-phase FGM sample: (a) typical microstructure including A and B phases; (b) three zones in macroscopic scale X ; and (c) RVE in the microscopic scale x .

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c-à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 1.2 – a) ;

2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure 1.2 – b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).

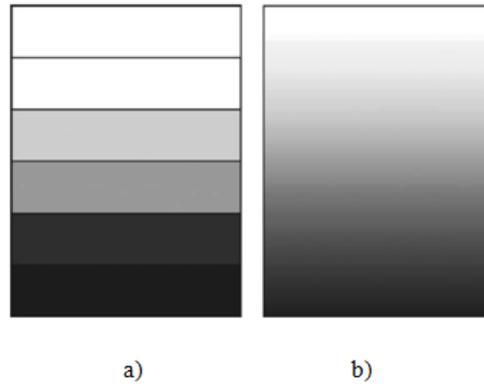


Figure I.2 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.

I.4. Applications des matériaux FGM dans l'industrie

La conception des FGM est récente, et leurs applications sont encore rares. Les FGM permettent par exemple d'associer dans une même structure des matériaux ayant des propriétés thermiques différentes sans provoquer de contraintes. Le japonais Sumitomo Electric a ainsi développé un matériau pour bouclier thermique dont l'une des faces est en composite carbone-carbone, résistant à très haute température, et l'autre en carbure de silicium, bon conducteur de la chaleur. Les FGM pourraient être utilisés également pour la génération thermoélectronique de l'électricité et dans les piles solaires.

Au début, les matériaux à gradient de fonction ont été élaborés autant que matériaux résistants à des contraintes thermiques abusives pour les structures aéronautiques et les réacteurs à fusion [Hirai 1999] et [Uemura 2003]. Maintenant Ils sont développés pour une multitude d'objectifs structurels dans les environnements sous conditions de haute température. Les applications des matériaux FGM sont diverses et nombreuses, ils offrent de grandes performances dans les applications où les conditions de fonctionnement sont sévères.

Souvent les couches en céramiques peuvent être utilisées comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques [Nguyen 2007], des sondes [Müller2003], des déclencheurs [Qiu 2003], des armures métal/céramique [Liu 2003], des détecteurs photoélectriques [Paszkiewicz 2008] et des implants dentaires (figure I.3) [Watari 2004]. Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de FGM ont été publiées dans les dernières décennies. Elles prouvent que la majeure partie de première recherche étudiée dans FGM s'était concentrée sur l'analyse du comportement mécanique et le traitement de la

rupture sous l'effet des contraintes thermiques [Shen 2009]. Une étude complète de la flexion et l'analyse de vibration des plaques et des structures de coquille faites de FGM a été présentée par [Shen2004]. Récemment, Birman et Byrd [Birman 2007] ont présentés un examen des principaux développements dans FGM qui inclut des problèmes de transfert de chaleur, contraintes, stabilité et analyses dynamiques.

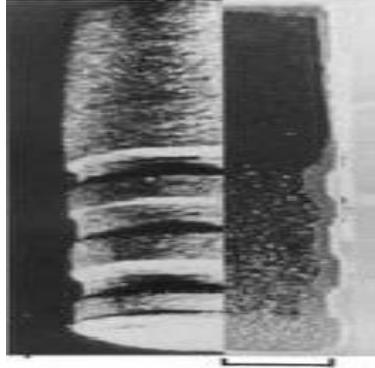


Figure I.3 Implant dentaire en FGM (Ti/20HAP).Aspect externe (gauche) et section transversale (droite) [Watari 2004]

I.5. Structures sandwiches en FGM

Les structures sandwiches, en raison de leurs propriétés exceptionnelles, telles que la rigidité et la résistance spécifiques élevées ainsi que la capacité d'absorption d'énergie, ont été largement utilisées dans les domaines aéronautique, aérospatial, naval/maritime, construction, transport et énergie éolienne. Cependant, le changement brusque des propriétés matérielles à travers les interfaces entre les couches et le noyau peut entraîner des contraintes inter laminaires (contraintes d'interfaces) importantes, conduisant souvent à une délamination, ce qui constitue un problème majeur dans les structures sandwich. L'une des solutions à ce problème est d'explorer le matériau FGM dans la conception en sandwich. Les FGM sont une classe de matériaux composites avancés dans lesquels les propriétés du matériau varient continuellement, éliminant ainsi les changements brusques de propriétés mentionnés ci-dessus.

Les structures sandwiches FGM peuvent être divisées en trois types: type-A, plaques sandwich avec couches faciales FGM et noyau homogène; type B, plaques sandwich avec des feuilles de face homogènes et un noyau FGM; type C, plaques sandwich avec une couche supérieure homogènes et les couches centrale et inférieure en FGM.

1.6. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multiphase à travers l'épaisseur. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt (Chen 2009).

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I.1})$$

Où P_i et V_i sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif i avec la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants donne l'unité 1 :

$$\sum_{i=1}^n V_{Fi} = 1 \quad (\text{I.2})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

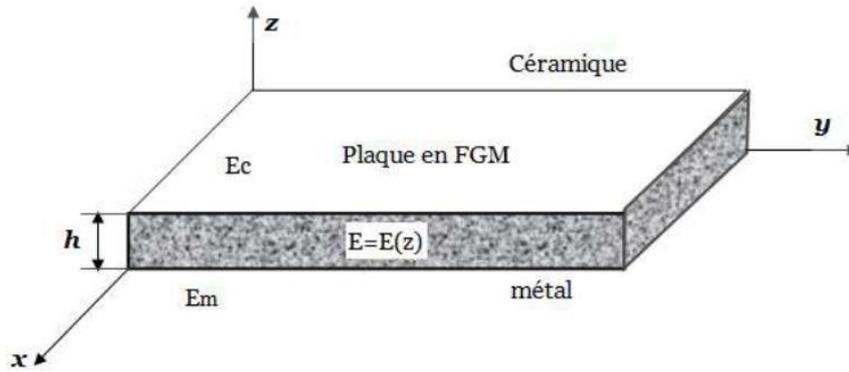


Figure (1.4) Géométrie d'une plaque FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur (fig.I.4). Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z), soit : $E = E(z)$ et $\nu = \nu(z)$.

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général (Fig.1.13). Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_c V_c + P_m V_m \quad (I.3)$$

$$V_c + V_m = 1 \quad (I.4)$$

Jin and Batra [Jin1996], Ziou et al. [Ziou 2016] ont indiqué que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM varié en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.7. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (I.5)$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois la fraction volumique locale V à été définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao, 1995]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (I.6)$$

Où E_c et E_m sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure ($z = +h/2$) et ($z = -h/2$) de la surface inférieure de la plaque FGM.

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la (figure 1.5). Il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

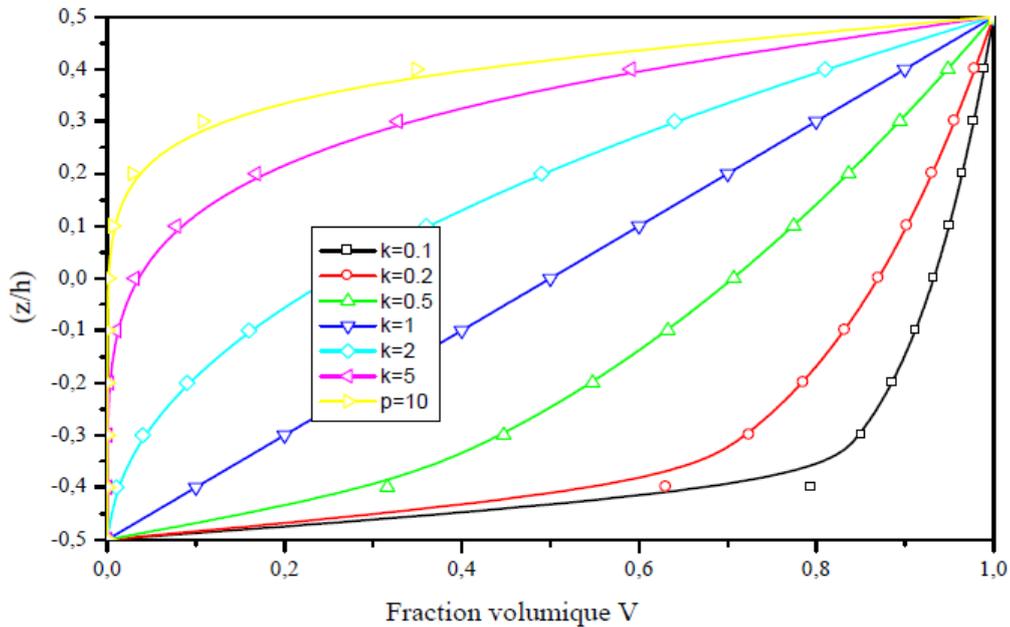


Figure. I.5. Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM

I.8. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Chi et al [Chi. 2003] ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_c(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour: } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.7)$$

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour: } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.8)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par

$$E(z) = V_c(z)E_c + [1 - V_c(z)]E_m \quad \text{Pour: } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.9)$$

$$E(z) = V_m(z)E_c + [1 - V_m(z)]E_m \quad \text{Pour: } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.10)$$

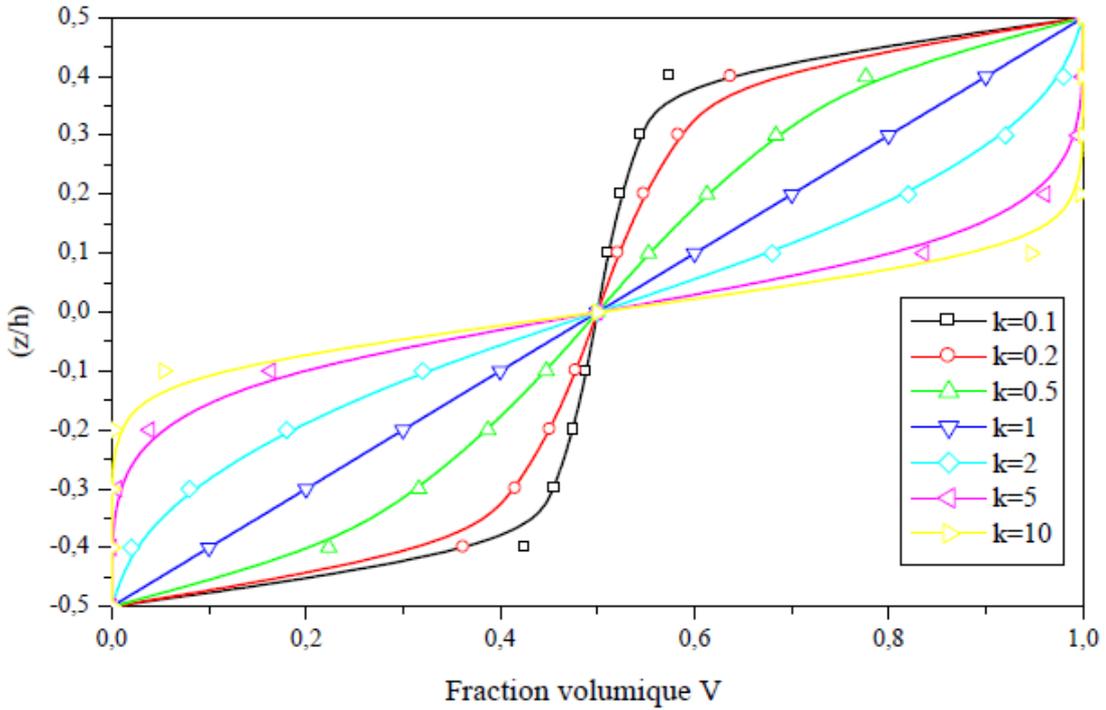


Figure. I.6 Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM)

I.9. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

En 1983, F. Delale., F. Erdogan [Delale 1983] ont traité le problème d'élasticité plane pour un milieu non homogène contenant une fissure dont les propriétés matérielles sont décrites par une fonction exponentielle E-FGM comme suit:

$$E(z) = E_m e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad \text{ou} \quad B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_c}{E_m}\right) \quad (\text{I. 11})$$

La variation du module d'Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la (fig. I.7).

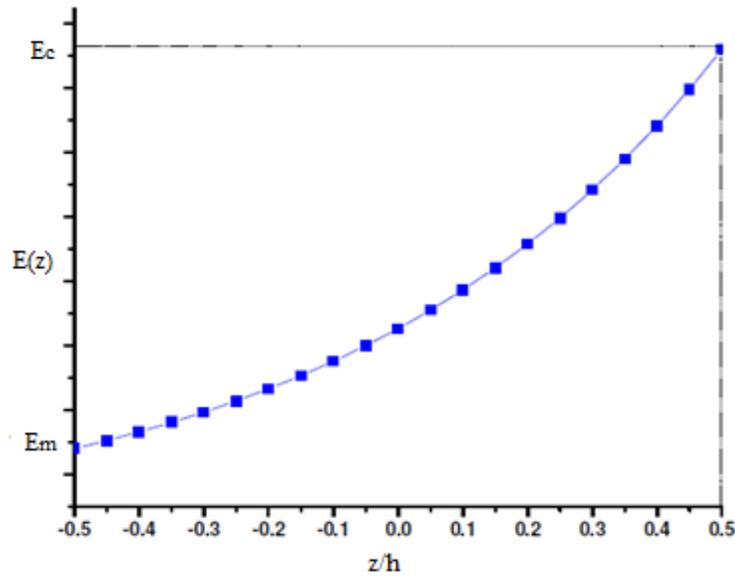


Figure. I.7. Variation du module de Young à travers l'épaisseur (E-FGM)

I.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. On conclut que l'objectif principal des matériaux à gradient fonctionnels est l'optimisation locale des propriétés matérielles par association des propriétés spécifiques des différents matériaux au sein d'une même structure représentant une forme considérablement plus simple et bien plus répandue aux exigences de la technologie moderne.

Les FGMS sont considérés comme des excellents matériaux de pointe en termes de résistance et de durabilité, mais il existe un inconvénient objectif lié à la technique de leur fabrication compliquée en raison de diversité des propriétés physiques et mécaniques des matériaux constitués (Par exemple : température de fusionetc.) qui implique un processus de fabrication très précis et très coûteux.

Chapitre II:
Théories des plaques en
matériaux à gradient de
propriétés

II.1. Introduction

Les plaques sont des éléments structurels conçus pour résister à l'application charges transversales en développant des contraintes de flexion. La théorie des plaques permet de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges, elle s'inspire de la théorie des poutres. Quatre classes d'équations dans un modèle de mécanique des solides, y compris la théorie des plaques, comportant

- Les équations du mouvement ;
- Relations déformations-déplacements (et rotations) ;
- Loi de comportement les relations de contrainte-déformations ;
- Et les équations de compatibilité.

II.2. Historique

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces. La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

II.3. Revue sur les théories des plaques FGM:

Depuis la fondation des matériaux à gradient de propriétés, les théories particularisées à analyser des structures en ces matériaux sont établies à nouveau, notre travail est basé sur l'étude des plaques. La majorité des théories présentées ici se sont des extensions des théories analysant les plaques isotropes ou composites. À ce stade, diverses théories ont été proposées, et prennent un axe important dans la mécanique des structures. De la théorie simplifiée de Love-Kirchhoff, certaines se sont des améliorations, d'autres sont des théories plus précises.

Aujourd'hui, les recherches sur les plaques en FGM ont acquis un intérêt appréciable, On peut les regrouper en trois principaux groupes selon l'approche adoptée :

- a) Théories des plaques FGM bidimensionnelles,
- b) Théories des plaques FGM tridimensionnelles,
- c) Approches Quasi-dimensionnelles des plaques FGM.

II.3.1. Théorie de plaques bidimensionnelles :

L'ensemble de ces théories sont basées sur l'état de contraintes planes, par conséquent la déformation normale est négligée ($\varepsilon_z = 0$), sachant que l'aspect géométrique de la plaque est défini par une surface de référence plane (plan xy) et par une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur). Cette définition favorise le choix d'une cinématique spécifique par rapport à la cinématique générale d'un solide, le facteur de classification de ces théories est l'importance de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, cette particularité conduit à l'effet de cisaillement transversal à travers l'épaisseur, ce dernier est présenté dans la cinématique adaptée. Pour cela, nous atteindrons aux trois classes suivantes :

II.3.1 a. La théorie classique des plaques (Classical plate theory CPT) :

Les théories classiques, dites théories des plaques minces, où la contrainte normale transversale est négligeable, due à faible épaisseur de la plaque. Cette théorie a été adoptée par Feldman et Aboudi [Feld1997], Abrate [Abr2008], Mahdavian [Mah2009], et Mohammadi et al. [Moh2010], pour étudier le flambement des plaques minces en FGMs. Cependant, la théorie classique des plaques en FGMs sous-estime la flèche de déplacement et surestime les fréquences propres ainsi que les charges critiques de flambement des plaques modérément épaisses en FGMs [Red2004]. la théorie se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II-1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

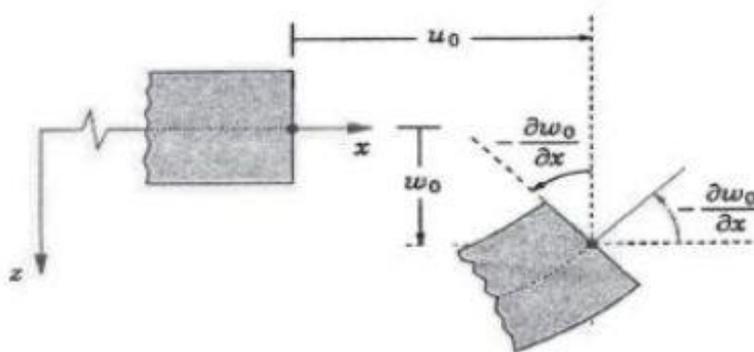


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (J.N. Reddy, 1997).

Ce modèle de plaque peut être référé en Timoshenko et Woinowsky-Krieger (S.P. Timoshenko., S.Woinowsky-Krieger, 1959), Reddy (J.N. Reddy, 1997 ; J.N. Reddy , 1999.),

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement basé sur est donné par :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{II. 1}$$

Avec $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, w_0)$ sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.3.1 b. Théorie des plaques du premier ordre (First Order Shear Plate Theory FSDT)

Les théories de premier ordre [Reis1945], [Mind1951], tiennent en compte l'effet de cisaillement transversal, mais elles nécessitent d'introduire des facteurs de correction de cisaillement pour satisfaire les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal, à la surface supérieure et inférieure de la plaque. Plusieurs études ont été adoptées pour analyser le comportement mécanique des plaques basant sur la théorie de cisaillement de premier ordre dans les littératures [Del2004], [Yan2005], [Zha2009], [Mor2012], [Men2012], [Yag2013] et [Ras2012].

Dans la théorie précédente, on a opté des hypothèses cinématiques qui négligent le cisaillement. Une théorie semblable, appliquée aux plaques modérément épaisses, est proposée par Reissner et Rayleigh [Reis1945]. L'idée principale est de présenter l'influence de cisaillement transversal sur le comportement statique et dynamique des plaques isotropes épaisses, notamment, dans les travaux de Mindlin [Mind1951]. La cinématique de Mindlin-Reissner est une extension celle de Kirchhoff-Love, néanmoins, la normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne dans la configuration déformée (due à l'effet de cisaillement transversal).

Alors, Le champ de déplacements:

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement de Reissner-Mindlin est présenté par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II. 2})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement.

$$\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II. 3})$$

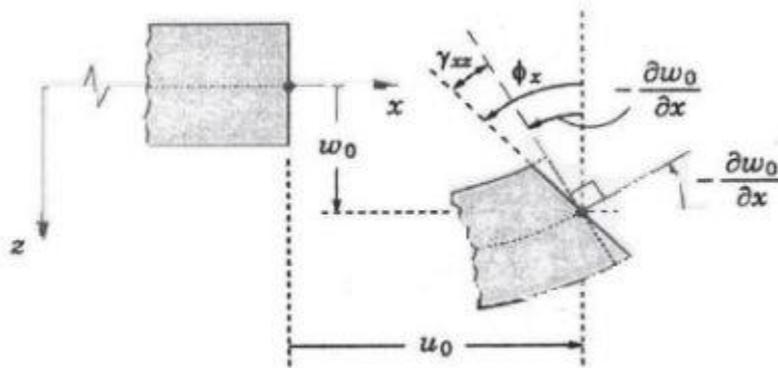


Figure II.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (J.N. Reddy, 1997).

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevée ont été développées.

II.3.1 c. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSST)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale.

Pour éviter l'introduction des facteurs de correction, une bibliothèque volumineuse existe sur ce sujet, car les recherches internationales récentes font l'actualité dans le domaine d'analyse des plaques et coques, isotropes ou composites, en analyse statique ou dynamique. En effet, beaucoup d'auteurs proposent des théories dites les théories d'ordre supérieur. Ces théories sont basées sur des distributions plus générales de la cinématique, éventuellement, les contraintes de cisaillements à travers l'épaisseur.

D'une façon générale, La cinématique des théories d'ordre supérieur sont basées sur le développement de série de Taylor, d'une manière générale, elles s'expriment :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + Z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + Z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + Z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + Z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II. 4})$$

Parmi les premiers, Nelson et Lorch [Nel1977] ont développé le champ cinématique précédent en introduisant neuf inconnus de déplacement, Lo et al. [Lo1977] avec onze inconnus, Bhimaraddi et Stevens [Bhi1984] avec cinq inconnus même pour Reddy [Red1984] avec cinq inconnus, Kant et Pandya [Kan1988] avec sept inconnus, Kant et Khare [Kan1997] avec neuf inconnus et Talha and Singh [Tal2010] avec onze inconnus. D'autres théories d'ordre supérieur sont basées sur la formulation unifiée de Carrera (CUF) citées dans les références [Tor2009], [Nev2012a], [Nev2012b], [Nev2013], [Tor2013], [Vio2013a], [Vio2013b], [Faz2013] et [Tor2014] et ont été les utilisés aussi pour étudier des structures en FGM.

En principe, ces théories d'ordre supérieur sont plus précises que les théories du premier ordre et la théorie classique de Love-Kirchhoff. La précision est augmentée avec l'ordre du développement, c'est à dire avec le nombre d'inconnus supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacements indépendants dépasse celui des modèles classiques (trois dans le modèle Love-Kirchhoff et cinq pour le modèle Reissner-Mindlin).

Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications ont été proposées. Toutes ces théories sont intéressantes soit pour une présentation correcte de la cinématique ou les contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, soit pour éviter l'introduction des facteurs de correction, mais il faut distinguer que ces théories imposent un nombre important de paramètres des déplacements supplémentaires. Ceci pose un

inconvenient sérieux lors de l'application des conditions aux limites sur les frontières et la formulation de leurs modèles numériques (notamment la méthode des éléments finis). Tout ça influe directement sur le taux de calcul et l'efficacité de la théorie choisie.

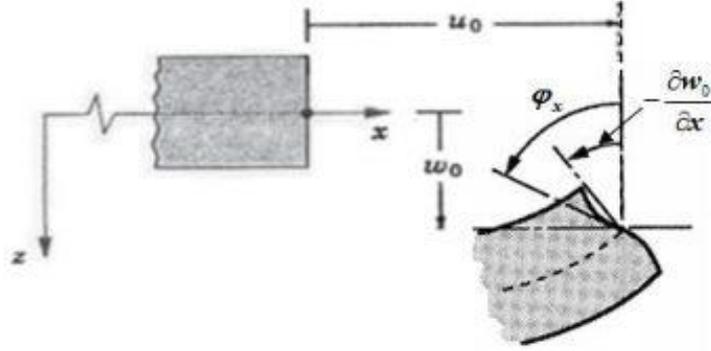


Figure II.3: Illustration de la plaque d'ordre élevé (J.N. Reddy, 1997)

Souvent, on impose les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque. Plusieurs auteurs ont exprimé un champ de déplacement raffiné basé sur le développement de la cinématique est utilisé avec :

$\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(2)} = \phi_i^{0(3)} = \phi_i^{0(1)} = 0, \phi_\alpha^{0(4)}, \alpha = \{1,2\}$ dépendent à $\phi_\alpha^{0(1)}$ et à w_α L'expression devient :

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_\alpha(x_1, x_2) + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \quad (\text{II. 5})$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \quad (\text{II. 6})$$

Voici quelques contributions importantes de développement des modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

Ambartsumyan [Amb1969]:
$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II. 7})$$

Reissner [Reisb], Panc [Pan1975] :
$$f(z) = \frac{5}{2}z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II. 8})$$

Levinson [Lev1980], Murthy [Mur1981] et Reddy [Red1984]:
$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II. 9})$$

h étant l'épaisseur de la plaque.

La plupart de ces modèles adoptés pour étudier la mécanique des plaques en FGMs ont les mêmes cinq inconnus, citons la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre [Red2000], théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale [Zen2006], théorie de déformation de cisaillement hyperbolique [Atm2010], [Ben2010].

Récemment, d'autres auteurs ont proposé un raffinement de la théorie d'ordre supérieur utilisant quatre inconnus, ces théories ont une formulation simple basée sur la décomposition de déplacement transversal en deux parts, composante de flexion et l'autre de cisaillement. En effet, on exprime les rotations de la normale en fonction de déplacement transversal, de tel sort, le champ de la cinématique s'exprime par :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{II. 10}$$

Cette simplification mène a un nombre réduit des équation de mouvement en termes d'inconnus , dans les recherches actuelles sur ce sujet , nous trouvons plusieurs contributions basées sur l'amélioration de la fonction de cisaillement $f(z)$ pour donner une bonne satisfaction de la condition de nullité des contraintes de cisaillement transversal à la surface supérieure et inférieure de la plaque , dans l'analyse statique , dynamique et plus loin dans le cas thermomécanique . Les travaux de Tounsi et al [Tou2013], Houari et al [Hou2010] et Hamidi et al [Ham2012] ont étudiés le comportement mécanique et thermique des plaques en FGM présentant des améliorations considérables dans la fonction de cisaillement :

- Fonction de cisaillement Trigonométrique [Tou2013]:

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{II. 11}$$

- Fonction de cisaillement hyperbolique [Ait Atmane et al, 2010]:

$$f(z) = z - \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} z \frac{\left(\frac{h}{\pi}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \tag{II. 12}$$

- Fonction de cisaillement polynomiale [Hou2010]

$$f(z) = z \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (\text{II.13})$$

En conclusion, les équations résultantes du mouvement sont plus compliquées par rapport celles optées avec la théorie classique et la théorie de premier ordre. De plus, il doit noter que les théories deux-dimensionnel des plaques susmentionnés (CPT, FSDT, et HSDT) omissent l'effet de l'étirement de l'épaisseur dû à l'état de contraintes planes $\varepsilon_z = 0$, comme elles considèrent un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur. Cette hypothèse est appropriée pour les plaques en FGMs minces ou modérément épaisses, mais elle est déficiente pour les plaques en FGMs épaisses ou avec forte épaisseur [Qia2004].

L'importance de l'effet de l'étirement de l'épaisseur dans les plaques en FGMs a été identifié de façon concise dans le travail de Carrera et al. [Car2011]. Cet effet joue un rôle significatif dans les plaques en FGMs épaisses et devrait être pris en considération.

II.4. Théorie de plaques tridimensionnelles (Élasticité 3D) :

Pour évaluer le comportement exact des plaques épaisses, il faut trouver des nouvelles stratégies pour une description précise des champs de contraintes à traves l'épaisseur, On note surtout les contraintes de cisaillement. Malgré que les théories d'ordre supérieur maîtrisent efficacement les problèmes traités avec succès, mais il faut remarquer que la déformation normale transverse est négligée dont elle a un impact important sur la précision souhaitée. Le recours à l'élasticité tridimensionnelle est donc la règle, les principales idées pour résoudre ce type de problème (en analyse statique ou dynamique) sont : la construction des champs des contraintes et disposer leurs solutions exactes ou leurs approximations.

Récemment, plusieurs auteurs ont été, en outre, consacrés leurs recherches en particulier de donner des expressions analytiques exactes, bien qu'elles sont éventuellement approximées pour résoudre de façon récurrente les problèmes traités. S.S Vel et al [Vel2004] ont présenté des solutions exactes pour l'analyse vibratoire des plaques FGM, Uymaz et Aydogdu [Uym2007] ont proposé une solution approche par une série des études utilisant les polynômes de Chebyshev, mêmes problèmes ont été traités par Li et al [Li2008] qui introduisent la méthode de Ritz comme une stratégie de résolution.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{II. 14}$$

De plus, pour franchir les limites de la résolution analytique et approximative des problèmes tridimensionnels, seules les méthodes numériques permettant d'étudier les plaques épaisses en appliquant les théories d'élasticité tridimensionnelle, de géométries quelconques et sous différents types de chargement ainsi que les conditions aux limites.

L'analyse des plaques épaisses par les méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis et les méthodes approximatives, offrent des avantages et des potentialités primordiales, ces outils, dans bien des cas cependant, nécessitent un grand nombre de degrés de liberté et des techniques de discrétisation robustes. En plus, la maîtrise et la vérification des données due à un large système des équations sont souvent difficiles et parfois nécessitent une informatique puissante pour obtenir des résultats à précision forte et satisfaisante.

Plus récemment, Huang et al. [Hua2008], Amini et al. [Ami2009] ont donné des solutions tridimensionnelles exactes dans le cas des vibrations libres des plaques en FGM, Malekzadeh [Mal2009] a adopté une solution semi-analytique basée sur la méthode des quadratures différentielles, Zankour [Zen2007] a étudié des plaques en FGM épaisses basant sur les solutions de l'élasticité tridimensionnelle avec une variation exponentielle des propriétés matériels à travers l'épaisseur (le modèle exponentiel).

II.5 Approches quasi-tridimensionnelles :

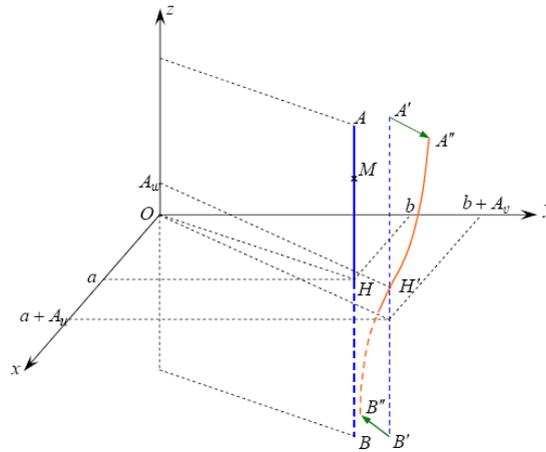


Figure. II.4: Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur

Pour éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle et de l'introduction de l'effet de déformation normale transverse, Cette particularité devient importante pour définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire. De façon générale, toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche basées sur la jonction d'une fonction non-linéaire de la coordonnée de l'épaisseur (z) de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque.

En procédant de la sorte, on cherche à réduire le nombre des variables et de formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques plus générales en analyse statique ou dynamique.

En générale, les théories d'ordre supérieur et de déformation normale lesquelles concèdent l'effet de l'étirement de l'épaisseur (stretching effect) peuvent numériquement être implantées en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par Carrera [Car2001] [Car2003] [Car2005], et récemment évoluée par Demasi [Dem2009a] [Dem2009b] [Dem2009c] [Dem2009d] et [Dem2009e].

Pour des informations supplémentaires et les applications de la formulation unifiée de Carrera, les récents ouvrages de Carrera et al [Car2011a] et [Car2011b] font l'objet. De nombreux travaux basant sur la théorie d'ordre supérieur et de déformation normale ont été proposés dans les littératures [Mat2009], [Tal2010], [Red2011], ces théories sont lourdes et

coûteuses, néanmoins, elles génèrent un nombre important des inconnus. Talha et Singh [Tal2010] ont proposé une cinématique d'ordre supérieur et de déformation normale avec onze variables, ils présentent des résultats en analyse statique et vibrations libres utilisant la résolution par éléments finis, l'élément fini proposé est de 117 degrés de liberté, ça impose une difficulté d'implantation numérique et un taux de calcul trop élevé. Jha et al [Jha2013] ont étudié le comportement statique et dynamique des plaques FGM avec un élément fini basé sur une cinématique d'ordre supérieur de douze variables de déplacement. Reddy [Red2011] présente une formulation théorique d'un modèle avec onze variables en analyse non linéaire ; la résolution d'un problème non linéaire avec un nombre des inconnus élevé nécessite un large système des équations qui conduit aux difficultés de résolution. Neves et al. [Nev2012a], [Nev2012b] , [Nev2013] ont traité des problèmes des plaques en FGM en analyse statique et vibrations libres, le modèle choisi est basé sur la formulation unifiée de Carrera avec neuf inconnus avec une résolution numérique basée sur les fonctions d'approximations radiales basiques. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire.

Certaines approches connues comme les théories Quasi-tridimensionnelles sont développées par Zenkour [Zen2007] et récemment par Mantari et Guedes Soares [Man2012] [Man2013] , elles introduisent six inconnus, elles sont encore plus compliquées que la théorie de premier ordre. Ainsi qu'il y a un cadre de développer une théorie d'ordre supérieur et de déformation normale précise, laquelle est relativement simple à employer et en même temps retienne des caractéristiques physiques importantes. En effet, Thai et Kim [Tha2013b] ont présenté plus récemment une théorie de déformation du cisaillement sinusoïdale quasi-3D avec seulement cinq inconnus pour simuler le comportement à la flexion des plaques FGMs.

Le champ de la cinématique est basé sur la théorie d'ordre supérieur à quatre variables, une spécification est donc introduite à la composante de déplacement transversal pour le rendre variable à travers l'épaisseur, on injecte une fonction non linéaire en (z), alors la cinématique devient :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II. 15}$$

II.6 Conclusion

La réponse en flexion et les vibrations libres des plaques en FGM doivent être étudiées selon la théorie des plaques d'ordre élevée afin de décrire les équations d'équilibre du mouvement.

La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) donne des résultats acceptables, mais nécessite un facteur de correction de cisaillement. Alors que les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ne nécessitent pas de facteur de correction de cisaillement, mais leurs équations de mouvement sont plus compliquées que celles du FSDT.

Vu que la théorie d'ordre élevé nécessite un temps de calcul supérieur aux autres, nous proposons une autre alternative afin de réduire ce temps de calculs, en occurrence au théorie raffiné à quatre variables qui tient compte d'une variation parabolique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur, et par conséquent, un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. Le champ de déplacement de la théorie des plaques à quatre variables est choisi en fonction de la partition des déplacements transversaux en deux parts, composante de flexion et l'autre de cisaillement.

Chapitre III :
Comportement mécanique
sous chargement statique des
plaques poreuses en FGM

III. 1. Introduction

Ces dernières années, le concept de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) a été introduit pour la première fois par les scientifiques dans la région de Sendai au Japon. Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont une classe de composites qui présentent une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre et éliminent ainsi la concentration de contraintes trouvée dans les composites stratifiés. Les FGM, souvent isotropes et non homogènes, sont fabriqués à partir d'un mélange de deux matériaux pour obtenir une composition offrant une certaine fonctionnalité.

Dans les FGM, ces problèmes sont évités ou réduits par une variation progressive de la fraction volumique des constituants plutôt que de la modifier brusquement à travers l'interface. La fonction de la loi de puissance et la fonction exponentielle sont couramment utilisées pour décrire les variations des propriétés matérielles des FGM. Cependant, à la fois dans la loi de puissance et dans les fonctions exponentielles, les concentrations de contraintes apparaissent dans l'une des interfaces dans laquelle le matériau change continuellement mais rapidement.

Étant donné que les effets de déformation par cisaillement sont plus prononcés dans les plaques épaisses des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), les théories de déformation par cisaillement doivent être utilisées pour analyser ces plaques. De plus, l'utilisation croissante des plaques comme composants structurels dans les divers domaines tels que la technologie marine, civil et aérospatial a rendu l'étude de leur comportement mécanique nécessaire. Plusieurs études ont été entreprises sur le comportement mécanique des plaques FGM. Tous les auteurs (Abdelaziz et al. 2017, Adim 2018, Abualnour et al. 2018, Ait Atmane et al. 2015, Carrera et al. 2011, Chikr et al. 2020, Refrafi et al. 2020, Bousahla et al. 2020, Bellal et al. 2020, Bensattalah et al. 2018, Daouadji et al. 2016b, Hamrat et al. 2020, Hassaine Daouadji 2013, Hassaine Daouadji et al. 2020, Tounsi et al. 2020, Shariati et al. 2020, Al-Furjan et al. 2020, Al-Furjan et al. 2020, Benhenni et al. 2019, Benferhat et al. 2018, Bensattalah et al. 2020, Boukhelif et al. 2019, Boulefrakh et al. 2019, Chaabane et al. 2019, Benferhat et al. 2016b, El-Haina et al. 2017, Hassaine Daouadji et al 2016, Demirhan et al.2019, Khalifa et al.2018, Reddy 2001, Slimane et al. 2018 et Zenkour 2009), ont étudié la flexion d'une plaque polygonale supportée avec un gradient de propriété donné par une théorie de déformation de cisaillement d'ordre. La théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) donne des résultats acceptables, mais nécessite un facteur de correction de cisaillement. Alors

que les théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ne nécessitent pas de facteur de correction de cisaillement, mais leurs équations de mouvement sont plus compliquées que celles du FSDT. Par conséquent, Tounsi (2013) a développé une théorie des plaques à quatre variables, cette théorie tient compte d'une variation parabolique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur, et par conséquent, un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. Le champ de déplacement de la théorie des quatre plaques variables est choisi en fonction de la partition des déplacements transversaux dans les parties de flexion et de cisaillement. La caractéristique la plus intéressante de la théorie des quatre plaques variables est qu'elle contient moins d'inconnues et d'équations gouvernantes que celles du FSDT et ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement. C'est donc la théorie la plus efficace. On note aussi que cette théorie a d'abord été développée pour les plaques isotropes, et récemment étendue aux plaques FGM, aux plaques sandwich FGM et aux nano-plaques.

En général, les théories de cisaillement et de déformation normale d'ordre supérieur qui prennent en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur peuvent être mises en œuvre en utilisant la formulation unifiée initialement proposée par plusieurs auteurs (Ait Yahia et al. 2015, Hassaine Daouadji et al. 2019, Mohamed Amine et al. 2019, Rabahi et al. 2019, Rabia et al. 2016, Benchohra et al. 2018, Kaddari et al. 2020, Addou et al. 2019, Medani et al. 2019, Bourada et al. 2019, Abdederak et al. 2018, Abdelhak et al. 2016, Benferhat et al. 2019, Belkacem et al. 2016, Benhenni et al. 2018, Rabhi et al. 2020, Benferhat et al. 2016a, Belabed et al. 2018, Cooke et al. 1983, Bensattalah T et al. 2016, Bouakaz et al. 2014, Bekki et al. 2019, Chaded et al. 2018, Chergui et al. 2019, Daouadji et al. 2016a, Tounsi et al. 2013, Bourada et al. 2020, Matouk et al. 2020, bane et al. 2019, Menasria et al. 2020, Rahmani et al. 2020, Balubaid et al. 2019, Rabahi et al. 2020, Tounsi et al. 2008, Tahar et al. 2016, Alimirzaei et al. 2019, Sahla et Al. 2019, Karami et coll. 2019, Zine et al. 2020, Wattanasakulponga 2014, Lee et al. 2002, Mokhtar et al. 2018, Thai et al. 2013, Younsi et al. 2018, Yazid et al. 2018 et Zaoui et al. 2019). De nombreuses théories de cisaillement et de déformation normale d'ordre supérieur ont été proposées dans la littérature. Ces théories sont lourdes et coûteuses en calcul car elles génèrent invariablement une multitude d'inconnues. Bien que certaines théories quasi-3D bien connues développées par Zenkour (2018) et par Mantari (2012) aient six inconnues, elles sont encore plus compliquées que la FSDT. Ainsi, il est possible de développer une théorie précise du cisaillement et de la déformation normale d'ordre supérieur, qui est relativement simple à utiliser et conserve simultanément des caractéristiques physiques

importantes. En effet, Tounsi (2013) a présenté une théorie de déformation par cisaillement sinusoïdale quasi-3D, avec seulement cinq inconnues pour l'analyse en flexion et en vibration libre des plaques FGM. Dans cette thèse, une nouvelle théorie raffinée est utilisée pour analyser des plaques FGM imparfaites sous différentes conditions aux limites en flexion, en tenant compte de la porosité qui peuvent éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) lors de leur fabrication. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente solution, en montrant l'influence du taux de répartition de la porosité dans le matériau de base sur le comportement mécanique de la plaque FGM.

III. 2. Formulation du problème

III.2.1.Relations constitutives des plaques en FGM (métal/céramique)

Considérons un imparfait FGM avec une fraction volumique de porosité, α ($\alpha \ll 1$), répartie uniformément entre le métal et la céramique, la loi de mélange modifiée est proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) est utilisée par plusieurs chercheurs comme (Benferhat et al. 2016a, Hassaine Daouadji 2017, Rabahi et al. 2016)

$$P = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III. 1})$$

Maintenant, la fraction volumique totale du métal et de la céramique est : $V_m + V_c = 1$ et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrite comme (tableau 1) :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{III. 2})$$

Par conséquent, toutes les propriétés pour une plaque FGM imparfaite peuvent être écrites comme (Benferhat et al. 2016a)

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c - P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III. 3})$$

On note que le nombre réel positif k ($0 \leq k < \infty$) représente la loi de puissance ou l'indice de fraction volumique, et z est la distance au plan médian de la plaque FGM. Lorsque k tend vers le zéro la plaque FGM devient une plaque entièrement en céramique par contre la plaque devient entièrement métallique pour une grande valeur de k . Ainsi, les équations du module d'Young (E) et de la densité du matériau (ρ) de l'imparfaite plaque FGM peuvent être

exprimées par (Benferhat et al. 2016a), dont un tableau récapitulatif regroupant les différentes distributions de porosité (tableau 1).

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c - E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III. 4})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m - (\rho_c - \rho_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III. 5})$$

Cependant, le coefficient de Poisson (ν) est supposé constant. Les propriétés matérielles d'une plaque FGM parfaite peuvent être obtenues lorsque α est mis à zéro.

Cependant, le coefficient de Poisson (ν) est supposé constant. Les propriétés matérielles d'une plaque FG parfaite peuvent être obtenues lorsque α est mis à zéro.

comme :

$$V_c + V_m = 1 \Rightarrow V_c = 1 - V_m \quad (\text{III. 6})$$

$$\text{et: } V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{III. 7})$$

Type I: plaque FG parfaite (Sans porosité $\alpha = 0$)

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m \quad (\text{III. 8})$$

Type II: 50% Ceramic, 50% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + E_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III. 9. a})$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c - E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III. 9. b})$$

Type III: 60% Ceramic, 40% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{2\alpha}{2} \right) + E_c \left(V_c - \frac{3\alpha}{2} \right) \quad (\text{III. 10. a})$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (3E_c - 2E_m) \frac{\alpha}{5} \quad (\text{III. 10. b})$$

Type IV: 40% Ceramic, 60% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{3\alpha}{2} \right) + E_c \left(V_c - \frac{2\alpha}{2} \right) \quad (\text{III. 11. a})$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (2E_c - 3E_m) \frac{\alpha}{5} \quad (\text{III. 11. b})$$

Type V: 75% Ceramic, 25% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{\alpha}{4} \right) + E_c \left(V_c - \frac{3\alpha}{4} \right) \quad (\text{III. 12. a})$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (3E_c - E_m) \frac{\alpha}{4} \quad (\text{III. 12. b})$$

Type VI: 25% Ceramic, 75% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{3\alpha}{4} \right) + E_c \left(V_c - \frac{\alpha}{4} \right) \quad (\text{III. 13. a})$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c - 3E_m) \frac{\alpha}{4} \quad (\text{III. 13. b})$$

Tableau III. 1 : Tableau récapitulatif qui regroupe les différentes répartitions de porosité dans le FGM (Céramique / Métal)

Types	Répartition du taux de porosité dans le FGM		module de Young	
	Céramique	Métal		
Type-I	Sans porosité		$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m$	(III. 14.a)
Type-II	50%	50%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2}$	(III.14.b)
Type-III	60%	40%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (3E_c + 2E_m) \frac{\alpha}{5}$	(III.14.c)
Type-IV	40%	60%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (2E_c + 3E_m) \frac{\alpha}{5}$	(III.14.d)
Type-V	75%	25%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (3E_c + E_m) \frac{\alpha}{4}$	(III.14.e)
Type-VI	25%	75%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + 3E_m) \frac{\alpha}{4}$	(III.14.f)

III. 2.2. Formulation théorique

III.2.2.1. Hypothèses de base

Considérons une plaque d'épaisseur totale h et composée de deux matériaux fonctionnellement gradué à travers l'épaisseur (Fig1). On suppose que le matériau est isotrope et que la granulométrie est supposée se faire uniquement à travers l'épaisseur. Le plan (xy) est considéré comme le plan médian non déformé de la plaque avec l'axe z positif vers le haut à partir du plan médian.

- Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les contraintes mises en jeu sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal w comprend trois composantes de flexion (w_b) et de cisaillement (w_s). Ces composantes sont des fonctions des coordonnées (x, y) et du temps t uniquement.

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \quad (\text{III. 15})$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable par rapport aux contraintes planes σ_x et σ_y .
- Les déplacements U dans la direction des x et V dans la direction des y consistent des composantes d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$U = u + u_b + u_s, \quad V = v + v_b + v_s \quad (\text{III. 16})$$

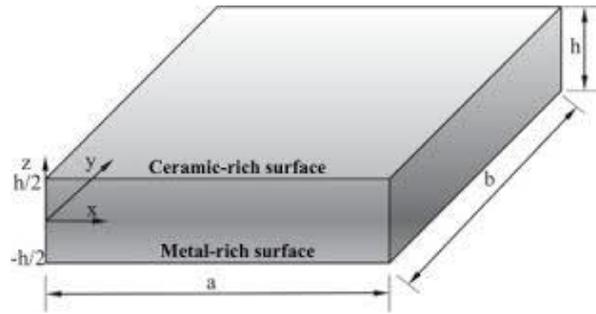


Figure III.1 : Géométrie d'une plaque rectangulaire en FGM

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées être similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression de u_b et v_b peut être donnée par :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III. 17})$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, conjointement avec w_s , aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} γ_{yz} , et donc des contraintes de cisaillement σ_{xz} σ_{yz} , à travers l'épaisseur de la plaque de telle sorte que les contraintes de cisaillement σ_{xz} σ_{yz} , sont nulles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et v_s peut être donnée par :

$$u_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_b = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III. 18})$$

III. 2.2.2. Cinématique:

Sur la base des hypothèses faites dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu à l'aide des équations. (III.15)-(III.18):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - z \left[1 - \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - z \left[1 - \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y, z) \end{aligned} \quad (\text{III. 19})$$

où u_0 et v_0 sont les déplacements du plan médian de la plaque dans les directions (x) et (y), respectivement ; w_b et w_s sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, tandis que $f(z)$ représente les fonctions de forme ; il s'agit en effet d'une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement hyperbolique (Hassaine Daouadji 2016), la répartition des déformations et des contraintes de cisaillement transverses le long de l'épaisseur est donnée par :

$$f(z) = z \left[1 - \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \quad (\text{III. 20})$$

Il convient de noter que contrairement à la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre, cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement. Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + z z \left[1 - \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + z z \left[1 - \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + z \left[1 - \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= 1 - \frac{d \left[z \left[1 - \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \right]}{dx} \gamma_{xy}^s \\ \gamma_{xz} &= 1 - \frac{d \left[z \left[1 - \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \operatorname{sech} h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \right]}{dz} \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III. 21})$$

Où :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & k_x^b &= \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, & k_x^s &= \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & k_y^b &= \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, & k_y^s &= \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}, & k_{xy}^b &= -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{III.22}$$

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{d \left[z \left[1 - \operatorname{sech} \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \operatorname{sech} \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \right]}{dz}$$

$$g(z) = 1 - f'(z) = 1 - \frac{d \left[z \left[1 - \operatorname{sech} \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \operatorname{sech} \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \right]}{dz}$$

L'état de contrainte dans chaque couche est donné par la loi de Hooke :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(z)}{1-\nu^2} & \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & \frac{E(z)}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III.23}$$

III.2.2.3. Équations gouvernantes

Les équations gouvernantes de l'équilibre peuvent être dérivées en utilisant le principe des déplacements virtuels. Le principe du travail virtuel dans le cas présent donne :

$$\int_{-h/2\Omega}^{h/2} \int [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \tag{III.24}$$

Où est la surface supérieure et q est la charge transversale appliquée.

Substitution d'équations. (III.19) et (III.22) dans l'équation. (III.24) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, équation (III.24) peut être réécrit comme :

$$\int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta k_{yz}^s + S_{xz}^s \delta k_{xz}^s] d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \tag{III.25}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \left\{ \frac{1}{z} \left[z \left[1 - \sec h \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \sec h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right] \right\} dz \quad (\text{III. 26})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \left(1 - \frac{d \left[z \left[1 - \sec h \left(\frac{\pi z^2}{h^2} \right) + \sec h \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2} \tan h \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \right]}{dz} \right) dz \quad (\text{III. 27})$$

Les équations gouvernantes de l'équilibre peuvent être dérivées de l'équation (III. 25) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en fixant les coefficients $u_0, \delta v_0, \delta w_b$ et δu_s à zéro séparément. Ainsi, on peut obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation par cisaillement.

$$\begin{aligned} \delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III. 28})$$

En utilisant l'équation (III. 22) dans l'équation (III.26), les résultantes des contraintes pour une plaque composée de trois couches peuvent être reliées aux déformations totales par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 29. a})$$

$$S = A^s \gamma \quad (\text{III. 29. b})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{III. 30. a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{III. 30. b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 30. c})$$

$$B^S = \begin{bmatrix} B_{11}^S & B_{12}^S & 0 \\ B_{21}^S & B_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^S \end{bmatrix}, D^S = \begin{bmatrix} D_{11}^S & D_{12}^S & 0 \\ D_{21}^S & D_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^S \end{bmatrix}, H^S = \begin{bmatrix} H_{11}^S & H_{12}^S & 0 \\ H_{21}^S & H_{22}^S & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^S \end{bmatrix} \quad (\text{III. 30. e})$$

où A_{ij} et B_{ij} sont la rigidité de la plaque, définie par :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^S & D_{11}^S & H_{11}^S \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^S & D_{12}^S & H_{12}^S \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^S & D_{66}^S & H_{66}^S \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{pmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} dz \quad (\text{III. 31. a})$$

et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^S, D_{22}^S, H_{22}^S) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^S, D_{11}^S, H_{11}^S) \quad (\text{III. 31. b})$$

$$A_{44}^S = A_{55}^S = \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{44} [g(z)]^2 dz \quad (\text{III. 31. c})$$

En remplaçant à partir de l'équation (III.28) dans l'équation (III.29), on obtient les équations suivantes :

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^S + 2B_{66}^S)d_{122}w_s - B_{11}^S d_{111}w_b = 0 \quad (\text{III. 32. a})$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^S + 2B_{66}^S)d_{112}w_s - B_{22}^S d_{222}w_s = 0 \quad (\text{III. 32. b})$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^S d_{1111}w_s - 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S)d_{1122}w_s - D_{22}^S d_{2222}w_s = q \quad (\text{III. 32. c})$$

$$B_{11}^S d_{111}u_0 + (B_{12}^S + 2B_{66}^S)d_{122}u_0 + (B_{12}^S + 2B_{66}^S)d_{112}v_0 + B_{22}^S d_{222}v_0 - D_{11}^S d_{1111}w_b - 2(D_{12}^S + 2D_{66}^S)d_{1122}w_b - D_{22}^S d_{2222}w_b - H_{11}^S d_{1111}w_s - 2(H_{12}^S + 2H_{66}^S)d_{1122}w_s - H_{22}^S d_{2222}w_s + A_{55}^S d_{11}w_s + A_{44}^S d_{22}w_s = q \quad (\text{III. 32. d})$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ilmj} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ilmj} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, m, l = 1, 2) \quad (\text{III. 33})$$

2.2.4. Des solutions exactes pour les plaques FGM

La solution exacte des équations (III.32) pour la plaque FGM sous diverses conditions aux limites peut être construite. Les conditions aux limites pour une arête arbitraire avec des conditions d'arête simplement appuyées et encastées sont :

Serré (C) :

$$u = v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{à } x = 0 \text{ et } y = 0, a \quad (\text{III. 34})$$

Simplement soutenu (S) :

$$\begin{cases} v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{à } x = 0, a \\ v = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{à } y = 0, a \end{cases} \quad (\text{III. 35})$$

La représentation suivante pour les quantités de déplacement, qui satisfont les conditions aux limites ci-dessus, est appropriée dans le cas de notre problème, alors les conditions aux limites dans l'équation (III. 34) et (III. 35) sont satisfaites par les développements suivants :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{mn} & X'_m(x) & Y_n(y) \\ V_{mn} & X_m(x) & Y'_n(y) \\ W_{bmn} & X_m(x) & Y_n(y) \\ W_{smn} & X_m(x) & Y_n(y) \end{pmatrix} \quad (\text{III. 36})$$

où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres inconnus à déterminer, Mode propre et désigne la dérivée par rapport à la coordonnée correspondante. Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ sont proposées pour satisfaire au moins les conditions aux limites géométriques données dans les équations (III. 34) et (III. 35) et représentent les formes approximatives de la surface déviée de la plaque. Ces fonctions sont représentées dans le tableau 2 pour les différents cas des conditions aux limites avec $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$.

Substitution d'équations (III. 36) et (III.32) dans l'équation (III.31), la solution exacte de la plaque FGM peut être déterminée à partir des équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ -q \end{pmatrix} \quad (\text{III. 37})$$

Tableau III.2 : Fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$

	Boundary conditions		The functions $X_m(x)$ and $Y_n(y)$	
	à $x=0, a$	à $y=0, b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
SSSS	$X_m(0) = X'_m(0) = 0$	$Y_n(0) = Y'_n(0) = 0$	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
	$X_m(a) = X''_m(a) = 0$	$Y_n(b) = Y''_n(b) = 0$		
CCSS	$X_m(0) = X'_m(0) = 0$	$Y_n(0) = Y'_n(0) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
	$X_m(a) = X''_m(a) = 0$	$Y_n(b) = Y''_n(b) = 0$		
CSCS	$X_m(0) = X'_m(0) = 0$	$Y_n(b) = Y''_n(b) = 0$	$\sin(\lambda x)[\cos(\lambda x) - 1]$	$\sin(\mu y)[\cos(\mu y) - 1]$
	$X_m(a) = X''_m(a) = 0$	$Y_n(b) = Y''_n(b) = 0$		
CCCC	$X_m(0) = X'_m(0) = 0$	$Y_n(0) = Y'_n(0) = 0$	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
	$X_m(a) = X''_m(a) = 0$	$Y_n(b) = Y''_n(b) = 0$		

Où

$$a_{11} = \int_0^a \int_0^b (A_{11}X_m'''Y_n + A_{66}X'_mY_n'')X'_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. a})$$

$$a_{12} = \int_0^a \int_0^b (A_{12} + A_{66})X'_mY_n''X'_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. b})$$

$$a_{13} = - \int_0^a \int_0^b (B_{11}X_m''Y_n + (B_{12} + 2B_{66})X'_mY_n'')X'_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. c})$$

$$a_{14} = - \int_0^a \int_0^b (B_{11}^s X_m''Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)X'_mY_n'')X'_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. d})$$

$$a_{21} = \int_0^a \int_0^b (A_{12} + A_{66})X_m''Y_n'X'_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. e})$$

$$a_{22} = \int_0^a \int_0^b (A_{22}X_mY_n''' + A_{66}X_m''Y_n')X_mY_n' dx dy \quad (\text{III. 38. f})$$

$$a_{23} = - \int_0^a \int_0^b [B_{22}X_mY_n''' + (B_{12} + 2B_{66})X_m''Y_n']X_mY_n' dx dy \quad (\text{III. 38. g})$$

$$a_{24} = - \int_0^a \int_0^b [B_{22}^s X_mY_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)X_m''Y_n']X_mY_n' dx dy \quad (\text{III. 38. h})$$

$$a_{31} = \int_0^a \int_0^b [B_{11}X_m''''Y_n + (B_{12} + 2B_{66})X_m''Y_n'']X_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. i})$$

$$a_{32} = \int_0^a \int_0^b [B_{22}X_mY_n'''' + (B_{12} + 2B_{66})X_m''Y_n'']X_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. j})$$

$$a_{33} = \int_0^a \int_0^b [-D_{11}X_m''''Y_n + 2(D_{12} + 2D_{66})X_m'Y_n'' + D_{22}X_mY_n''''']X_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. k})$$

$$a_{34} = \int_0^a \int_0^b [-D_{11}^sX_m''''Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)X_m''Y_n'' + D_{22}^sX_mY_n''''']X_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. l})$$

$$a_{41} = \int_0^a \int_0^b [B_{11}^sX_m''''Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)X_m''Y_n'']X_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. m})$$

$$a_{42} = \int_0^a \int_0^b [B_{22}^sX_mY_n'''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)X_m''Y_n'']X_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. n})$$

$$a_{43} = \int_0^a \int_0^b [-D_{11}^sX_m''''Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)X_m''Y_n'' + D_{22}^sX_mY_n''''']X_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. o})$$

$$a_{44}$$

$$= \int_0^a \int_0^b [-H_{11}^sX_m''''Y_n + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)X_m''Y_n'' + H_{22}^sX_mY_n'''' - A_{55}^sX_m''Y_n - A_{44}^sX_mY_n'']X_mY_n dx dy \quad (\text{III. 38. p})$$

$$m_{11} = \int_0^a \int_0^b -I_1X_m'Y_nX_m'Y_n dx dy \quad (\text{III. 38. q})$$

III. 3. Présentation et analyse des résultats

Dans l'analyse numérique, les déviations et les contraintes des plaques FGM parfaites et imparfaites avec les diverses conditions aux limites sont évaluées. La plaque FGM est considérée comme étant en aluminium et en alumine avec les propriétés matérielles suivantes :

- Céramique (P_C : Alumina, Al_2O_3): $E_c = 380 \text{ GPa}$
- Metal (P_M : Aluminum, Al): $E_m = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$

Leurs propriétés changent à travers l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance. Les surfaces inférieures de la plaque FGM sont riches en aluminium, tandis que les surfaces supérieures de la plaque FG sont riches en alumine.

Tableau III. 3 : Déviations maximales sans dimension d'une plaque rectangulaire homogène en FGM sous des charges uniformes pour différents cas de taux de distribution de la porosité.

Method	a = b			a = 0.5b		
	a/h = 25	10	5	a/h = 25	10	5
Reddy et al.	0.410	0.427	0.490	1.018	1.045	1.043
Cooke and Levinson	0.410	0.427	0.490	1.018	1.045	1.043
Lee et al.	0.410	0.427	0.490	1.018	1.045	1.043
Zenkour and Radwan	0.40960	0.427	0.490	1.018	1.045	1.043
Présente Méthode: Type-I	0.4096	0.4272	0.4901	1.0180	1.0453	1.1427

Tableau III. 4 Comparaison des déplacements normalisés et des contraintes d'une plaque rectangulaire poreuse en FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité ($b = 3a, k = 2, \alpha = 0.2$).

a/h	theory	w	σ_x	σ_y	τ_{yz}	τ_{xz}	τ_{xy}	
4	Karama (2003) ESDPT $\alpha = 0$	4.0569	5.2804	0.6644	0.6084	0.6699	0.5900	
	Tounsi (2013) PSDPT $\alpha = 0$	4.0529	5.2759	0.6652	0.6058	0.6545	0.5898	
	Benfarhat (2016. a) $\alpha = 0$	3.8716	5.4197	0.6677	0.6096	0.6802	0.5395	
	Benfarhat (2016. a) $\alpha = 0.2$	6.2567	6.8649	0.6809	0.6598	0.6624	0.4148	
	Présente Méthode	Type I	3.8716	5.4197	0.6677	0.6096	0.6802	0.5395
		Type II	6.2567	6.8649	0.6809	0.6598	0.6624	0.4148
		Type III	6.9236	7.2661	0.6992	0.6956	0.7045	0.4656
Type IV		5.7275	6.5461	0.6635	0.6272	0.6268	0.3734	
	Type V	5.1509	6.1977	0.7008	0.6681	0.7126	0.3248	
	Type VI	5.1068	6.1710	0.6389	0.5836	0.5809	0.3248	
10	Karama (2003) ESDPT $\alpha = 0$	3.5543	12.9252	1.6938	0.61959	0.6841	1.4898	
	Tounsi (2013) PSDPT $\alpha = 0$	3.5537	12.9234	1.6941	0.6155	0.6672	1.4898	
	Présente Méthode	Type I	3.5231	12.9841	1.6995	0.6211	0.6922	1.4659
		Type II	5.9992	16.6660	1.7174	0.6723	0.6679	1.1948
		Type III	6.7275	17.7296	1.7663	0.7088	0.7057	1.3692
		Type IV	5.4310	15.8318	1.6712	0.6391	0.6340	1.0605
		Type V	4.7770	14.8653	1.6066	0.5947	0.5892	0.9084
	Type VI	8.3196	20.0399	1.7625	0.7701	0.7727	1.7563	
20	Karama (2003) ESDPT $\alpha = 0$	3.4824	25.7712	3.3971	0.6214	0.6878	2.9844	
	Tounsi (2013) PSDPT $\alpha = 0$	3.4822	25.7703	3.3972	0.6171	0.6704	2.9844	
	Présente Méthode	Type I	3.4745	25.8012	3.4001	0.6231	0.6951	2.9719
		Type II	5.9665	33.1876	3.4388	0.6745	0.6687	2.4428
		Type III	6.7046	35.3343	3.5375	0.7111	0.7054	2.8057
		Type IV	5.3920	31.5074	3.3457	0.6412	0.6354	2.1644
		Type V	4.7324	29.5652	3.2154	0.59672	0.5909	1.8498
	Type VI	8.3231	40.0105	3.6969	0.77259	0.7679	3.6176	

Pour valider l'exactitude de ces résultats, les comparaisons entre la présente théorie et les résultats disponibles obtenus par Reddy et al., Cooke et Levinson, Lee et al. et Zenkour et Radwan sont présentées dans le tableau 3. La présente solution est réalisée pour des déviations sans dimension maximales d'une plaque rectangulaires homogènes en FGM sous des charges uniformes. Il convient de noter que les résultats actuels de la déflexion et des contraintes se comparent très bien avec la solution des autres théories pour une plaque FGM parfaite.

Les tableaux (III.4) et (III.5) montrent les déplacements et les contraintes normalisés des plaques rectangulaires poreuses SSSS pour différents cas de taux de distribution de porosité en fonction de charges uniformes ($k_0 = k_1 = 0$). La plaque est considérée comme rectangulaire $b = 3a$. On note que les résultats actuels de la flèche et des contraintes se comparent très bien avec la solution des autres théories pour une plaque FGM parfaite ($\alpha = 0$). On peut également noter que la variation du taux de répartition de la porosité a un effet significatif sur la flexion et les contraintes.

Les tableaux (III.6) et (III.5) montrent l'effet du type de chargement et la variation du taux de distribution de la porosité dans la déflexion des plaques carrées (SSSS-FGM). La présente théorie donne d'excellents résultats pour les rapports a/h (face sur épaisseur) ainsi que pour le paramètre FGM P . On constate que la déflexion devient plus importante lorsque le taux de porosité est plus élevé dans la céramique. La déflexion augmente lorsque le paramètre FG P augmente.

Concernant le tableau (III.7) on trouve une étude comparative de la flèche non dimensionnée d'une plaque carrée en FGM reposant sur des fondations élastiques sous des charges sinusoïdales. L'indice de loi de puissance variait de 1 à 10. La flèche non dimensionnée est calculée avec 6 types de loi de mélange. Il convient de noter que les résultats actuels de la déflexion (type I) se comparent très bien à ceux d'Ameur et al (2011) et Zenkour et al (2014) avec et sans fondation élastique. On voit que la déflexion est maximale lorsque la distribution poreuse est de type-V.

Tableau III.5. Déformations et contraintes sans dimension d'une plaque rectangulaire sous chargements uniformes pour différents cas de distribution de taux de porosité $\alpha = 0,2, a = 10h, b = 3a$

P	Methods		w^*	σ_x^*	σ_y^*	σ_{xy}^*
2	Zenkour (2009)		3.2267	0.4396	0.1502	0.1766
	Thai (2013)		3.2266	0.4395	0.1502	0.1766
	Présente Méthode	Type-I	3.2267	0.4395	0.1522	0.1766
		Type-II	5.4793	0.2892	0.0998	0.1159
		Type-III	6.1361	0.2474	0.0853	0.0990
		Type-IV	4.9649	0.3224	0.1114	0.1292
		Type-V	7.5609	0.1581	0.0545	0.0632
Type-VI	4.37074	0.3615	0.1250	0.1450		
5	Zenkour (2009)		3.8517	0.5224	0.1785	0.2104
	Thai (2013)		3.8506	0.5223	0.1785	0.2103
	Présente Méthode	Type-I	3.8514	0.5223	0.1818	0.2103
		Type-II	7.9528	0.4390	0.1523	0.1761
		Type-III	9.6826	0.4143	0.1435	0.1659
		Type-IV	6.8137	0.4575	0.1588	0.1837
		Type-V	15.1900	0.3476	0.1388	0.1200
Type-VI	5.6737	0.4786	0.1663	0.1924		

Tableau III. 6 : variations de la flèche w pour une plaque carrée en FGM simplement appuyées sous chargements sinusoïdales pour différents cas de taux de distribution de porosité avec $\alpha = 0,2$

P	a/h	Method								
		Zenkour (2018)	Neves (2013)	Thai (2013)	Présente Méthode					
					Type-I	Type-II	Type-III	Type-IV	Type-V	Type-VI
1	4	0.7284	0.7020	0.7304	0.7282	0.9933	1.0486	0.9442	1.1464	0.8801
	10	0.5889	0.5868	0.5913	0.5889	0.8192	0.86834	0.7759	0.9560	0.7198
	100	0.5625	0.5648	0.5649	0.5625	0.7862	0.8341	0.7440	0.9199	0.6894
4	4	1.1573	1.1108	1.1644	1.1614	2.2304	2.6230	1.9549	3.7150	1.6635
	10	0.8810	0.8700	0.8844	0.8817	1.7658	2.1147	1.5282	3.1333	1.2840
	100	0.8287	0.8240	0.8312	0.8286	1.6776	2.0181	1.4471	3.0227	1.2119
10	4	1.3889	1.3334	1.3953	1.3916	3.0206	3.7234	2.5638	6.0729	2.1100
	10	1.0083	0.9888	1.0132	1.0088	2.1234	2.6177	1.8082	4.3778	1.4985
	100	0.9362	0.9227	0.9406	0.9361	1.9527	2.4072	1.6645	4.0543	1.3823

Tableau III.7 : Déplacement transversal sans dimension d'une plaque carrée FGM soumise à une charge uniforme pour différents cas de taux de distribution de porosité. $\alpha = 0,2, P = 1$

E_C/E_M	a/h	Theories								
		Abdelaziz 2017	Tounsi 2013	quasi- 3D Adim 2018	Présente Méthode					
					Type-I	Type-II	Type-III	Type-IV	Type-V	Type-VI
0.5	0.2	8.9751	9.0047	8.8724	9.6097	12.0165	11.8398	12.1986	11.5843	12.4823
1	0.2	12.5997	12.6134	12.5970	13.6780	17.0975	17.0975	17.0975	17.0975	17.0975
2	0.2	17.6640	17.1718	17.7440	17.7633	22.2124	22.5489	21.8857	23.0733	21.4134

Par souci d'exhaustivité, des résultats supplémentaires pour l'effet de la variation du taux de distribution de la porosité sur les flèches sont présentés dans les tableaux (III.9) et (III.10). Le tableau (III.8) montre la flèche des plaques FG sous chargements uniformes ($k_0 = k_1 = 0$) tandis que le tableau (III.9) montre la flèche des plaques FG reposant sur la fondation Winkler-Pasternak ($k_0 = k_1 = 10$). Différentes conditions aux limites ainsi que différentes valeurs du rapport côté sur épaisseur a/h sont utilisées dans ces tableaux. Avec l'augmentation du rapport côté/épaisseur a/h, une diminution de la déflexion peut être clairement observée. La plaque CCCC FG donne les plus grandes déviations tandis que la plaque SSSS FG donne les plus petites.

La déflexion centrale sans dimension en fonction du rapport d'aspect (a/b) et du rapport côté/épaisseur (a/h) de la plaque FGM poreuse pour différentes variations du taux de distribution de la porosité est illustrée sur les Fig. (III.2) et (III.3), respectivement. L'indice de gradient est pris égal à $P = 10$. La plaque FGM est considérée sans fondation élastique (a), reposant sur une fondation winkler (b) et reposant sur une fondation winkler-pasternak (c). On peut voir que la déflexion diminue à mesure que le rapport d'aspect a/b et le rapport côté sur épaisseur a/h augmentent. De plus, le cas de la plaque FG sans fondation élastique donne la plus grande déviation. Le type-V de la variation du taux de distribution de la porosité dans la plaque FG donne les plus grandes déviations tandis que le type-I donne les plus petites.

L'effet de la variation du taux de distribution de la porosité sur la contrainte longitudinale dans le plan σ_{xx} et sur la contrainte normale dans le plan σ_{yy} à travers l'épaisseur de la plaque FGM poreuse soumise à une charge de répartition uniforme est illustré sur les Fig. (III.4) et (III.5), respectivement. Comme on peut le voir, les contraintes normales et longitudinales

dans le plan sont plus importantes dans le cas d'une plaque FG sans fondation élastique. On peut également noter que la variation du taux de répartition de la porosité a un effet considérable sur ces contraintes.

Tableau III. 8 : Flèche adimensionnelle w d'une plaques carrées en FGM reposant sur des fondations élastiques sous chargements sinusoïdales ($a = 10h, \alpha = 0,2$) (Al/Al₂O₃).

k_0	k_1	Theory		k			
				1	2	5	10
0	0	Ameuret al. [2011]		0.5889	0.7573	0.9118	1.0089
		Zenkour [2014]		0.5680	0.7198	0.8725	0.9807
		Présente Méthode	Type I	0.5889	0.7573	0.9117	1.0088
			Type II	0.8192	1.2800	1.8754	2.1234
			Type III	0.8683	1.4317	2.2782	2.6177
			Type IV	0.7759	1.1610	1.6091	1.8082
			Type V	0.9560	1.7602	3.5522	4.3778
Type VI	0.7198	1.0233	1.3415	1.4985			
100	0	Ameuret al. [2011]		0.3825	0.4471	0.4969	0.5244
		Zenkour [2014]		0.3747	0.4352	0.4867	0.5189
		Présente Méthode	Type I	0.3825	0.4471	0.4968	0.5243
			Type II	0.4680	0.5892	0.6901	0.7211
			Type III	0.4837	0.6195	0.7381	0.7705
			Type IV	0.4536	0.5627	0.6505	0.6808
			Type V	0.5097	0.6739	0.8352	0.8739
Type VI	0.4338	0.5282	0.6019	0.6316			
100	10	Ameuret al. [2011]		0.2261	0.2472	0.2617	0.2692
		Zenkour [2014]		0.2241	0.2444	0.2599	0.2689
		Présente Méthode	0.2261	0.2472	0.2617	0.2692	0.2692
			Type II	0.2535	0.2853	0.3070	0.3130
			Type III	0.2580	0.2922	0.3162	0.3220
			Type IV	0.2492	0.2789	0.2989	0.3052
			Type V	0.2652	0.3038	0.3327	0.3387
Type VI	0.2431	0.2702	0.2882	0.2949			

Tableau III.9 : Flèches adimensionnelles w des plaques carrées FG selon diverses conditions aux limites sans fondations élastiques pour différents cas de taux de distribution de porosité. $P = 10$

a/h	Présente Méthode	Conditions aux limites		
		SSSS	CSCS	CCCC
10	Type I	1.5874	1.6400	1.7105
	Type II	2.1019	2.1724	2.2672
	Type III	2.2063	2.2805	2.3802
	Type IV	2.0084	2.0757	2.1660
	Type V	2.3888	2.4693	2.5777
	Type VI	1.8851	1.9480	2.0326
100	Type I	1.4817	1.5194	1.5663
	Type II	1.9539	2.0036	2.0655
	Type III	2.0497	2.1018	2.1668
	Type IV	1.8682	1.9157	1.9749
	Type V	2.2170	2.2734	2.3437
	Type VI	1.7551	1.7997	1.8553

Tableau III.10 : Flèches adimensionnelles w des plaques carrées FG selon diverses conditions aux limites avec des fondations élastiques pour différents cas de taux de distribution de porosité. ($k_0 = k_1 = 10$), $P = 10$

a/h	Présente Méthode	Conditions aux limites		
		SSSS	CSCS	CCCC
10	Type I	0.5290	0.5646	0.6141
	Type II	0.5741	0.6171	0.6777
	Type III	0.5813	0.6256	0.6882
	Type IV	0.5672	0.6090	0.6677
	Type V	0.5926	0.6392	0.7052
	Type VI	0.5573	0.5974	0.6536
100	Type I	0.5200	0.5479	0.5837
	Type II	0.5665	0.6004	0.6443
	Type III	0.5739	0.6090	0.6544
	Type IV	0.5593	0.5922	0.6347
	Type V	0.5858	0.6227	0.6707
	Type VI	0.5491	0.5806	0.6212

Fig. (III.6) affiche la variation des contraintes de cisaillement planes σ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité. L'indice de gradient est pris égal à $P = 10$. Le rapport côté sur épaisseur est considéré égal à $a/h = 10$. On peut observer que l'effet de la variation du taux de répartition de la porosité sur les contraintes

devient plus important dans le cas de plaques FGM reposant sur une fondation de type Winkler ou Winkler-pasternak.

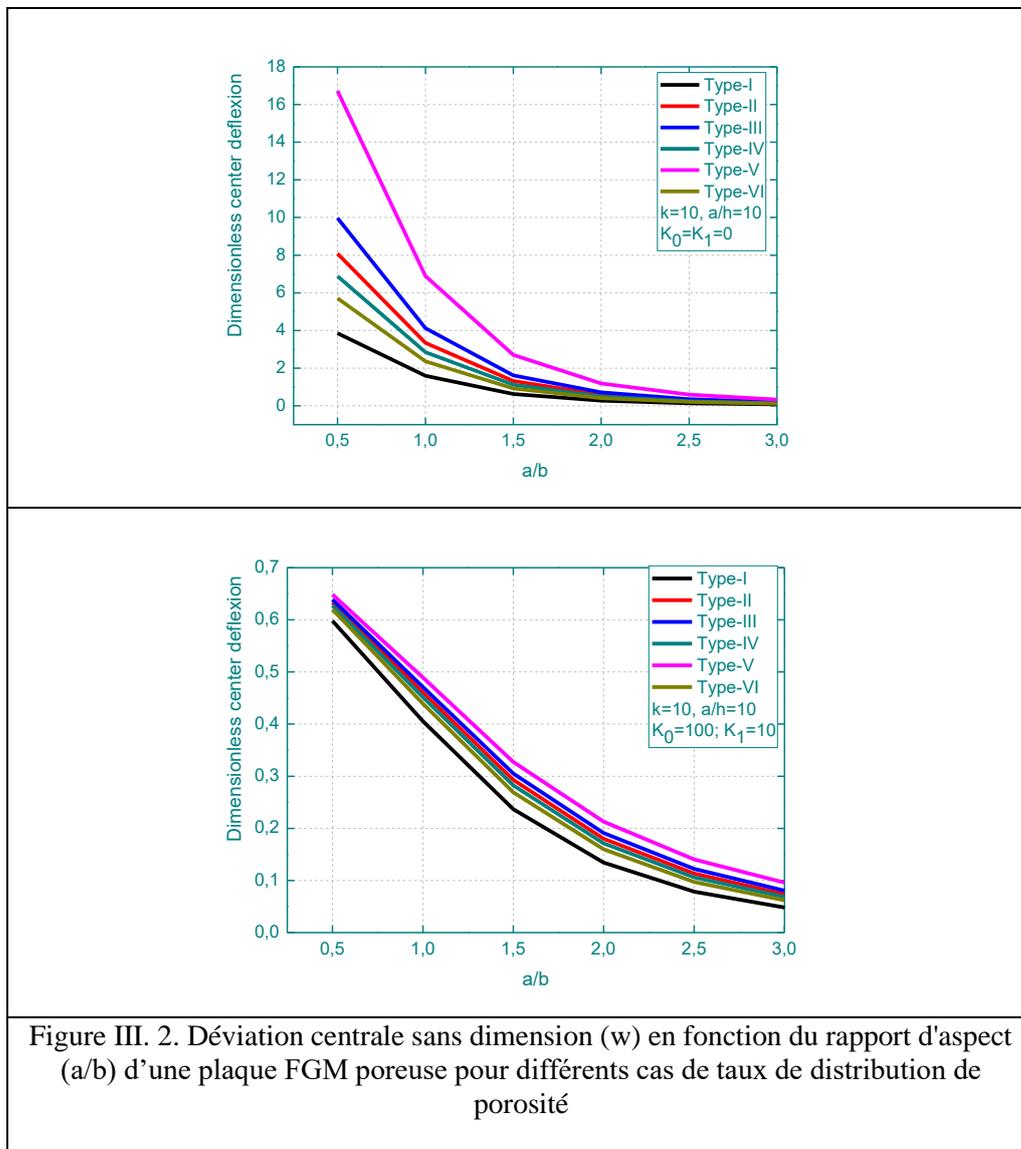


Figure III. 2. Déviation centrale sans dimension (w) en fonction du rapport d'aspect (a/b) d'une plaque FGM poreuse pour différents cas de taux de distribution de porosité

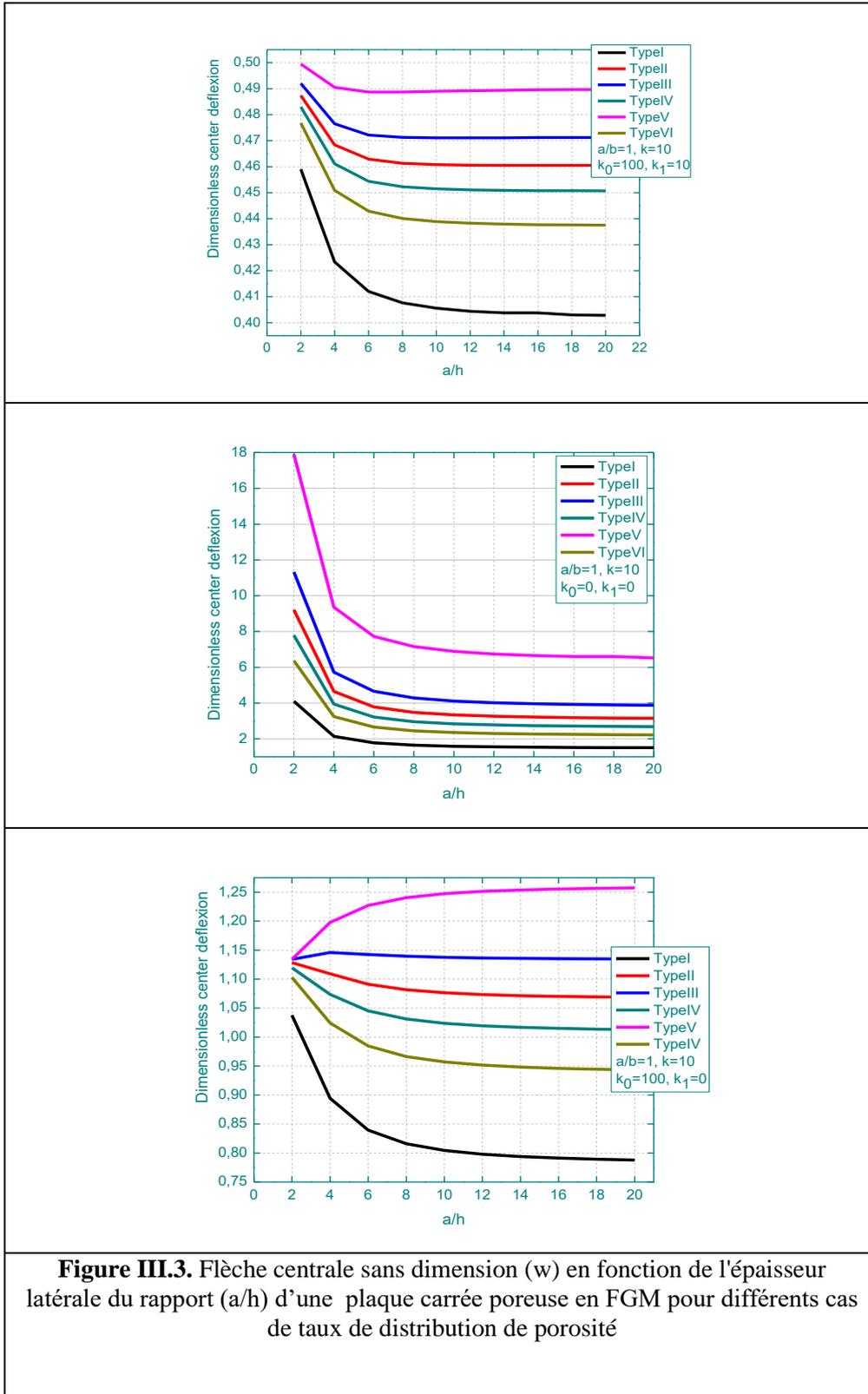


Figure III.3. Flèche centrale sans dimension (w) en fonction de l'épaisseur latérale du rapport (a/h) d'une plaque carrée poreuse en FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité

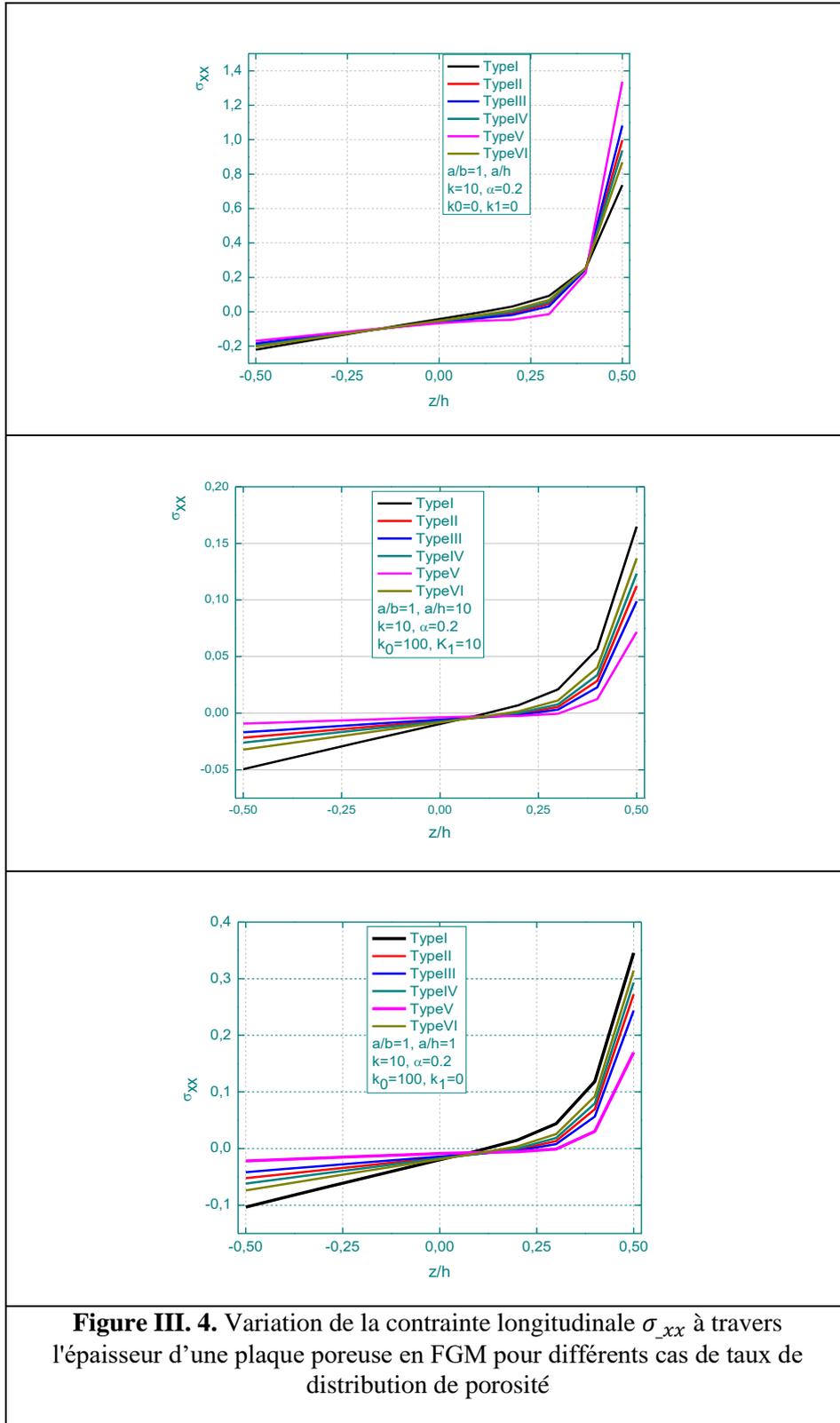


Figure III. 4. Variation de la contrainte longitudinale σ_{xx} à travers l'épaisseur d'une plaque poreuse en FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité

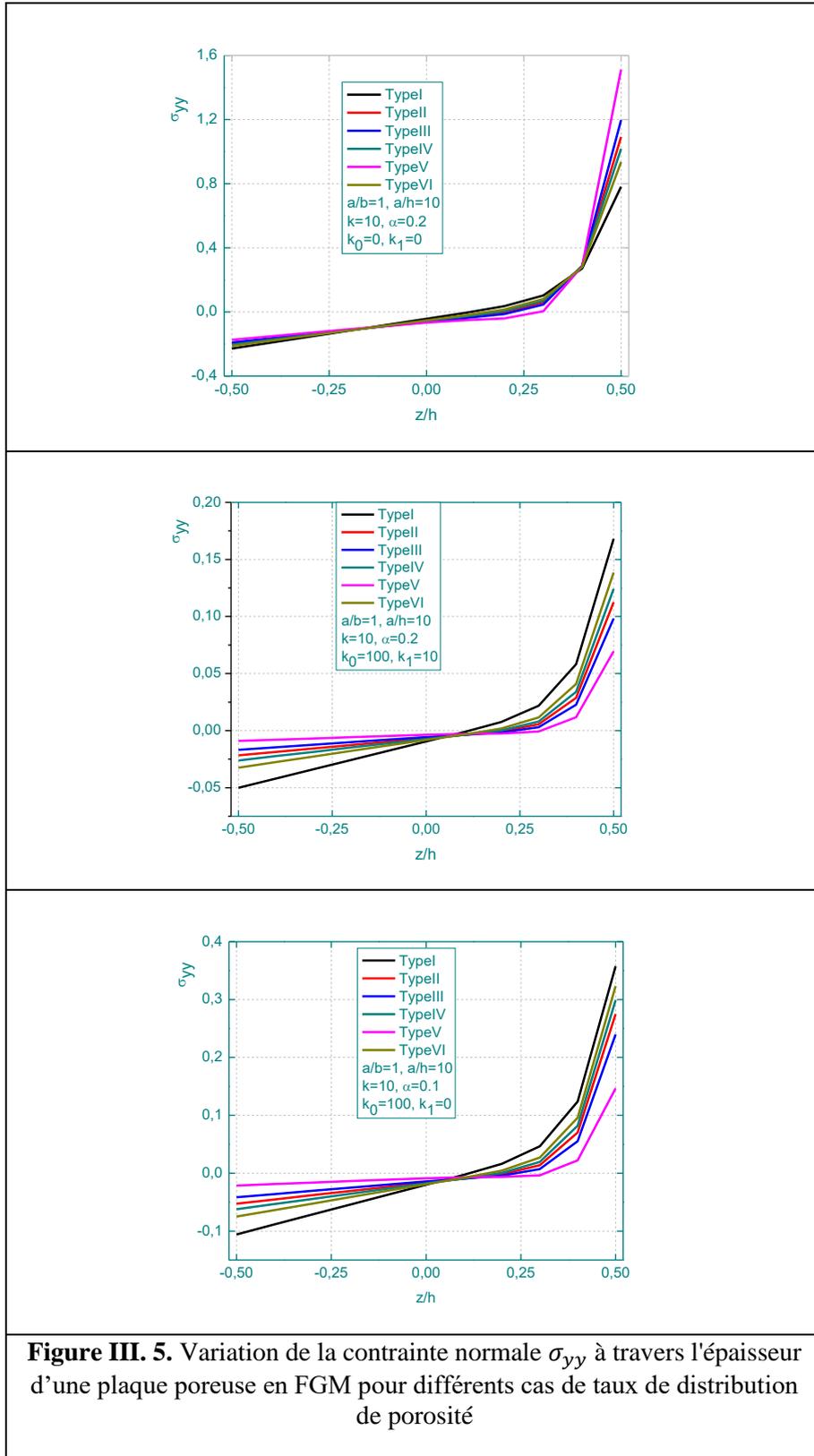


Figure III. 5. Variation de la contrainte normale σ_{yy} à travers l'épaisseur d'une plaque poreuse en FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité

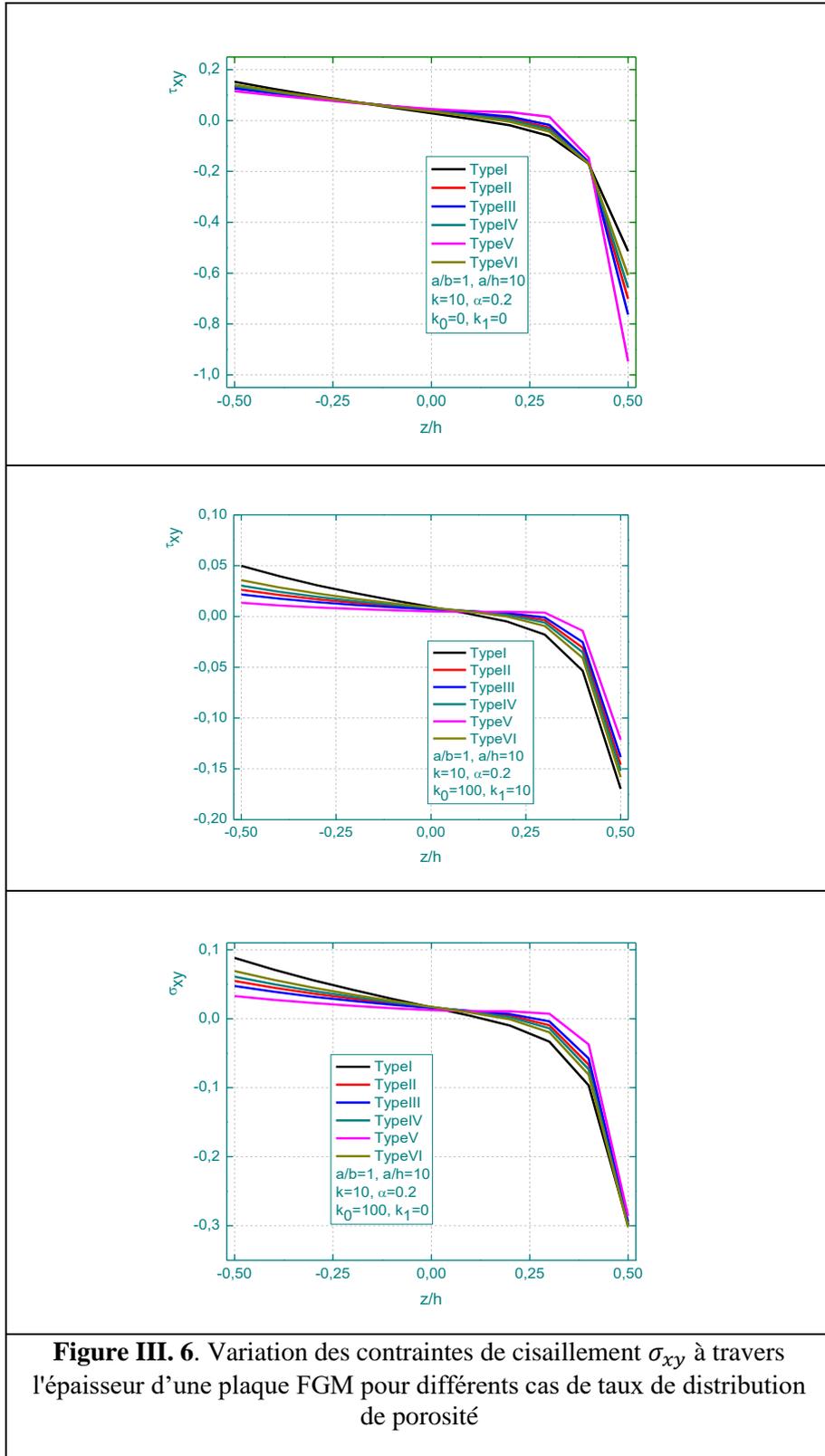


Figure III. 6. Variation des contraintes de cisaillement τ_{xy} à travers l'épaisseur d'une plaque FGM pour différents cas de taux de distribution de porosité

4. Conclusions

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie raffinée de déformation par cisaillement est utilisée pour la réponse en flexion des plaques poreuses en FGM reposant sur une fondation Winkler-Pasternak. L'analyse de flexion est présentée ici pour ces plaques est soumises à des charges uniformes et sinusoïdales avec trois conditions aux limites différentes. Le présent modèle satisfait les contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. La règle de mélange modifiée couvrant différentes variations du taux de distribution de porosité est utilisée pour décrire et approximer les propriétés matérielles des plaques FG imparfaites. Les résultats ont été inclus les effets de la variation du taux de distribution de la porosité et des paramètres des fondations élastiques ainsi que des différentes conditions aux limites. Il est clair que la présente théorie donne des résultats qui se comparent bien avec ceux disponibles dans la littérature. L'effet de la variation du taux de distribution de la porosité est démontré. Des exemples numériques montrent que la théorie proposée donne des solutions presque identiques à celles obtenues en utilisant d'autres théories de déformation par cisaillement.

Chapitre IV :
Analyse dynamique des
plaques poreuses en FGM

IV. 1. Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont une classe de composites qui présentent une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre et éliminent ainsi la concentration de contraintes trouvée dans les composites stratifiés. Les concepts de FGM ont été proposés par des spécialistes des matériaux de la région de Sendai au Japon. En règle générale, le FGM est fabriqué à partir d'un mélange d'une céramique et d'un métal de telle sorte que la céramique puisse résister à des températures élevées dans des environnements thermiques, tandis que le métal peut diminuer la contrainte de traction se produisant sur la surface de la céramique à l'état de refroidissement antérieur. Les propriétés des matériaux telles que le module d'élasticité, le module de cisaillement, la masse volumique et le coefficient de Poisson varient de manière régulière et continue d'une surface à l'autre dans la direction souhaitée. Il est difficile d'obtenir une solution suffisamment exacte aux équations non linéaires pour développer des modèles mathématiques efficaces pour prédire la réponse statique et dynamique d'une plaque. Jusqu'à présent, seules quelques solutions exactes ont été étudiées. Cependant, avec les progrès de la science et de la technologie, un besoin se fait sentir dans la pratique de l'ingénierie pour prédire avec précision les réponses statiques et dynamiques non linéaires d'une plaque (Bekki et al. 2019, Bourada et al. 2020, Chaabane et al. 2019, Chikr et al. 2020).

Les plaques soutenues par des fondations élastiques ont été largement adoptées par de nombreux chercheurs pour modéliser divers problèmes d'ingénierie au cours des dernières décennies. Pour décrire au mieux les interactions de la plaque et de sa fondation, les scientifiques ont proposé différents types de modèles de fondation (Kerr 1964). Le modèle le plus simple pour la fondation élastique est le modèle de Winkler, qui considère la fondation comme une série de ressorts séparés sans effets de couplage entre eux, ce qui entraîne l'inconvénient d'une déflexion discontinue sur la surface en interaction de la plaque. Cela a ensuite été amélioré par Pasternak, qui a exploité les interactions entre les ressorts séparés dans le modèle de Winkler en introduisant un nouveau paramètre dépendant. Dès lors, le modèle de Pasternak a été largement utilisé pour décrire le comportement mécanique des interactions structure-fondation Xiang et al (1994), Zhou et al (2004). De nos jours, il y a eu un grand effort de recherche pour analyser la statique, le flambage et les vibrations des structures FGM. Ta et Noh (2015) ont présenté une nouvelle théorie de plaque raffinée pour l'analyse dynamique de la plaque fonctionnellement graduée (FG) reposant sur la fondation

Pasternak sous le chargement transversal. Dans un article de Thai et Kim (2013), l'analyse de flambement d'une plaque FG épaisse reposant sur une fondation élastique a été examinée et certaines solutions de forme fermée sont présentées. Taczała et al. (2015) ont étudié la stabilité des plaques FG chargées thermiquement reposant sur une fondation élastique à l'aide de la méthode des éléments finis. Dans un article de Huang et al. (2012), la vibration libre de plaques FG rectangulaires avec des fissures internes traversantes est étudiée au moyen de la méthode de Ritz et de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Li et Zhang (2016) ont étudié la vibration libre d'une plaque FG en porte-à-faux rotative subissant de grands mouvements globaux à l'aide d'un modèle dynamique avec effet de raidissement dynamique. Lal et Ahlawat (2015) ont présenté des résultats importants pour les vibrations axisymétriques des plaques FG sous une force uniforme dans le plan en utilisant la méthode de transformation différentielle basée sur la théorie classique des plaques. Hassaine Daouadji et al. (2016) ont proposé un nouveau modèle de déplacement pour analyser le comportement statique des plaques FG. Belabed et al. (2014) ont amélioré une nouvelle théorie de cisaillement et de déformation normale d'ordre supérieur pour les analyses de flexion et de vibration libre des plaques FG. Ramu et Mohanty (2014) ont amélioré une formulation par éléments finis pour l'analyse modale des plaques FG basée sur la théorie des plaques de Kirchhoff. La vibration de grande amplitude des plaques FG sous pression aléatoire dans un environnement thermique avec la méthode de réduction modale par éléments finis a été étudiée par Parandvar et Farid (2015). Sator et al. (2016) ont étudié les problèmes d'analyse des vibrations transitoires pour les plaques FG sous chargement dynamique transversal en utilisant trois théories de plaque différentes. Talha et al. (2010) ont établi une analyse vibratoire libre et statique de plaques de matériaux à gradient fonctionnel (FGM) en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur avec une modification spéciale du déplacement transversal en conjonction avec des modèles d'éléments finis. Tran et al. (2015) ont suggéré une formulation nouvelle et efficace basée sur la combinaison de l'approche isogéométrique étendue et de la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse dynamique des plaques FG fissurées. Zhang et Zhou (2015) ont proposé un modèle pour les plaques FG reposant sur des fondations élastiques non linéaires au moyen du concept de surface neutre physique et de la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre élevé. Dans un article de Parandvar et Farid (2016), la réponse dynamique des plaques FG soumises simultanément à des charges thermiques, statiques et harmoniques a été étudiée au moyen de la méthode des éléments finis non linéaires. Dans Thai et al. (2016) ont présenté une nouvelle théorie simple

de cisaillement et de déformation normale à quatre inconnues pour les analyses statiques, dynamiques et de flambage des plaques FG.

Dans ce chapitre, une nouvelle étude des plaques FGM imparfaites est présentée en tenant compte du taux de distribution des porosités qui peut éventuellement se produire à l'intérieur des matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) lors de leur fabrication. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente solution, en montrant l'influence du taux de répartition de la porosité du matériau de base sur le comportement mécanique de la plaque FGM.

IV. 2. Formulation du problème

IV. 2. 1. Relations constitutives des plaques (métal/céramique) FGM

Considérons un FGM imparfait avec une fraction volumique de porosité α ($\alpha \ll 1$), répartie uniformément entre le métal et la céramique, la règle de mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn (2014) est utilisée comme (Benferhat et al. 2016).

$$P = P_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{IV. 1})$$

Maintenant, la fraction volumique totale du métal et de la céramique est : $V_m + V_c = 1$ et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrite comme (tableau 1) :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{IV. 2})$$

Par conséquent, toutes les propriétés de la FGM imparfaite peuvent être écrites comme (Benferhat et al. 2016)

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m - (P_c - P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{IV. 3})$$

On note que le nombre réel positif k ($0 \leq k < \infty$) est la loi de puissance ou l'indice de fraction volumique, et z est la distance au plan médian de la plaque FG. La plaque FG devient une plaque entièrement en céramique lorsque k est réglé sur zéro et entièrement métallique pour une grande valeur de k .

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c - E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{IV. 4})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m - (\rho_c - \rho_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{IV.5})$$

Cependant, le coefficient de Poisson (ν) est supposé constant. Les propriétés matérielles d'une plaque FG parfaite peuvent être obtenues lorsque α est mis à zéro.

$$\text{comme : } V_c + V_m = 1 \Rightarrow V_c = 1 - V_m \quad (\text{IV.6})$$

$$\text{et: } V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{IV.7})$$

Type I: plaque FG parfaite (Sans porosité $\alpha = 0$)

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m \quad (\text{IV.8})$$

Type II: 50% Ceramic, 50% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + E_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{IV.9})$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c - E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (\text{IV.10})$$

Type III: 60% Ceramic, 40% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{2\alpha}{2} \right) + E_c \left(V_c - \frac{3\alpha}{2} \right) \quad (\text{IV.11})$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (3E_c - 2E_m) \frac{\alpha}{5} \quad (\text{IV.12})$$

Type IV: 40% Ceramic, 60% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{3\alpha}{2} \right) + E_c \left(V_c - \frac{2\alpha}{2} \right) \quad (\text{IV.13})$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (2E_c - 3E_m) \frac{\alpha}{5} \quad (\text{IV.14})$$

Type V: 75% Ceramic, 25% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{\alpha}{4} \right) + E_c \left(V_c - \frac{3\alpha}{4} \right) \quad (\text{IV.15})$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (3E_c - E_m) \frac{\alpha}{4} \quad (\text{IV.16})$$

Type VI: 25% Ceramic, 75% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{3\alpha}{4} \right) + E_c \left(V_c - \frac{\alpha}{4} \right) \quad (\text{IV.17})$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c - 3E_m) \frac{\alpha}{4} \quad (\text{IV.18})$$

Tableau IV.1 : Tableau récapitulatif qui regroupe les différentes répartitions de porosité dans le FGM (Céramique / Métal)

Distribution of porosity rate in the FGM			Module de Young	
Type	Céramique	Métal		
Type-I	Sans porosité		$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m$	(IV.19)
Type-II	50%	50%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2}$	(IV.20)
Type-III	60%	40%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (3E_c + 2E_m) \frac{\alpha}{5}$	(IV.21)
Type-IV	40%	60%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (2E_c + 3E_m) \frac{\alpha}{5}$	(IV.22)
Type-V	75%	25%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (3E_c + E_m) \frac{\alpha}{4}$	(IV.23)
Type-VI	25%	75%	$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - (E_c + 3E_m) \frac{\alpha}{4}$	(IV.24)

IV. 2.2. Champs de déplacement et Déformations

Dans cette étude, nous considérons une plaque FGM de longueur a , largeur b et épaisseur totale h et composée de matériau fonctionnellement gradué à travers l'épaisseur. On suppose que le matériau est isotrope et que la granulométrie est supposée se faire uniquement à travers l'épaisseur. Le plan est considéré comme le plan médian non déformé de la plaque avec l'axe positif vers le haut à partir du plan médian. Le matériau de la surface supérieure et de la surface inférieure est respectivement de la céramique et du métal (Fig.IV. 1).

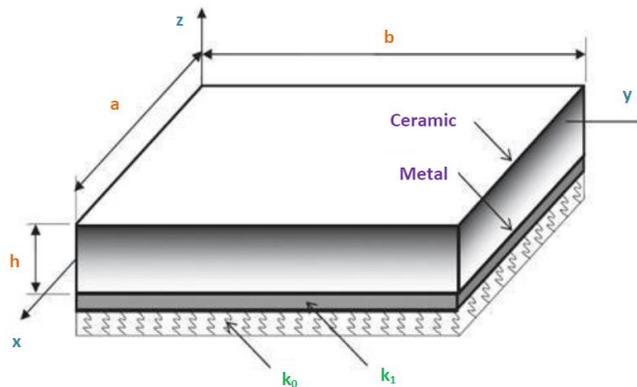


Figure IV. 1 : Géométrie et dimensions de la plaque FGM reposant sur une fondation élastique

Le champ de déplacement supposé est le suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - \left(z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - \left(z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \right) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{IV.25}$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements du plan médian de la plaque dans la direction x et y , respectivement ; w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement, tandis que $f(z)$ représente les fonctions de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversal le long de l'épaisseur et est donnée par :

$$f(z) = z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \tag{IV.26}$$

Il convient de noter que contrairement à la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre, cette théorie ne nécessite pas de facteurs de correction de cisaillement. Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + k_x^b + \left(z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \right) k_x^s \\
 \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + k_y^b + \left(z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \right) k_y^s \\
 \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + k_{xy}^b + \left(z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right) \right) k_{xy}^s \\
 \gamma_{yz} &= \left[1 - \frac{d\left(z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right)\right)}{dz} \right] \gamma_{yz}^s \\
 \gamma_{xz} &= \left[1 - \frac{d\left(z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right)\right)}{dz} \right] \gamma_{xz}^s \\
 \varepsilon_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.27}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 g(z) &= 1 - f'(z) = 1 - \frac{d\left(z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right)\right)}{dz}, \quad f'(z) = \frac{d\left(z - \sin\left(\frac{\pi Z}{h}\right)\right)}{dz}
 \end{aligned}
 \tag{IV.28}$$

L'état de contrainte dans chaque couche est donné par la loi de Hooke :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(z)}{1-\nu^2} & \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} & \frac{E(z)}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

IV.2.3. Équations gouvernantes

Les équations gouvernantes de l'équilibre peuvent être dérivées en utilisant le principe des déplacements virtuels. Le principe du travail virtuel dans le cas présent donne

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{IV.30})$$

Où Ω est la surface supérieure et q représente la charge transversale appliquée.

Substitution d'équations (IV.27) et (IV.29) dans l'équation (IV.30) et en intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (IV.30) peut être réécrit comme :

$$\int_{\Omega} [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta k_{yz}^s + S_{xz}^s \delta k_{xz}^s] d\Omega - \int_{\Omega} q \delta w d\Omega = 0 \quad (\text{IV.31})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} \frac{1}{z} \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{IV.32})$$

Les équations gouvernantes de l'équilibre peuvent être dérivées de l'équation (IV.31) en intégrant les gradients de déplacement par parties et en fixant les coefficients u_0 , δv_0 , δw_b et δu_s à zéro séparément. Ainsi, on peut obtenir les équations d'équilibre associées à la présente théorie de déformation par cisaillement.

$$\begin{aligned}
 \delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 \delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\
 \delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= 0 \\
 \delta w_s: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q &= 0
 \end{aligned} \tag{IV.33}$$

En utilisant l'équation (IV.27) dans les équations (IV.32 et IV.33), les résultantes des contraintes pour une plaque sandwich composée de trois couches peuvent être reliées aux déformations totales par :

$$\begin{pmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{pmatrix}, S = A^s \gamma \tag{IV.34}$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \tag{IV.36}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \tag{IV.37}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{IV.38}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{21}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{21}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{21}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \tag{IV.39}$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \tag{IV.40}$$

où A_{ij} et B_{ij} sont la rigidité de la plaque, définie par :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{pmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} dz \tag{IV.41}$$

et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \tag{IV.42}$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{44} [g(z)]^2 dz \quad (IV.43)$$

En remplaçant à partir de l'équation (34) dans l'équation (35), on obtient l'équation suivante :

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}w_s - B_{11}^s d_{111}w_b = 0 \quad (IV.44)$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w_b - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w_b - (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}w_s - B_{22}^s d_{222}w_s = 0 \quad (IV.45)$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w_b - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w_b - D_{22}d_{2222}w_b - D_{11}^s d_{1111}w_s - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_s - D_{22}^s d_{2222}w_s = q \quad (IV.46)$$

$$B_{11}^s d_{111}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{122}u_0 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)d_{112}v_0 + B_{22}^s d_{222}v_0 - D_{11}^s d_{1111}w_b - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)d_{1122}w_b - D_{22}^s d_{2222}w_b - H_{11}^s d_{1111}w_s - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)d_{1122}w_s - H_{22}^s d_{2222}w_s + A_{55}^s d_{11}w_s + A_{44}^s d_{22}w_s = q \quad (IV.47)$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, m, l = 1, 2) \quad (IV.48)$$

IV.3. Solution exacte pour une plaque FGM simplement appuyée :

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous nous intéressons ici à la solution exacte des Equations (44–47) pour une plaque FG simplement supportée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées aux bords latéraux :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{à} \quad x = -a/2, a/2 \quad (IV.49)$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{à} \quad x = -b/2, b/2 \quad (IV.50)$$

Pour résoudre ce problème, Navier a supposé que les charges mécaniques et thermiques transversales, sous la forme d'une double série trigonométrique comme :

$$q = q_0 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (IV.51)$$

Où $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$, et q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

En suivant la procédure de solution de Navier, nous supposons la forme de solution suivante pour u_0 , v_0 , w_b , et w_s qui satisfait les conditions aux limites,

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.52})$$

Où $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$, et q_0 représente la fréquence naturelle. U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer soumis à la condition que la solution dans l'équation (IV.52) satisfait les équations gouvernantes. (IV.44–IV.47).

L'équation (IV.52) réduit les équations gouvernantes pour l'analyse vibratoire, on obtient l'équation d'opérateur suivante :

$$\{[C] - \omega[G]\}\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{IV.53})$$

où, $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}^t$, $[D]$ et $[G]$ font référence aux matrices de rigidité en flexion et de masse et ω à la fréquence correspondante.

$$[C] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.54})$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2 \\ a_{12} &= \lambda\mu(A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= -\lambda[B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{14} &= -\lambda[B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\ a_{22} &= A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2 \\ a_{23} &= -\mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{24} &= -\mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ a_{33} &= D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 \\ a_{34} &= D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 \\ a_{44} &= H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 \\ m_{11} &= m_{22} = 1 \\ m_{33} &= I_1 + I_3(\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{34} &= I_1 + I_5(\lambda^2 + \mu^2) \\ m_{44} &= I_1 + I_6(\lambda^2 + \mu^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

Où :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f(z), zf(z), [f(z)]^2) \rho(z) dz \quad (IV.56)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_m \quad (IV.57)$$

IV. 4. Résultats numériques et discussion

Dans ce chapitre, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la théorie actuelle dans la prédiction de la fréquence des plaques FGM simplement supportées sur la base du concept de surface neutre.

Tableau IV. 2. Propriétés des matériaux utilisés dans la plaque FGM.

Propriétés	Métal	Céramique	
	Aluminium (Al)	Zirconia (ZrO ₂)	Alumina (Al ₂ O ₃)
E (GPa)	70	200	380
ρ (kg/m ³)	2702	5700	3800

A fins de vérification, les résultats obtenus sont comparés à ceux rapportés dans la littérature. On considère une plaque (Al/Al₂O₃) ou (Al/ZrO₂) composée d'aluminium (comme métal) et d'alumine ou de zirconie (comme céramique). Les propriétés des matériaux supposées dans la présente analyse sont présentées dans le tableau IV. 2. Le coefficient de Poisson est de 0,3 pour l'alumine et l'aluminium. Les surfaces inférieures de la plaque FG sont riches en aluminium, tandis que les surfaces supérieures de la plaque FG sont riches en alumine ou en zirconie. Pour valider l'exactitude des résultats, les comparaisons entre la présente théorie et les résultats disponibles obtenus par Hosseini et al. (2011a) dans le tableau IV.3.

Tableau IV. 3. Comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ d'une plaque rectangulaire $k = 1$, $\alpha = 0$ et $E_{11} = E_{22} = \rho_{11} = \rho_{22} = 1$ (matériaux homogènes).

b/a	h/a	Hosseini (2011a)	Présente Méthode
0.5	0.01	49.3032	49.3031
	0.1	45.4869	45.4895
2	0.01	12.3342	12.3341
	0.1	12.0675	12.0676

Tableau IV. 4. Comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ d'une plaque carrée (Al/ZrO₂) avec $k = 1$.

a/h	Théories		Porosité	
			$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$
5	Benyoucef et al. (2016)		0.2258	0.2231
	Présente Méthode	Type I	0.2186	0.2186
		Type II	0.2276	0.2377
		Type III	0.2282	0.2391
		Type IV	0.2270	0.2364
		Type V	0.2291	0.2411
		Type VI	0.2261	0.2344
10	Benyoucef et al. (2016)		0.0612	0.0604
	Présente Méthode	Type I	0.0591	0.0591
		Type II	0.0618	0.0649
		Type III	0.0620	0.0654
		Type IV	0.0616	0.0645
		Type V	0.0623	0.0660
		Type VI	0.0613	0.0638
20	Benyoucef et al. (2016)		0.0156	0.0157
	Présente Méthode	Type I	0.0151	0.0151
		Type II	0.0158	0.0166
		Type III	0.0158	0.0167
		Type IV	0.0157	0.0165
		Type V	0.0159	0.0169
		Type VI	0.0157	0.0163

Le premier exemple représente la comparaison de la fréquence fondamentale $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_0 h / G}$ pour une plaque rectangulaire avec un matériau homogène. Il est à noter que les résultats actuels de la fréquence fondamentale se comparent très bien avec l'autre solution théorique pour une plaque FG parfaite. Par souci de validation, certains résultats sont présentés ici en comparaison avec ceux disponibles dans la littérature. Le tableau (IV.4)

montre la comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ pour les plaques carrées SSSS (Al/ZrO₂) avec trois valeurs du rapport épaisseur/longueur ($a/h = 5, 10$ and 20) et pour différents cas de taux de distribution de porosité. L'indice de loi de puissance est pris égal à $k = 1$. Il convient de noter que les résultats actuels de la fréquence fondamentale se comparent également très bien avec la solution des autres théories pour une plaque FG parfaite ($\alpha = 0$), nous pouvons donc noter que la variation du taux de distribution de la porosité a un effet significatif sur la résultats.

Tableau IV.5. Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ de la plaque carrée (Al/ZrO₂) $\alpha = 0,2$.

Méthodes		k=1			a/h=5		
		a/h=5	a/h=10	a/h=20	k=2	k=3	k=5
3-D (Batra et al. 2004)		0.2192	0.0596	0.0153	0.2197	0.2211	0.2225
HSDT (Matsunaga et al. 2008)		0.2285	0.0619	0.0158	0.2264	0.227	0.2281
HSDT (Hosseini et al. 2011b)		0.2276	0.0619	0.0158	0.2256	0.2263	0.2272
Présente Méthode	Type I	0.2186	0.0591	0.0151	0.2188	0.2185	0.2176
	Type II	0.2377	0.0649	0.0166	0.2406	0.2401	0.2388
	Type III	0.2391	0.0654	0.0167	0.2421	0.2414	0.2399
	Type IV	0.2364	0.0645	0.0165	0.2391	0.2387	0.2377
	Type V	0.2411	0.0660	0.0169	0.2443	0.2433	0.2414
	Type VI	0.2344	0.0638	0.0163	0.2368	0.2366	0.2358

L'exemple présenté dans le tableau (IV.5) montre une comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ d'une plaque carrée (Al/ZrO₂) pour différentes valeurs de rapport d'épaisseur a/h et d'indice de loi de puissance k , la porosité dans l'exemple on prend $\alpha = 0.2$. Le paramètre de fréquence fondamentale ω est obtenu à l'aide de la théorie actuelle (NFSDT) et comparé à ceux des solutions exactes 3-D de Batra et al (2004), des théories de déformation par cisaillement supérieur (HSDT) avec des solutions théoriques 2-D d'ordre supérieur de Matsunaga et al (2008), la théorie de Reddy avec les solutions analytiques de Hosseini et al. (2011b). Dans le tableau (IV.6), les fréquences adimensionnelles $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$ de plaques carrées minces et épaisses (Al/Al₂O₃) avec un rapport d'épaisseur variant entre (5, 10 et 20) et l'indice de loi de puissance variant de (0.5, 1, 4, 10) sont étudiés, les résultats obtenus par la présente théorie sont présentés dans ce tableau

et comparés à ceux prédits par TSDT (Ait Atmane et al 2019), FSDT (Draiche et al 2019) et Tounsi et al (2020). On note que $\alpha = 0,2$ dans cet exemple. On peut voir que les résultats obtenus par la théorie actuelle sont en bon accord avec la solution des autres théories pour une plaque FG parfaite (Type I, $\alpha = 0$).

Tableau IV.6. Comparaison du paramètre de fréquence propre $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ de la plaque carrée (Al/Al₂O₃), $\alpha = 0,2$.

a/h	Mode (m,n)	Méthodes	Indice de loi de puissance				
			k=0	k=1	k=4	k=10	
5	(1,1)	TSDT (Ait Atmane et al 2019)	0.2113	0.1631	0.1378	0.1301	
		FSDT (Draiche et al 2019)	0.2112	0.1631	0.1397	0.1324	
		Tounsi et al (2020)	0.2112	0.1631	0.1397	0.1324	
		Présente Méthode	Type I	0.2112	0.1461	0.1261	0.1146
			Type II	0.2294	0.1556	0.1289	0.1106
			Type III	0.2298	0.1549	0.1265	0.1062
			Type IV	0.2290	0.1563	0.1309	0.1141
	Type V	0.2304	0.1536	0.1221	0.0964		
	Type VI	0.2284	0.1571	0.1334	0.1182		
	(1,2)	TSDT (Ait Atmane et al 2019)	0.4623	0.3607	0.2980	0.2771	
		FSDT (Draiche et al 2019)	0.4618	0.3604	0.3049	0.2856	
		Tounsi et al (2020)	0.4618	0.3604	0.3049	0.2856	
		Présente Méthode	Type I	0.4623	0.3281	0.2767	0.2493
			Type II	0.4975	0.3466	0.2733	0.2255
Type III			0.4977	0.3446	0.2664	0.2126	
Type IV			0.4973	0.3485	0.2793	0.2360	
Type V	0.4978	0.3410	0.2541	0.1852			
Type VI	0.4970	0.3509	0.2870	0.2487			
10	(1,1)	TSDT (Ait Atmane et al 2019)	0.0577	0.0442	0.0381	0.0364	
		FSDT (Draiche et al 2019)	0.0577	0.0442	0.0382	0.0366	
		Tounsi et al (2020)	0.0577	0.0442	0.0382	0.0366	
		Présente Méthode	Type I	0.0576	0.0391	0.0344	0.0315
			Type II	0.0631	0.0419	0.0364	0.0325
			Type III	0.0633	0.0418	0.0360	0.0319
			Type IV	0.0629	0.0420	0.0367	0.0330
	Type V	0.0636	0.0415	0.0353	0.0305		
	Type VI	0.0626	0.0422	0.0371	0.0335		
	(1,2)	TSDT (Ait Atmane et al 2019)	0.1377	0.1059	0.0903	0.0856	
		FSDT (Draiche et al 2019)	0.1376	0.1059	0.0911	0.0867	
		Tounsi et al (2020)	0.1376	0.1059	0.0911	0.0867	
		Présente Méthode	Type I	0.1376	0.0943	0.0821	0.0821
			Type II	0.1500	0.1008	0.0852	0.0743

20	(1,1)		Type III	0.1503	0.1004	0.0839	0.0720	
			Type IV	0.1496	0.1012	0.0863	0.0761	
			Type V	0.1508	0.0996	0.0815	0.0667	
			Type VI	0.1491	0.1016	0.0876	0.0783	
		TSDT (Ait Atmane et al 2019)			0.0148	0.0113	0.0098	0.0094
		FSDT (Draiche et al 2019)			0.0148	0.0113	0.0098	0.0094
		Tounsi et al (2020)			0.0148	0.0113	0.0098	0.0094
		Présente Méthode		Type I	0.0147	0.0099	0.0088	0.0081
				Type II	0.01624	0.0107	0.00947	0.00858
				Type III	0.01629	0.0106	0.00940	0.00851
Type IV	0.01618			0.0107	0.00953	0.00865		
Type V	0.01637			0.0106	0.00927	0.00838		
Type VI	0.01610			0.0107	0.00959	0.00873		

Les tableaux (IV.7) et (IV.8) montrent la comparaison de la fréquence fondamentale des plaques rectangulaires FGM sur leur fondation élastique avec celles rapportées par Baferani et al (2011), Tai et al (2012) et Kaci et al. (2020) avec différentes valeurs des rapports épaisseur/longueur, des paramètres de rigidité des fondations et du taux de distribution de la porosité, les résultats pour le cas de (Type I) sont en bon accord les uns avec les autres.

La fréquence fondamentale sans dimension en fonction du rapport d'aspect (a/b), du rapport côté/épaisseur (a/h) et de l'indice de loi de puissance (k) de la plaque poreuse FGM pour différentes variations du taux de distribution de la porosité est illustrée sur les Fig. (IV.2), Fig. (IV.3) et Fig. (IV.4), respectivement. Dans chaque figure nous présentons quatre cas de fondation élastique. (a) sans fondation élastique, (b) fondation Winkler-Pasternak, (c) fondation élastique Winkler et (d) fondation élastique Pasternak.

Tableau IV.7. Comparaison de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$ de (Al/Al2O3) plaque carrée $a = 20h$ et $\alpha = 0.2$ (cas de fondation élastique).

k	k ₀	k ₁	Méthodes							
			Baferani (2011)	Tai (2012)	Présente Méthode					
					Type I	Type II	Type III	Type IV	Type V	Type VI
1	0	0	0.0227	0.0222	0.0196	0.02107	0.02101	0.02113	0.02088	0.02120
	0	100	0.0382	0.0378	0.0356	0.03917	0.03922	0.03911	0.03929	0.03902
	100	0	0.0238	0.0233	0.0207	0.02240	0.02234	0.02244	0.02224	0.02249

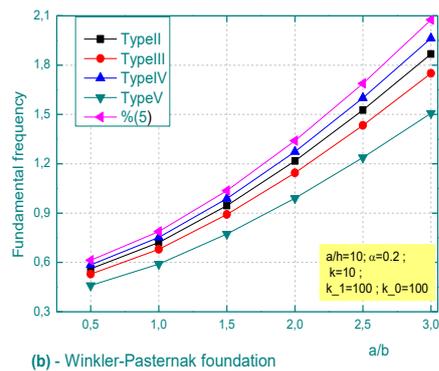
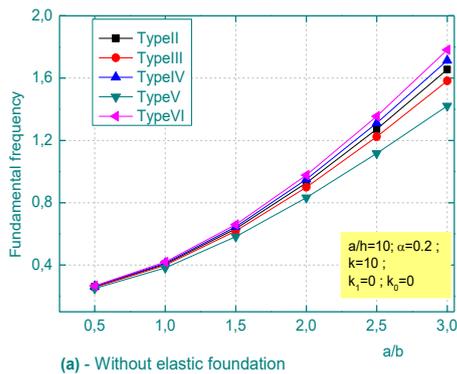
	100	100	0.0388	0.0384	0.0362	0.03984	0.03990	0.03978	0.03996	0.03968
2	0	0	0.0209	0.0202	0.0186	0.02055	0.02058	0.02052	0.02062	0.02047
	0	100	0.0380	0.0374	0.0355	0.03942	0.03948	0.03935	0.03955	0.03923
	100	0	0.0221	0.0214	0.0198	0.02199	0.02203	0.02195	0.02208	0.02189
	100	100	0.0381	0.0386	0.0361	0.04009	0.04015	0.04002	0.04022	0.03990
5	0	0	0.0197	0.0191	0.0169	0.01801	0.01784	0.01816	0.01751	0.01834
	0	100	0.0381	0.0377	0.0350	0.03778	0.03746	0.03801	0.03673	0.03825
	100	0	0.0210	0.0205	0.0184	0.01971	0.01955	0.01985	0.01924	0.02000
	100	100	0.0388	0.0384	0.0356	0.03841	0.03807	0.03866	0.03731	0.03890

On peut voir que la fréquence fondamentale sans dimension augmente à mesure que le rapport hauteur/largeur a/b et le rapport côté/épaisseur a/h augmentent figures (IV. 2) et (IV.3). De plus, le cas de la plaque FG de la fondation Winkler-Pasternak et de la fondation élastique Pasternak donne la plus grande valeur de fréquence. Le (Type VI) de la variation du taux de distribution de la porosité dans la plaque FG donne la plus grande valeur de fréquence tandis que le (Type V) donne les plus petites.

À partir de la Fig. (IV.4), nous pouvons observer que la fréquence fondamentale dimensionnelle diminue lorsque l'indice de loi de puissance k augmente. En même temps, nous avons remarqué que la plus grande valeur de la fréquence fondamentale peut être déterminée avec la fondation élastique de Winkler-Pasternak et la fondation élastique de Pasternak. La variation du taux de distribution de la porosité dans la plaque FG (Type V) donne la plus petite valeur de fréquence tandis que le (Type VI) donne les plus grandes.

Tableau IV.8. Fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho_m/E_m}$ de la plaque SS (Al/Al₂O₃) $k = 2$ et $\alpha = 0.2$.

k_0	k_1	a/b	a/h	Théories						
				Kaci (2020)	Présente Méthode					
					Type I	Type II	Type III	Type IV	Type V	Type VI
0	0	1	10	7.8763	7.2802	7.9936	7.9944	7.9912	7.9920	7.9846
			20	8.0749	7.4433	8.2229	8.2346	8.2108	8.2514	8.1917
		2	10	18.8206	17.4798	19.0036	18.9663	19.0327	18.8929	19.0633
			20	19.9333	18.4000	20.2627	20.2774	20.2452	20.2939	20.2139
0	100	1	10	14.7799	13.0765	14.1340	14.0863	14.1727	13.9950	14.2165
			20	14.9549	14.2220	15.7684	15.7929	15.7408	15.8221	15.6944
		2	10	27.1506	23.6168	25.3013	25.1762	25.4082	24.9488	25.5391
			20	28.1214	26.2529	28.9289	28.9421	28.9078	28.9441	28.8635
100	0	1	10	8.3643	7.7494	8.5132	8.5141	8.5103	8.5112	8.5026
			20	8.5576	7.94972	8.7974	8.8120	8.7823	8.8331	8.7585
		2	10	19.0258	17.6501	19.1856	19.1472	19.2158	19.0715	19.2475
			20	20.1323	18.6012	20.4887	20.5041	20.4704	20.5214	20.4379
100	100	1	10	15.0455	13.2655	14.3235	14.2724	14.3653	14.1752	14.4131
			20	15.2209	14.4684	16.03710	16.0609	16.0098	16.0888	15.9638
		2	10	27.2931	23.7083	25.3911	25.2640	25.4999	25.0332	25.6331
			20	28.2628	26.3815	29.0683	29.0809	29.0475	29.0819	29.0036



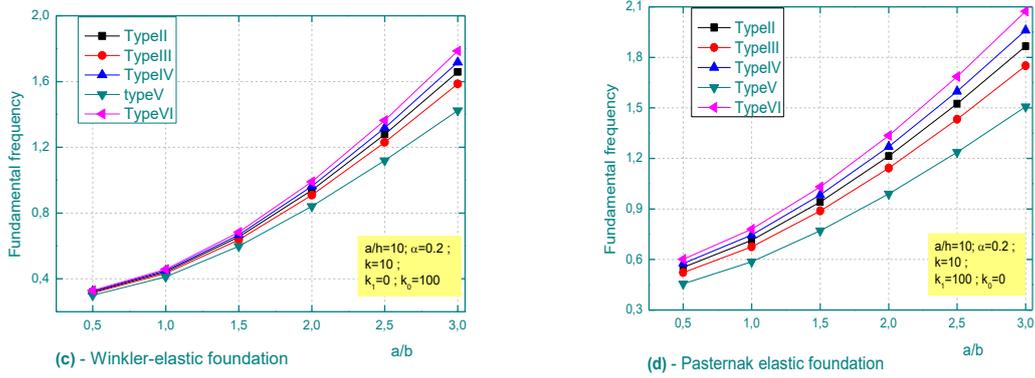


Figure IV. 2. Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaque FG carrée Al/Al₂O₃ par rapport au rapport a/b .
 (a) sans fondation élastique, (b) fondation Winkler-Pasternak,
 (c) Fondation élastique Winkler (d) Fondation élastique Pasternak.

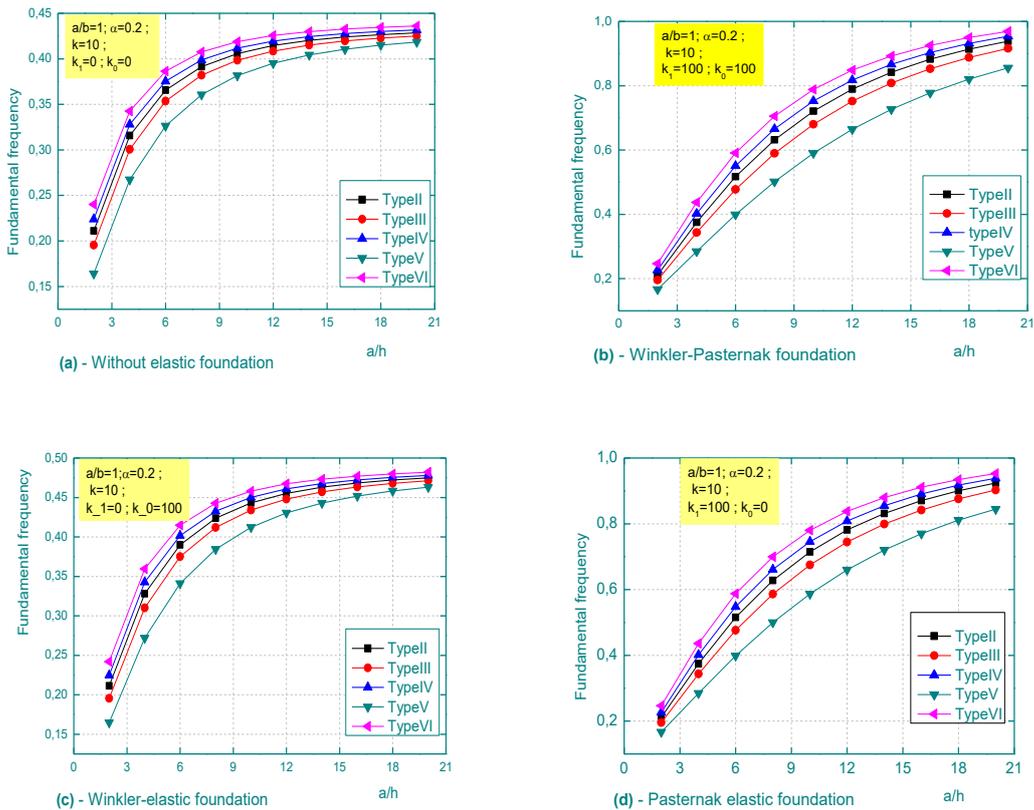


Figure IV. 3. Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaque FG carrée Al/Al₂O₃ par rapport au rapport a/h .
 (a) sans fondation élastique, (b) fondation Winkler-Pasternak,
 (c) Fondation élastique Winkler (d) Fondation élastique Pasternak.

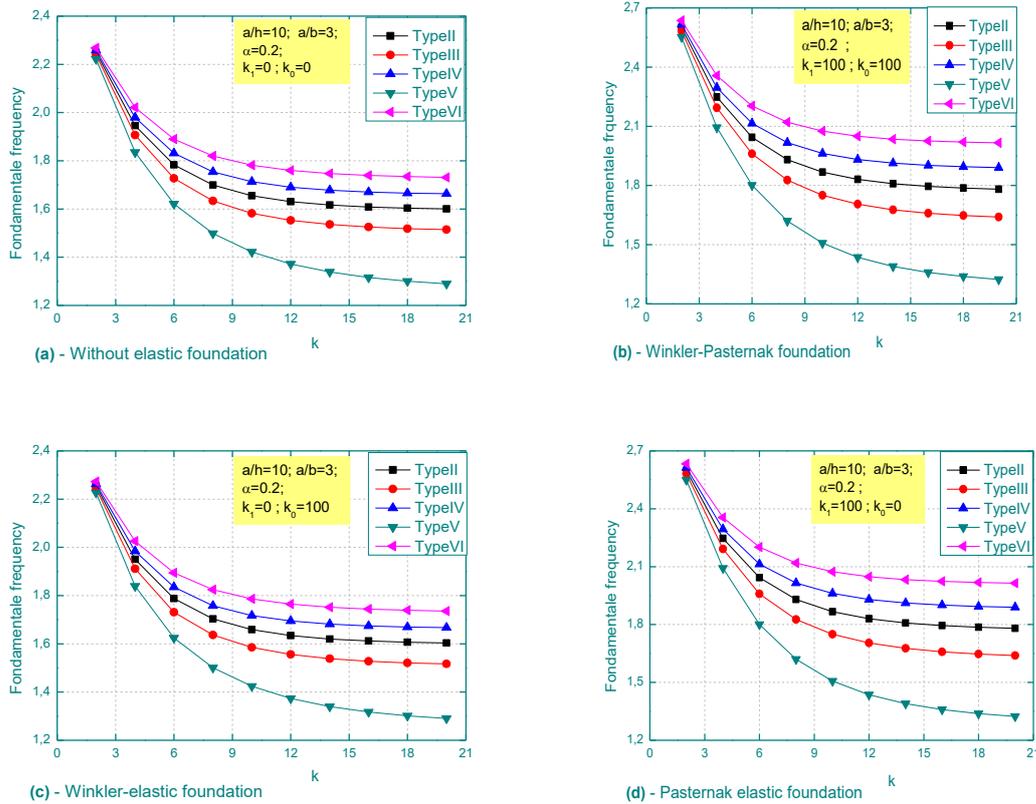


Figure IV. 4. Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ de la plaque FG carrée Al/Al_2O_3 par rapport à l'indice de loi de puissance k .
 (a) sans fondation élastique, (b) fondation Winkler-Pasternak,
 (c) Fondation élastique Winkler (d) Fondation élastique Pasternak.

IV. 5. Conclusions

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie efficace et raffinée de la déformation par cisaillement basée sur le concept de surface moyenne a été efficacement utilisée pour étudier de manière approfondie l'analyse des vibrations libres de plaques FG poreuses simplement appuyées sur des fondations élastiques à l'aide d'une procédure analytique. La règle de mélange modifiée couvrant différentes variations du taux de distribution de la porosité est utilisée pour décrire et approximer les propriétés matérielles des plaques FG imparfaites. Les résultats ont été inclus les effets de la variation du taux de distribution de la porosité et des paramètres élastiques des fondations. Les résultats obtenus ont indiqué les avantages d'utiliser un taux de distribution de porosité différent par rapport à une plaque traditionnelle à porosité uniforme, pour le même coefficient de porosité, les fréquences sans dimension prennent des valeurs différentes lorsque le taux de distribution de la porosité est modifié.

Chapitre V :
Comportement dynamique
des plaques sandwich en
FGM

V. 1. Introduction:

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes.

En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de l'aéronautique. De nos jours, la diminution de leurs coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus variées (automobile, navigation, construction, etc.). Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on notera les matériaux sandwichs. Cette structure est obtenue à partir de deux peaux ou revêtements, réalisées dans un matériau ayant de très bonnes caractéristiques, collées avec un adhésif sur un cœur réalisé avec un matériau très léger et ayant des faibles caractéristiques mécaniques.

Ces dernières années, et avec l'évolution des procédés de fabrication des matériaux FGM, ces derniers sont envisagées dans l'industrie des structures sandwich en raison de la variation progressive des propriétés des matériaux aux interfaces entre les couches des peaux et de l'âme. En raison de l'importance et des applications techniques étendues des structures sandwichs en FGM, la compréhension de leurs réponses devient une tâche importante. Plusieurs recherches ont été effectuées pour analyser le comportement en flexion des poutres et plaques sandwiches en FGM. Zenkour et Alghamdi [Zenkour et al 2010] ont examiné la flexion thermo-élastique des plaques sandwiches en FGM sur la base des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevés (HSDT). Tounsi [Tounsi et al 2013] a développé une théorie de cisaillement raffinée trigonométrique pour la flexion thermo-élastique des plaques sandwiches en FGM. Xuan [Nguyen-Xuan H., 2013] analyser par éléments finis iso-géométrique les plaques sandwiches composites en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Vo [Vo 2015] a développé le comportement statique des poutres sandwiches en FGM en utilisant une théorie quasi-3D. Simsek et Al-shujairi [Simsek 2017] ont étudié la flexion, la vibration libre et forcée des poutres sandwiches FGM excitées par deux charges harmoniques mobiles successives. Li [Li et al 2014] analyse la dynamique des stratifiés anti-symétriques à plis croisés et à plis angulaires pour des plaques rectangulaires hybrides épaisses simplement appuyées. Karamanli [Karamanli, 2017] a étudié le

comportement en flexion de deux poutres sandwich directionnelles en FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D. Shashank [Shashank, P, Pradyumna, S. 2018] a utilisé une théorie par couches d'ordre élevé pour les plaques sandwich en FGM. Zarga [Zarga et al 2019] a utilisé une théorie simple de cisaillement quasi-3D pour l'étude de la flexion thermomécanique pour les plaques sandwich en FGM. Meksi [Meksi, R et al 2019] a développé une solution analytique pour la flexion, le flambement et la réponse aux vibrations des plaques sandwich en FGM. Hellal [Hellal, H et al 2019] a utilisé une théorie simple de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse dynamique et de stabilité des plaques sandwich en FGM dans un environnement hygrothermique.

Au stade de la production des matériaux fonctionnellement gradués FGM, des microvides et des porosités peuvent se produire en raison d'erreurs de production ou techniques. Ceci est dû à la grande différence de températures de solidification entre les constituants du matériau [Zhu, J., et al 2001] et la porosité, le comportement mécanique des matériaux fonctionnellement gradués change considérablement. Ainsi, l'effet de la porosité sur les matériaux fonctionnellement gradués est un problème important et doit être étudié afin de concevoir en toute sécurité ces composites.

Ces dernières années, de nombreux chercheurs sont concentrés sur la recherche de matériaux FGM poreux. Wattanasakulpong [Wattanasakulpong et al 2012] a également donné une discussion sur les porosités qui se produisant à l'intérieur des échantillons des matériaux FGM réalisés par une technique d'infiltration successive en plusieurs étapes. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de porosité lors de la conception des structures FGM soumises à des charges dynamiques. Récemment, Wattanasakulpong et Ungbhakorn [Wattanasakulpong et al. 2014] ont étudié les problèmes de vibrations linéaires et non linéaires des poutres FGM élastiquement retenues aux extrémités et présentant des porosités. De la même manière, [Ait Yahia et al. 2015] ont étudié la propagation des ondes d'une plaque FGM infinie ayant des porosités en utilisant diverses théories de cisaillement d'ordres élevés. Akbaş [Akbaş 2017] analyse les effets thermiques sur la vibration des poutres profondes en FGM avec porosité. Bourada [Bourada, F et al. 2019] a étudié la dynamique d'une poutre poreuse en FGM en utilisant une théorie de cisaillement sinusoïdal. Récemment, Daikh et Zenkour [Daikh, A.A., and Zenkour, 2019] ont étudié l'effet de la porosité sur l'analyse de la flexion de différentes plaques sandwich en FGM.

Dans le présent chapitre, une nouvelle distribution des porosités est proposée, des exemples numériques sont présentés pour illustrer l'influence du taux de répartition de cette porosité dans le matériau de base sur le comportement mécanique de la plaque sandwiches en matériau FGM.

V. 2. Formulation théorique des plaques sandwich FGP :

V. 2.1. Propriétés des matériaux FGM

Considérons une structure composite constituée de trois couches isotropes d'épaisseur arbitraire h , de largeur b et de longueur a comme illustré aux figures (1-a) et (1-b). La plaque sandwich FGM est supportée sur quatre bords définis dans le système de coordonnées (x, y, z) avec les axes x et y situés dans le plan médian ($z = 0$) et son origine placée au coin de la plaque. Les plans de délimitation externes de la plaque sandwich sont définis par $z = \pm h/2$. Les positions verticales de la surface inférieure, les deux interfaces entre les couches cœur et faces, et la surface supérieure sont respectivement notées $h_0 = -h/2, h_1, h_2$ et $h_3 = h/2$. La règle de mélange modifiée couvrant différentes distributions de porosité est utilisée pour décrire et approximer les propriétés matérielles des plaques sandwich FG.

L'étude a examiné deux types différents de plaques sandwich fonctionnellement graduées.

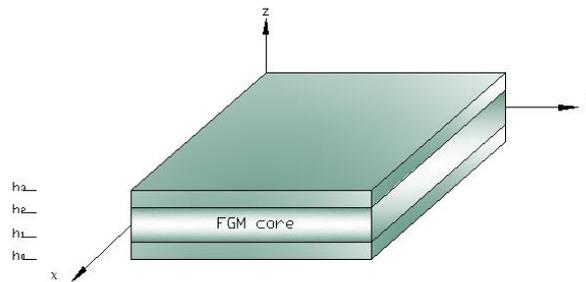


Figure V. (1-a). Plaque FG sandwich avec une peau de couverture homogène et âmes en FGM.

$$\begin{aligned}
 V^{(1)} &= 0, z \in [h_1, h_2] \\
 V^{(2)} &= \left(\frac{z - h_2}{h_3 - h_2} \right)^k, z \in [h_2, h_3] \\
 V^{(3)} &= 1, z \in [h_3, h_4]
 \end{aligned} \tag{V. 1}$$

Type-B : peau frontale en FGM et âme homogène. La plaque sandwich FGM de ce type est considérée comme softcore (noyau mou) et hardcore (noyau dur).

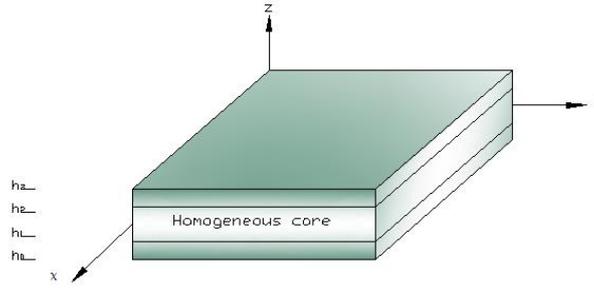


Figure V. 1-b. Plaque FG sandwich avec une peau de couverture en FGM et âme homogène.

$$\begin{aligned}
 V^{(1)} &= \left(\frac{z - h_1}{h_2 - h_3} \right)^k, z \in [h_1, h_2] \\
 V^{(2)} &= 1, z \in [h_2, h_3] \\
 V^{(3)} &= \left(\frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k, z \in [h_3, h_4]
 \end{aligned} \tag{V.2}$$

Où k désigne l'indice de fraction volumique ($0 \leq k \leq \infty$) et $V^{(n)}$ ($n = 1,2,3$) désigne la fonction de fraction volumique de la couche n , qui détermine le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur.

Plusieurs variations du taux de distribution de la porosité sont considérées dans cette étude. Les équations du module de Young (E) et de la densité du matériau (ρ) de la plaque sandwich FGP peuvent être communiquées comme suit :

Type I: plaque FG parfaite (Sans porosité $\alpha = 0$)

$$E = E_m (V_m) + E_c (V_c) \tag{V.3}$$

Type II: 50% Ceramic, 50% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + E_c \left(V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \tag{V.4}$$

Type III: 60% Ceramic, 40% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{2\alpha}{5} \right) + E_c \left(V_c - \frac{3\alpha}{5} \right) \tag{V.5}$$

Type IV: 40% Ceramic, 60% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{3\alpha}{2} \right) + E_c \left(V_c - \frac{2\alpha}{2} \right) \tag{V.6}$$

Type V: 75% Ceramic, 25% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{\alpha}{4} \right) + E_c \left(V_c - \frac{3\alpha}{4} \right) \tag{V.7}$$

Type VI: 25% Ceramic, 75% Metal

$$E = E_m \left(V_m - \frac{3\alpha}{4} \right) + E_c \left(V_c - \frac{\alpha}{4} \right) \quad (\text{V.8})$$

V. 2.2. Déplacements et déformations

Les déplacements d'un point matériel situé en (x, y, z) dans la plaque peuvent se composer comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y, z) \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

Où u et v sont les déplacements du plan médian de la plaque dans les directions x et y , respectivement ; w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement, tandis que $f(z)$ représente les fonctions de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversal le long de l'épaisseur et est donnée par :

$$f(z) = z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{V.10})$$

Les parties de déformation sont identifiées avec les retraits donnés dans l'équation. (V.9) peut être communiqué comme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z k_x^b + \left(z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) k_x^s \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z k_y^b + \left(z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) k_y^s \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + \left(z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} &= g(z) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} &= g(z) \gamma_{xz}^s \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

Où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \\ k_{xy}^b &= -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \\ g(z) &= 1 - f'(z), \quad \text{et} \quad f'(z) = \frac{d}{dz} \left(z - \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{V.12})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement

Les coefficients de rigidité Q_{ij} peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1-\nu)} \end{aligned} \quad (V.13)$$

L'énergie potentielle totale de la plaque sandwich FGP peut s'écrire :

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV$$

Le principe du travail virtuel pour le problème actuel pourrait être communiqué comme suit :

$$\begin{aligned} U_e = \frac{1}{2} \int_V (N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_x \varepsilon_x^0 + M_x^b k_x^b + M_y^b k_y^b + M_{xy}^b k_{xy}^b + M_x^s k_x^s + M_y^s k_y^s + M_{xy}^s k_{xy}^s + S_{yz}^s \gamma_{yz}^s \\ + S_{xz}^s \gamma_{xz}^s) dx dy \end{aligned} \quad (V.15)$$

L'énergie cinétique de la plaque peut s'écrire :

$$\begin{aligned} T &= 1/2 \int_V \rho (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dV \\ &= 1/2 \int_A I_0 (\ddot{u}^2 + \ddot{v}^2 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s)^2) dx dy \\ &+ 1/2 \int_A (I_2 ((\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial y})^2) + \frac{I_2}{84} ((\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial y})^2)) dx dy \end{aligned} \quad (V.16)$$

Où ρ est la masse volumique de la plaque FG, et I_i ($i = 0,2$) sont les inerties définies par :

$$(I_0, I_2) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (1, z^2) \rho dz \quad (V.17)$$

La règle de Hamilton est utilisée pour déterminer les conditions de mouvement adaptées au champ d'arrachage et la condition constitutive. La règle peut s'exprimer ainsi :

$$0 = \int_0^t \delta(U_e - T) dt \quad (V.18)$$

où δ indique une variation par rapport à x et y .

Les résultantes de contrainte d'une plaque sandwich composée de trois couches peuvent être identifiées avec les déformations totales par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma \quad (V.19)$$

La représentation suivante pour les quantités de déplacement des théories de déformation de cisaillement est appropriée dans le cas du problème de vibration libre

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \cdot e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (V.20)$$

où $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$ et U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} , W_{smn} étant des paramètres arbitraires et ω représente la fréquence propre associée au $(m, n)^{ème}$ mode propre.

V.3. Résultats numériques et discussion :

Pour prouver l'efficacité de la présente analyse, les tableaux suivants démontrent une étude comparative des fréquences pour une plaque sandwich FGM parfaite. Le modèle actuel de plaque sandwich poreuse FGM peut être réduit à une plaque parfaite en fixant $a = 0$.

Dans ce qui suit, une analyse des vibrations libres des plaques sandwich FGP illustrées à la Fig. (V.1) sera effectuée. Les plaques sandwich FGP sont constituées de céramique (Al_2O_3) et de métal (Al), dont les propriétés des matériaux sont répertoriées dans le tableau (V.1).

Tableau V.1. Propriétés des matériaux de la céramique et du métal

Propriétés	Métal	Céramique	
	Aluminum (Al)	Zirconia (ZrO_2)	Alumina (Al_2O_3)
E (GPa)	70	200	380
ρ (kg/m ³)	2702	5700	3800

Tableau V.2. Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ des plaques sandwich FGM à loi de puissance carrée simplement appuyées avec un noyau FGM.

a/b	Théories		k				
			0.5	1	2	5	10
0.1	Li et al	Type-I	1.2975	1.3484	1.4082	1.4930	1.5498
	Présente Méthode	Type-I	1.2945	1.3453	1.4051	1.4904	1.5475
		Type-II	1.3632	1.4149	1.4753	1.5619	1.6203
		Type-III	1.3613	1.4127	1.4730	1.5596	1.6179
		Type-IV	1.3651	1.4170	1.4775	1.5643	1.6227
		Type-V	1.3584	1.4095	1.4696	1.5561	1.6143
		Type-VI	1.3679	1.4203	1.4810	1.5678	1.6263
0.2	Li et al	Type-I	1.1958	1.2533	1.3156	1.3956	1.4454
	Présente Méthode	Type-I	1.1868	1.2435	1.3057	1.3874	1.4384
		Type-II	1.2400	1.3012	1.3660	1.4496	1.5017
		Type-III	1.2397	1.3002	1.3646	1.4481	1.5001
		Type-IV	1.2402	1.3022	1.3674	1.4512	1.5033
		Type-V	1.2392	1.2987	1.3626	1.4458	1.4978
		Type-VI	1.2403	1.3036	1.3694	1.4535	1.5056

Tableau V.3. Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de la plaque carrée en sandwich FGM (1-8-1) (Al_2O_3/Al) avec noyau FGM

a/h	Theory		k			
			0.5	1	5	10
10	Li et al. (2008)		1.298	1.348	1.493	1.550
	Dozio (2013)		1.297	1.348	1.493	1.549
	Shashank et al (2014)		1.298	1.348	1.492	1.549
	Présente Méthode	Type-I	1.2945	1.3453	1.4904	1.5475
		Type-II	1.3632	1.4149	1.5619	1.6203
		Type-III	1.3613	1.4127	1.5596	1.6179
		Type-IV	1.3651	1.4170	1.5643	1.6227
Type-V	1.3584	1.4095	1.5561	1.6143		
Type-VI	1.3666	1.4189	1.5665	1.6249		
100	Li et al. (2008)		1.340	1.387	1.531	1.591
	Dozio (2013)		1.339	1.386	1.531	1.591
	Shashank et al (2014)		1.340	1.387	1.532	1.591
	Présente Méthode	Type-I	1.3392	1.3866	1.5313	1.5910
		Type-II	1.4153	1.4616	1.6068	1.6679
		Type-III	1.4125	1.4589	1.6041	1.6651
		Type-IV	1.4181	1.4643	1.6096	1.6706
Type-V	1.4084	1.4548	1.6001	1.6610		
Type-VI	1.4209	1.4671	1.6123	1.6734		

Pour démontrer l'efficacité et la précision de la présente méthode, plusieurs exemples illustratifs ont été résolus pour différents types de plaques sandwich FG sous chargement dynamique.

Nous considérons d'abord une plaque sandwich avec un noyau FGM et le rapport noyau sur épaisseur de (1-1-1) et (1-8-1). Différentes valeurs de rapport côté-épaisseur, rapport d'aspect et indice de loi de puissance sont prises en compte. Les présents résultats sont comparés dans le tableau (2) et le tableau (V.3) avec les solutions analytiques données par Li et al. (2008), Dozio (2013) et Shashank et al (2014). Un bon accord est observé lorsque la plaque sandwich FG est parfaite. L'existence et la variation du taux de distribution de la porosité affectent de manière significative les fréquences de la plaque sandwich FGP.

Tableau V.4. Paramètres de fréquence fondamentaux des plaques sandwich FGM carrées simplement appuyées avec noyau FGM.

a/h	Theory		1-1-1			1-2-1			2-2-1		
			$k=0.5$	$k=1$	$k=5$	$k=0.5$	$k=1$	$k=5$	$k=0.5$	$k=1$	$k=5$
5	S. Natarajan 2012		1.1511	1.1701	1.2162	1.1663	1.1952	1.2712	1.2031	1.2421	1.3312
	Présente Méthode	Type-I	1.1445	1.1626	1.2091	1.1582	1.1861	1.2619	1.1943	1.2323	1.3232
		Type-II	1.1981	1.2180	1.2667	1.2115	1.2422	1.3210	1.2509	1.2904	1.3839
		Type-III	1.1973	1.2169	1.2652	1.2109	1.2411	1.3194	1.2497	1.2890	1.3823
		Type-IV	1.1990	1.2191	1.2682	1.2121	1.2433	1.3225	1.2521	1.2918	1.3854
		Type-V	1.1960	1.2151	1.2630	1.2099	1.2394	1.3171	1.2478	1.2869	1.3799
		Type-VI	1.1962	1.2169	1.2665	1.2098	1.2418	1.3217	1.2514	1.2914	1.3853
10	S. Natarajan 2012		1.2392	1.2524	1.2935	1.2598	1.2806	1.3513	1.2865	1.3238	1.4180
	Présente Méthode	Type-I	1.2372	1.2502	1.2914	1.2573	1.2778	1.3484	1.2838	1.3207	1.4154
		Type-II	1.3023	1.3153	1.3569	1.3236	1.3442	1.4154	1.3501	1.3876	1.4843
		Type-III	1.3003	1.3133	1.3547	1.3216	1.3421	1.4132	1.3480	1.3854	1.4820
		Type-IV	1.3043	1.3174	1.3590	1.3255	1.3463	1.4177	1.3522	1.3898	1.4866
		Type-V	1.2974	1.3101	1.3514	1.3187	1.3390	1.4099	1.3448	1.3821	1.4786
		Type-VI	1.3031	1.3164	1.3582	1.3252	1.3463	1.4179	1.3529	1.3906	1.4874
100	S. Natarajan 2012		1.2751	1.2854	1.3239	1.2981	1.3148	1.3825	1.3198	1.3559	1.4519
	Présente Méthode	Type-I	1.2750	1.2853	1.3238	1.2980	1.3147	1.3824	1.3197	1.3558	1.4517
		Type-II	1.3453	1.3548	1.3926	1.3703	1.3858	1.4529	1.3902	1.4265	1.5241
		Type-III	1.3428	1.3523	1.3901	1.3677	1.3832	1.4503	1.3877	1.4239	1.5215
		Type-IV	1.3479	1.3574	1.3951	1.3730	1.3884	1.4554	1.3928	1.4291	1.5267
		Type-V	1.3390	1.3486	1.3864	1.3638	1.3794	1.4465	1.3839	1.4201	1.5176
		Type-VI	1.3475	1.3569	1.3947	1.3736	1.3890	1.4561	1.3941	1.4304	1.5280

Des études de convergence sont également entreprises pour différents types de plaques sandwich FG, à savoir : plaque sandwich avec âme FGM, âme tendre homogène et noyau dur homogène dans les tableaux (V.4), (V.5) et (V.6), respectivement. À des fins d'illustration, la porosité ($\alpha = 0,1$) est fixe, l'indice de loi de puissance (k) prend les valeurs de 0, 0,5, 1 et 5 et le rapport côté/épaisseur varie de 5 à 100. La distribution de la porosité de Type-I décrit une plaque sandwich FG parfaite ($\alpha = 0$). Les types II à VI décrivent des plaques sandwich FGP imparfaites avec une variation uniforme et inégale de la porosité. Les résultats montrent que la présente méthode est bien convergée pour produire des résultats avec une précision suffisante pour tout type de plaque sandwich FG. Il montre clairement que la variation du taux de distribution de la porosité influence les fréquences.

Tableau V.5. Paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de plaques sandwich FGM à loi de puissance carrée simplement appuyées avec noyau tendre homogène. $\alpha = 0.1$

a/h	Theory		1-1-1			1-2-1			1-8-1		
			k=1	k=5	k=10	k=1	k=5	k=10	k=1	k=5	k=10
5	Li et al 2008		1.3824	1.5028	1.5267	1.3212	1.4266	1.4410	1.1445	1.2521	1.2706
	Présente Méthode	Type-I	1.3960	1.5549	1.5820	1.3236	1.4625	1.4884	1.1448	1.2522	1.2704
		Type-II	1.4131	1.5934	1.6265	1.3240	1.4742	1.5058	1.1471	1.2417	1.2578
		Type-III	1.4204	1.5972	1.6293	1.3343	1.4824	1.5131	1.1569	1.2542	1.2707
		Type-IV	1.4052	1.5894	1.6235	1.3128	1.4654	1.4981	1.1360	1.2278	1.2435
		Type-V	1.4304	1.6024	1.6331	1.3481	1.4938	1.5231	1.1696	1.2706	1.2876
		Type-VI	1.3920	1.5829	1.6187	1.2938	1.4508	1.4854	1.1165	1.2039	1.2190
10	Li et al 2008		1.6305	1.7895	1.8081	1.5578	1.7267	1.7481	1.3082	1.4664	1.4948
	Présente Méthode	Type-I	1.6367	1.8127	1.8323	1.5590	1.7435	1.7702	1.3081	1.4662	1.4944
		Type-II	1.7036	1.8905	1.9123	1.6171	1.8090	1.8387	1.3623	1.5180	1.5456
		Type-III	1.7048	1.8899	1.9112	1.6198	1.8107	1.8399	1.3646	1.5218	1.5496
		Type-IV	1.7021	1.8909	1.9132	1.6139	1.8069	1.8372	1.3594	1.5134	1.5408
		Type-V	1.7059	1.8888	1.9095	1.6229	1.8127	1.8412	1.3670	1.5261	1.5544
		Type-VI	1.6993	1.8914	1.9145	1.6078	1.8031	1.8343	1.3535	1.5046	1.5315
100	Li et al 2008		1.7537	1.9362	1.9504	1.6749	1.8853	1.9116	1.3833	1.5703	1.6045
	Présente Méthode	Type-I	1.7538	1.9365	1.9507	1.6749	1.8855	1.9119	1.3833	1.5703	1.6045
		Type-II	1.8545	2.0389	2.0521	1.7741	1.9902	2.0166	1.4705	1.6665	1.7021
		Type-III	1.8508	2.0352	2.0485	1.7705	1.9865	2.0129	1.4673	1.6630	1.6987
		Type-IV	1.8581	2.0426	2.0558	1.7777	1.9940	2.0204	1.4736	1.6699	1.7057
		Type-V	1.8454	2.0298	2.0430	1.7652	1.9809	2.0073	1.4626	1.6579	1.6934
		Type-VI	1.8636	2.0482	2.0613	1.7830	1.9997	2.0261	1.4784	1.6751	1.7109

Tableau V.6. Paramètre de fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ de plaques sandwich FGM à loi de puissance carrée simplement appuyées avec noyau tendre homogène. $\alpha = 0.1$

a/h	Theory		1-1-1			1-2-1			1-8-1		
			k=1	k=5	k=10	k=1	k=5	k=10	k=1	k=5	k=10
5	Li et al 2008		1.2777	0.9979	0.9498	1.3534	1.1190	1.0729	1.5314	1.4284	1.4056
	Présente Méthode	Type-I	1.2716	0.9959	0.9509	1.3467	1.1132	1.0669	1.5387	1.4354	1.3987
		Type-II	1.3318	1.0482	1.0019	1.4083	1.1686	1.1217	1.5891	1.4842	1.4610
		Type-III	1.3334	1.0498	1.0035	1.4099	1.1702	1.1233	1.5906	1.4858	1.4626
		Type-IV	1.3302	1.0521	1.0004	1.4067	1.1670	1.1201	1.5875	1.4826	1.4594
		Type-V	1.3359	1.0521	1.0058	1.4124	1.1726	1.1257	1.5928	1.4881	1.4650
		Type-VI	1.3277	1.0443	0.9981	1.4043	1.1646	1.1177	1.5852	1.4802	1.4570
10	Li et al 2008		1.3552	1.0453	0.9952	1.4413	1.1756	1.1246	1.6511	1.5299	1.5033
	Présente Méthode	Type-I	1.3525	1.0443	0.9952	1.4393	1.1739	1.1231	1.6487	1.5277	1.5011
		Type-II	1.4209	1.1016	1.0509	1.5090	1.2346	1.1821	1.7243	1.5995	1.5721
		Type-III	1.4232	1.1036	1.0528	1.5113	1.2367	1.1841	1.7268	1.6019	1.5745
		Type-IV	1.4187	1.0997	1.0490	1.5067	1.2326	1.1800	1.7219	1.5972	1.5698
		Type-V	1.4266	1.1066	1.0557	1.5149	1.2399	1.1872	1.7305	1.6055	1.5780
		Type-VI	1.4153	1.0968	1.0462	1.5032	1.2295	1.1770	1.7182	1.5936	1.5663
100	Li et al 2008		1.3851	1.0630	1.0123	1.4755	1.1969	1.1440	1.6990	1.5698	1.5416
	Présente Méthode	Type-I	1.3850	1.0630	1.0123	1.4755	1.1969	1.1440	1.6990	1.5698	1.5416
		Type-II	1.4557	1.1217	1.0693	1.5486	1.2598	1.2049	1.7792	1.6455	1.6163
		Type-III	1.4582	1.1239	1.0713	1.5513	1.2620	1.2071	1.7821	1.6483	1.6190
		Type-IV	1.4531	1.1196	1.0672	1.5460	1.2575	1.2027	1.7763	1.6428	1.6136
		Type-V	1.4621	1.1271	1.0745	1.5553	1.2655	1.2104	1.7865	1.6524	1.6231
		Type-VI	1.4493	1.1164	1.0641	1.5421	1.2541	1.1994	1.7720	1.6387	1.6096

La fréquence fondamentale par rapport au rapport côté-épaisseur h/a pour trois types de plaques sandwich FGM est donnée à la Fig. (V.2). Ici, les combinaisons de couches sont prises comme (1-1-1) et (1-8-1), la porosité $\alpha = 0$, le rapport d'aspect $a/b = 1$. On peut constater que la fréquence fondamentale est influencée par la variation des couches combinées, le gradient d'indice et le rapport côté-épaisseur de la plaque sandwich.

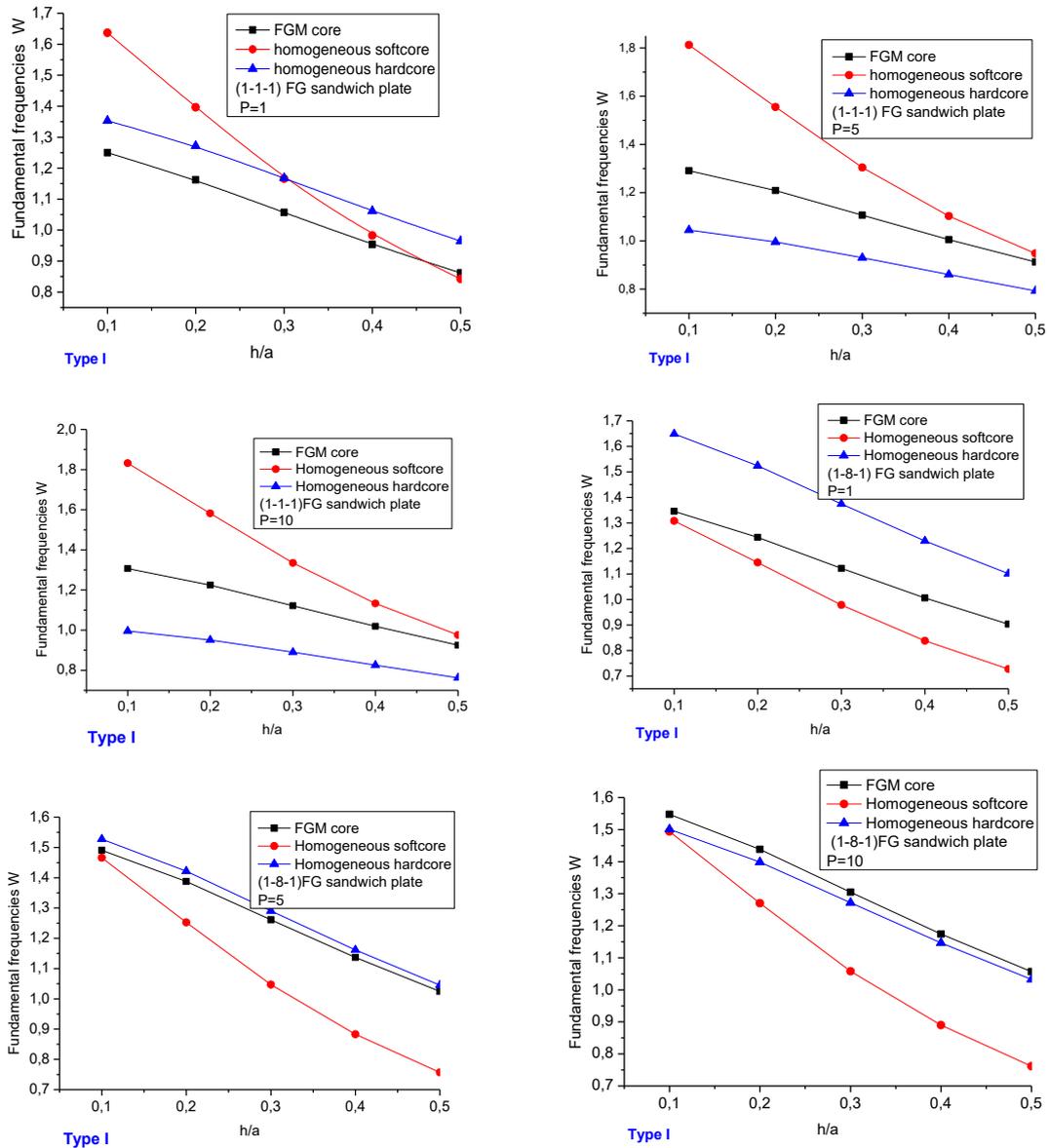


Fig. V.2 Fréquences fondamentales de trois types de plaques sandwich FGM avec différentes combinaisons de couches (1-1-1 et 1-8-1)

Dans les Fig. (V.3), (V.4) et (V.5), la relation de dispersion du taux de distribution multiple de la porosité de la plaque sandwich FGP pour deux types de combinaisons de couches et différents exposants de loi de puissance est examinée, où $a/b = 1$, $\alpha = 0,2$ pour le noyau FGM, respectivement hardcore homogène et softcore homogène. Il est clair que la variation du taux de distribution de la porosité influence les fréquences. En outre, on constate que les fréquences présentent une variation tendancielle décroissante avec l'augmentation du rapport épaisseur/longueur. L'augmentation de l'exposant de la loi de puissance entraîne une

augmentation des fréquences de la plaque sandwich FGP avec noyau FGM et noyau tendre homogène.

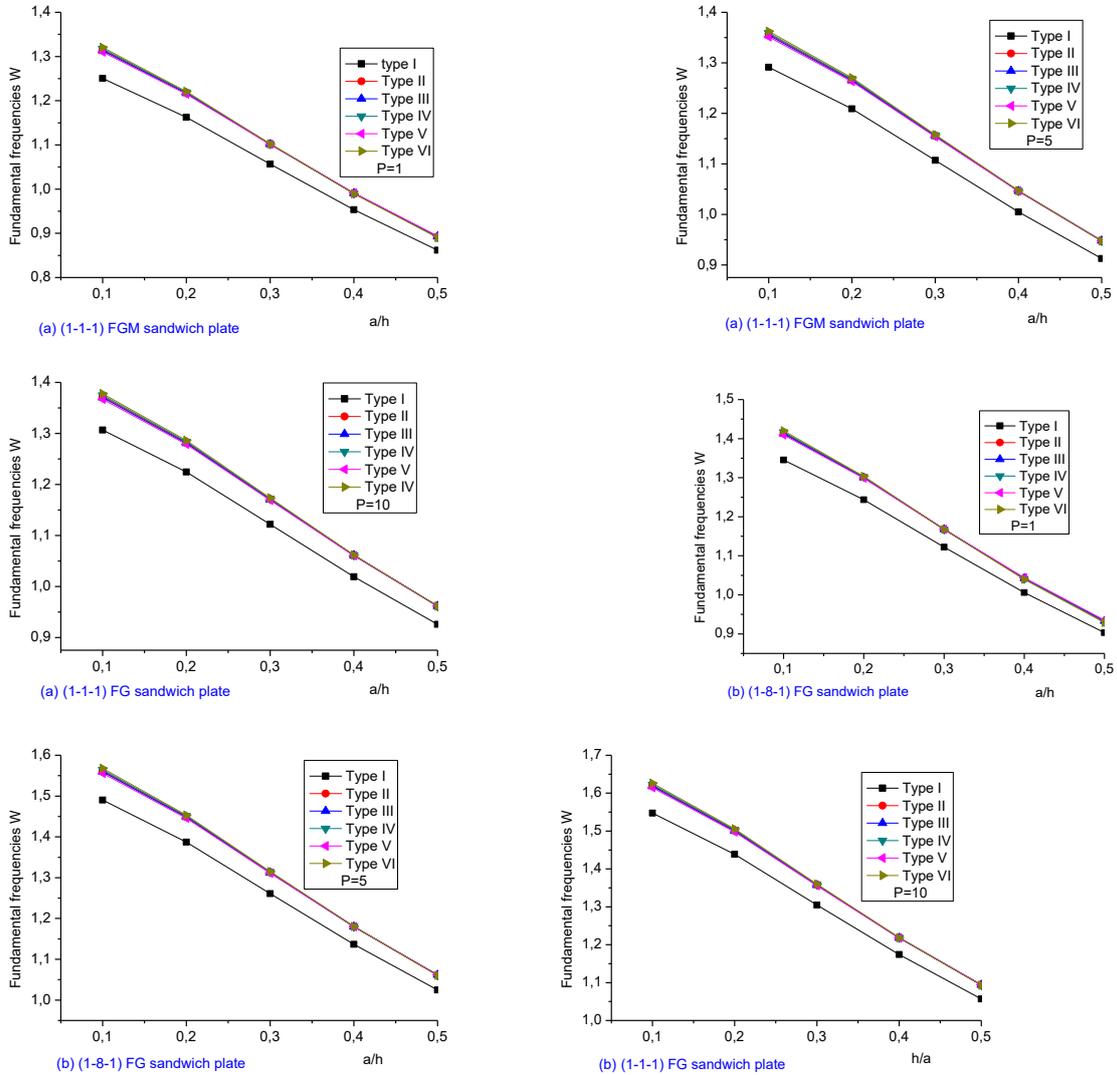


Fig. V.3 Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec âme FGM en fonction du rapport épaisseur/longueur et pour les conditions aux limites simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).

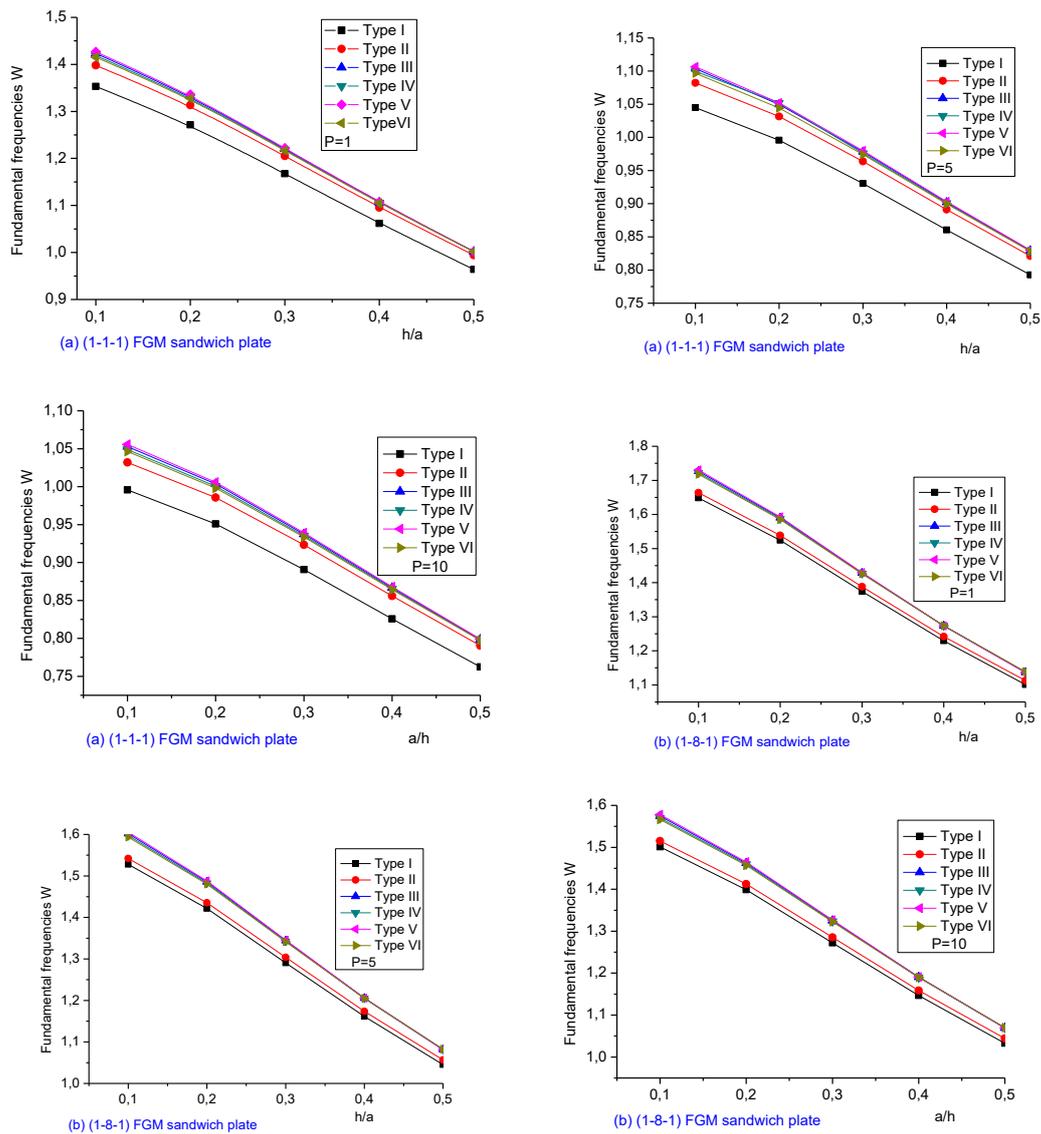


Fig. V.4 Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec noyau homogène en fonction du rapport épaisseur/longueur et pour des conditions aux limites simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich (1-8-1) FG

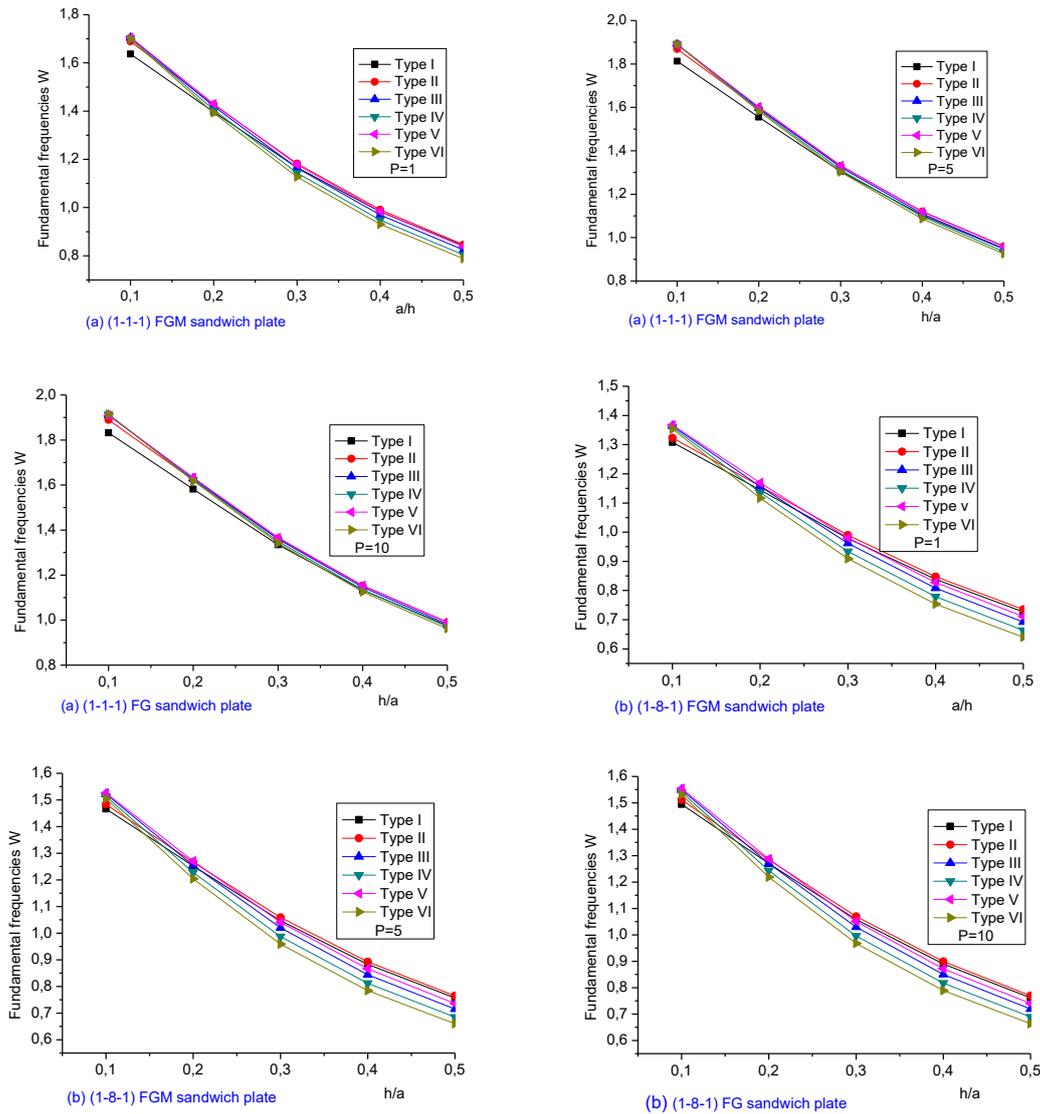


Fig. V.5 Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG à âme tendre homogène en fonction du rapport épaisseur/longueur et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich (1-8-1) FG

Figures. (V.6), (V.7) et (V.8), montrent que la fréquence fondamentale est modifiée selon trois types de plaques sandwich : noyau FGM, noyau dur homogène et noyau souple homogène, respectivement.

Ici $a/h = 10$, $P = 1, 5$ et 10 et $\alpha = 0.2$. On peut voir qu'à mesure que l'indice de loi de puissance k augmente, le paramètre de fréquence fondamentale augmente pour le noyau FGM et le noyau souple, mais il diminue pour le noyau dur homogène. Le rapport a/b de la plaque sandwich FGP affecte de manière significative la fréquence de vibration, lorsque le rapport a/b augmente, la fréquence de vibration augmente.

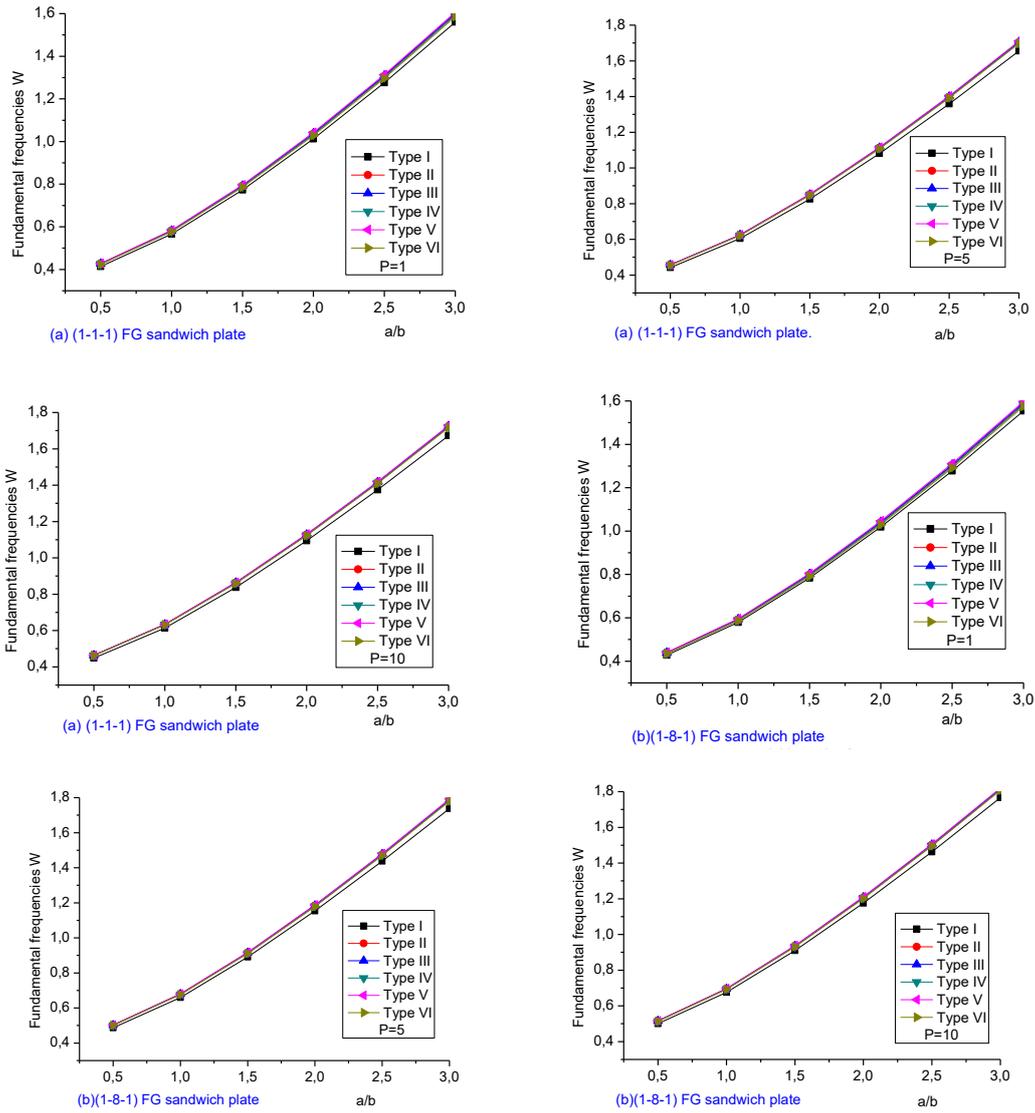


Fig. V.6 Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec âme FGM en fonction du rapport d'aspect $s = a/b$, et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1).
(b) La plaque sandwich (1-8-1) FG

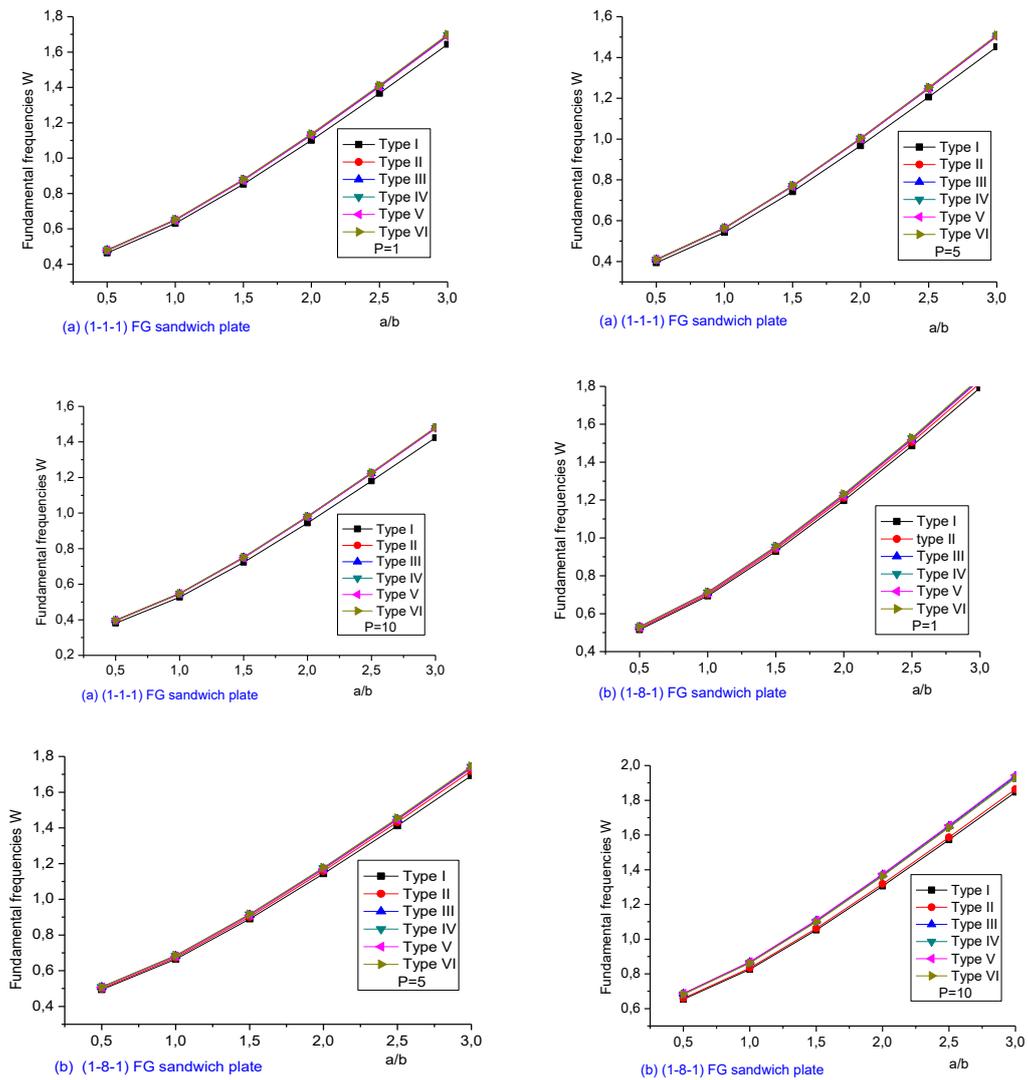


Fig. V.7 Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec noyau homogène en fonction des rapports d'aspect $s = a/b$, et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).

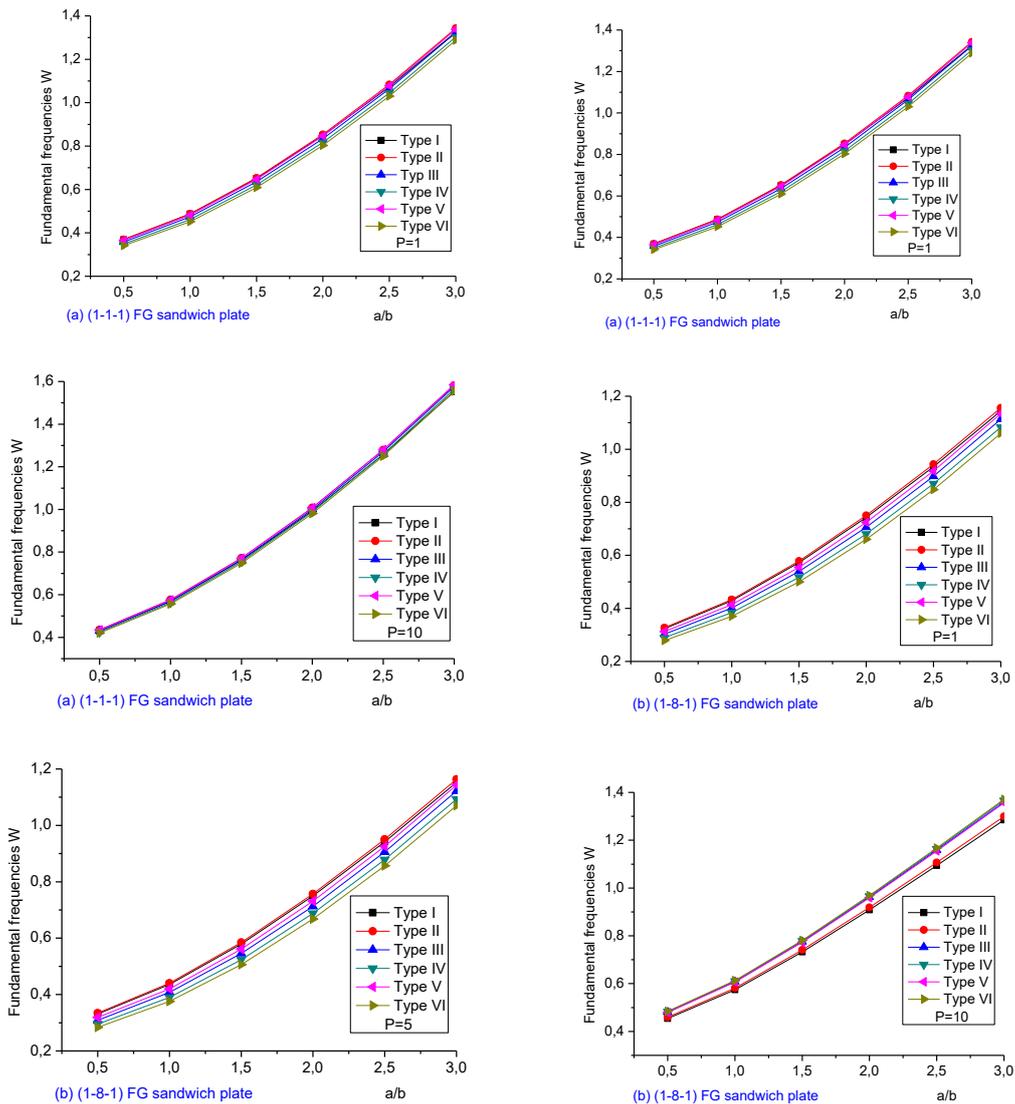


Fig. V.8 Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG à âme tendre homogène en fonction du rapport d'aspect $s = a/b$, et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).

Figures. (V.9), (V.10) et (V.11), illustrent l'effet de la variation du taux de distribution de la porosité sur la fréquence fondamentale de trois types de plaques sandwich FGP avec différentes combinaisons de couches (1-1-1, 1-8-1), respectivement.

Ici, la plaque sandwich a le rapport face sur épaisseur $a/h = 10$; rapport d'aspect $a/b = 1$, la porosité $\alpha = 0,2$. Il est clair que, par rapport aux trois types de plaque sandwich FGP, la plaque sandwich avec le noyau souple homogène (1-1-1) à une fréquence fondamentale plus élevée. Contrairement aux autres types, les fréquences de la plaque sandwich FGP avec noyau homogène diminuent avec l'augmentation de l'indice de la loi de puissance.

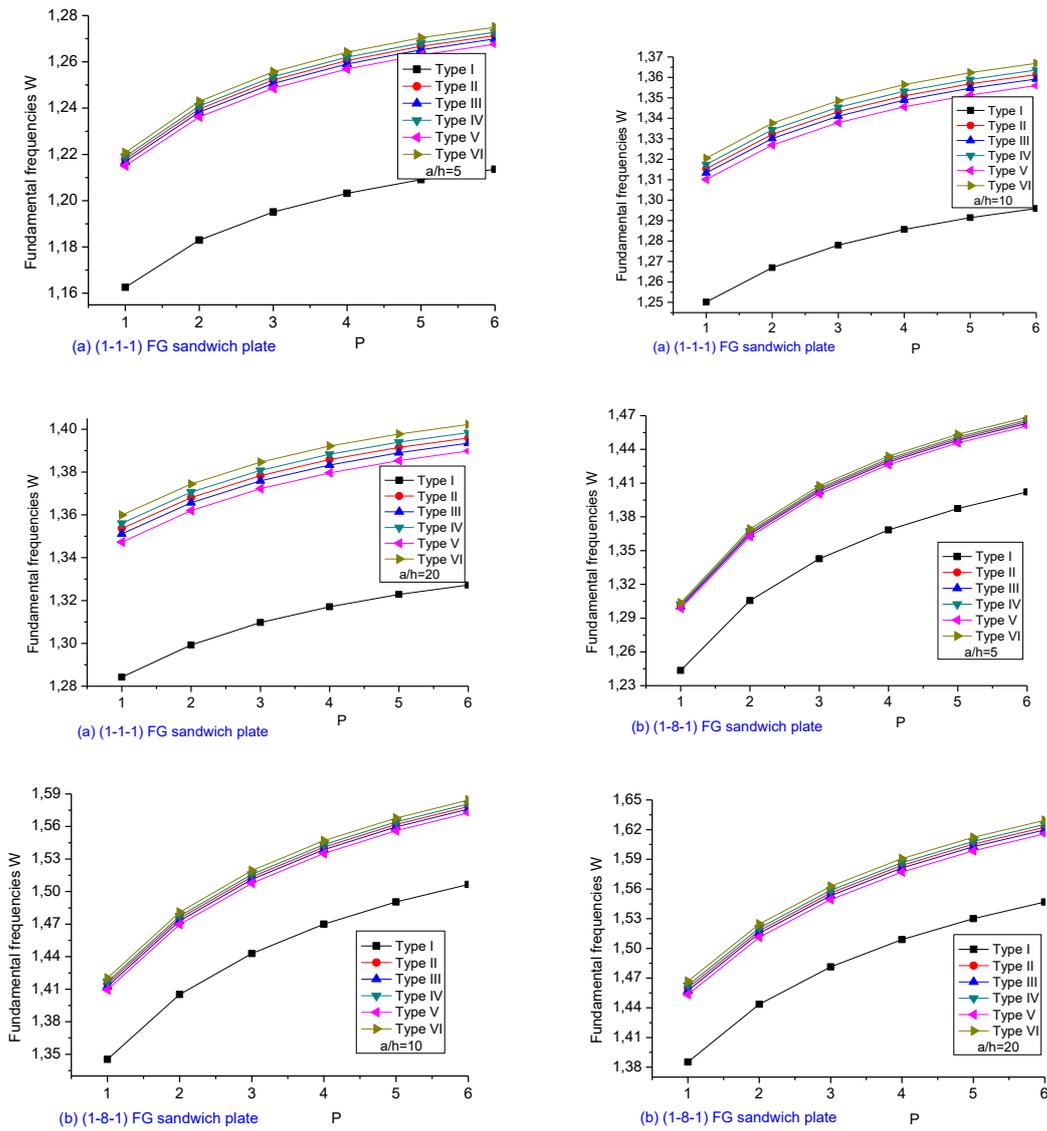


Fig. V.9 Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec FGM Core en fonction de l'indice de loi de puissance P , et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).

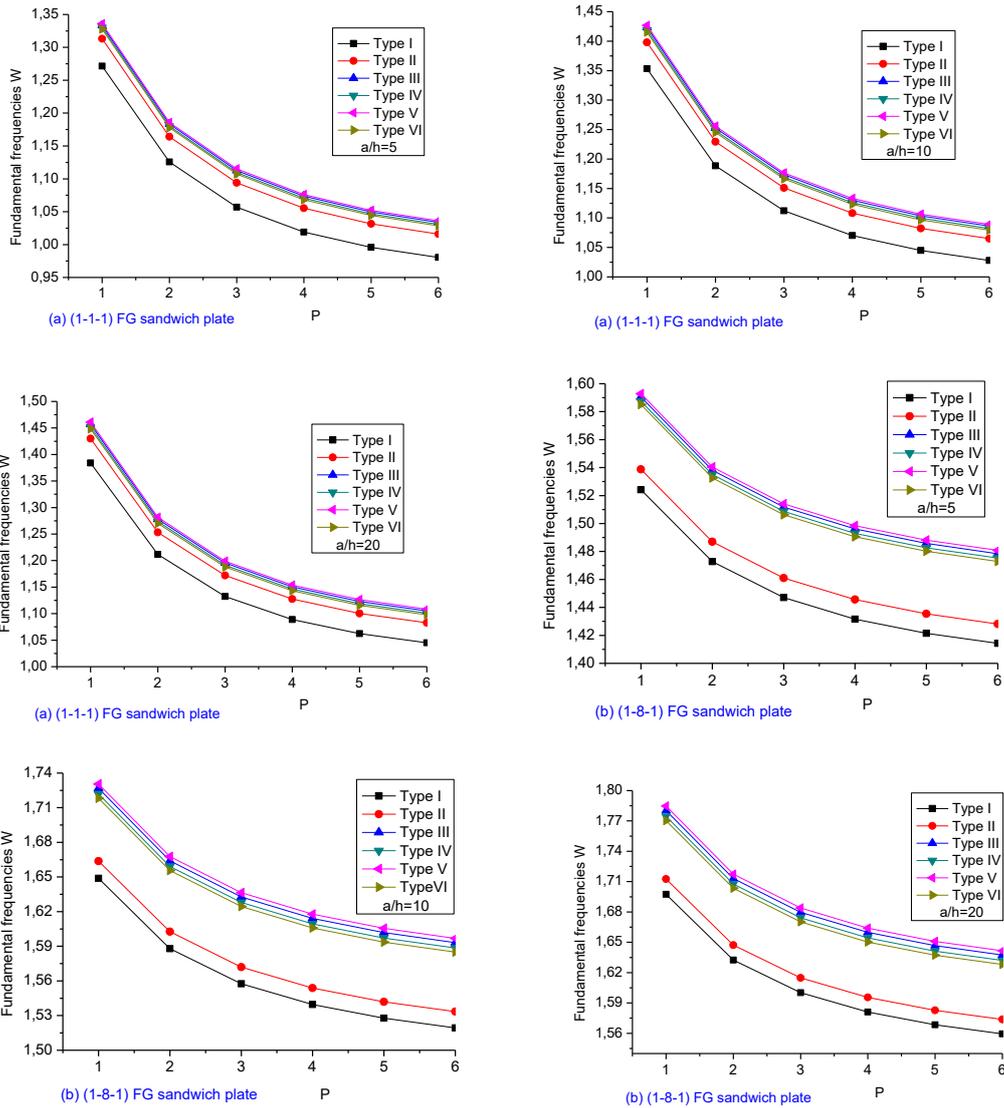


Fig. V.10 Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG avec noyau homogène en fonction de l'indice de loi de puissance P , et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).

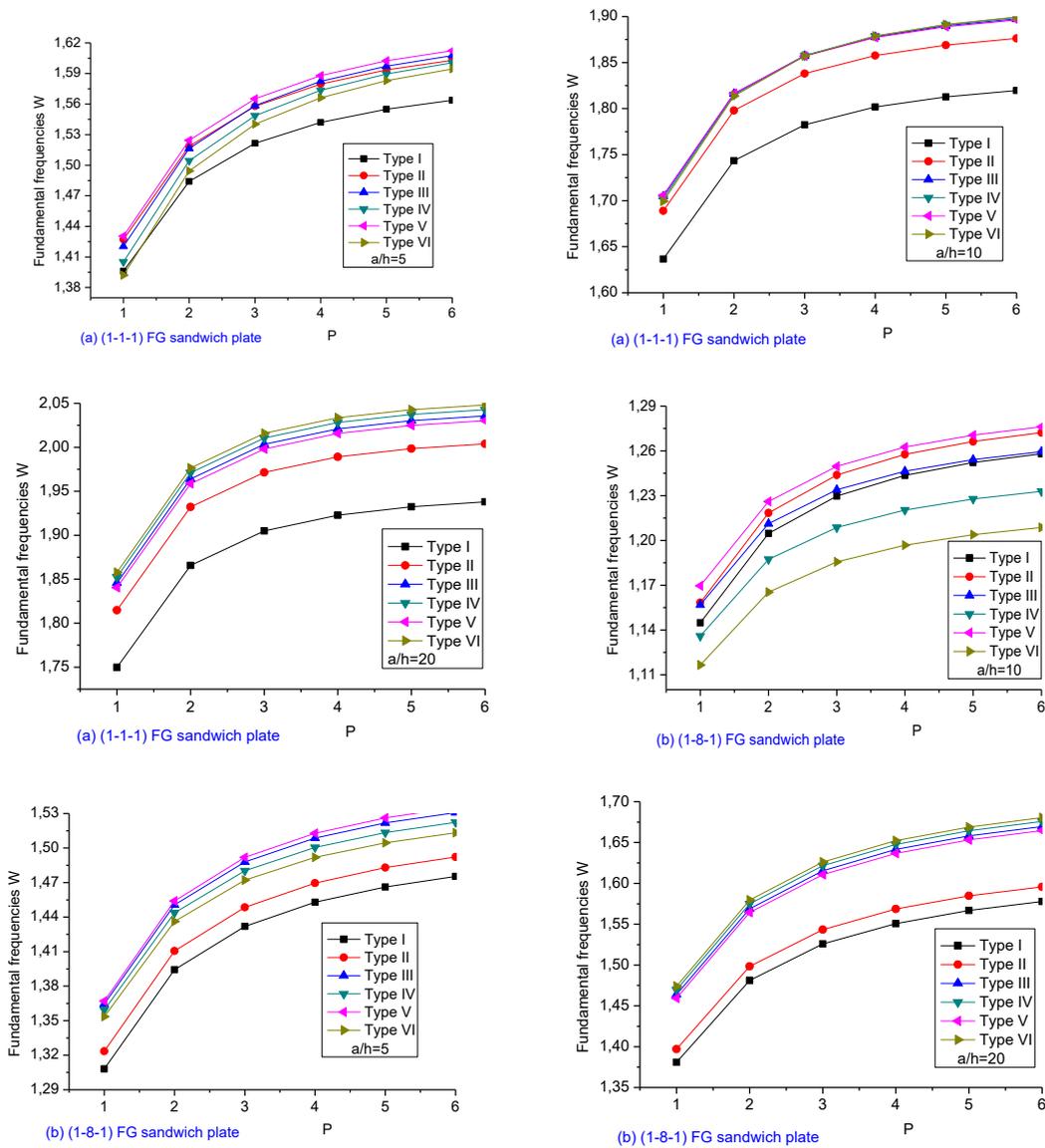


Fig. V.11 Fréquences fondamentales w pour les plaques sandwich FG à âme tendre homogène en fonction de l'indice de loi de puissance P , et pour les bords simplement appuyés. (a) La plaque sandwich FG (1-1-1). (b) La plaque sandwich FG (1-8-1).

V.4. Conclusions:

Dans ce chapitre, une analyse analytique de la vibration libre de divers types de plaques sandwich FGP basée sur la théorie des plaques de déformation par cisaillement d'ordre supérieur est établie et une fréquence pour les plaques sandwich FGP simplement supportées avec des propriétés de matériau variant de manière continue le long de l'épaisseur selon les fonctions de puissance est obtenu. La fraction volumique de porosité et la fonction d'étape sont introduites pour décrire l'effet de la variation du taux de distribution de la porosité sur la

plaque sandwich FGP. Le principe de Hamilton est utilisé pour dériver les équations gouvernantes. Les effets de l'indice de gradient, du rapport cœur sur épaisseur, des différents types de plaques sandwich et du taux de distribution de la porosité sur les fréquences fondamentales des plaques sandwich FGP sont examinés. Les résultats numériques indiquent que dans le cas considéré :

- Lorsque l'indice de la loi de puissance augmente, la plaque devient plus riche en métal et cela fait diminuer la rigidité de la plaque sandwich, ce qui conduit à une augmentation de la fréquence fondamentale des plaques sandwich FGM.
- Lorsque le h/a augmente, la rigidité des plaques sandwich FGM diminue, entraînant une diminution de la fréquence fondamentale.
- Lorsque le rapport hauteur/largeur a/b augmente, les fréquences des plaques sandwich FGP deviennent plus importantes.
- La variation du taux de distribution de la porosité influence les fréquences des plaques sandwich FGP.
- Lorsque la plaque sandwich FGP a un noyau homogène, la rigidité de la plaque sandwich diminue, ce qui entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale des plaques sandwich FGM.

*Conclusion générale et
perspective*

Avec le progrès rapide de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés dans les domaines de l'industrie, il est nécessaire de mettre en évidence des théories appropriées permettant d'analyser les plaques en FGM avec une haute précision sous les différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie.

Une nouvelle théorie raffinée de déformation par cisaillement est utilisée pour la réponse en flexion des plaques poreuses en FGM reposant sur une fondation Winkler-Pasternak. Les plaques sont soumises à des charges uniformes et sinusoïdales avec trois conditions aux limites différentes. Le présent modèle satisfait les contraintes de cisaillement nulles sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. La loi de mélange modifiée couvrant différentes variations du taux de distribution de porosité est utilisée pour décrire et approximer les propriétés matérielles des plaques FG imparfaites.

Des exemples numériques montrent que la théorie proposée donne des solutions presque identiques à celles obtenues en utilisant d'autres théories disponibles dans la littérature de déformation par cisaillement.

- la variation du taux de répartition de la porosité a un effet significatif sur la flexion et les contraintes.
- la déflexion devient plus importante lorsque le taux de porosité est plus élevé dans la céramique. La déflexion augmente lorsque le paramètre FGP augmente.
- la déflexion est maximale lorsque la distribution poreuse est de type-V.
- Avec l'augmentation du rapport côté/épaisseur a/h , une diminution de la déflexion peut être clairement observée. La plaque CCCC FG donne les plus grandes déviations tandis que la plaque SSSS FG donne les plus petites.
- la déflexion diminue à mesure que le rapport d'aspect a/b et le rapport côté sur épaisseur a/h augmentent. De plus, le cas de la plaque FG sans fondation élastique donne la plus grande déviation. Le type-V de la variation du taux de distribution de la porosité dans la plaque FG donne les plus grandes déviations tandis que le type-I donne les plus petites.
- les contraintes normales et longitudinales dans le plan sont plus importantes dans le cas d'une plaque FG sans fondation élastique. On peut également noter que la variation du taux de répartition de la porosité a un effet considérable sur ces contraintes.

- l'effet de la variation du taux de répartition de la porosité sur les contraintes devient plus important dans le cas de plaques FGM reposant sur une fondation de type Winkler ou Winkler-pasternak.

La même théorie utilisée pour étudier de manière approfondie l'analyse des vibrations libres de plaques FG poreuses simplement appuyées sur des fondations élastiques à l'aide d'une procédure analytique. De nouveau la loi de mélange modifiée couvrant différentes variations du taux de distribution de la porosité est utilisée pour décrire et approximer les propriétés matérielles des plaques FG imparfaites.

Les résultats obtenus ont indiqué les avantages d'utiliser un taux de distribution de porosité différent par rapport à une plaque traditionnelle à porosité uniforme, pour le même coefficient de porosité, les fréquences sans dimension prennent des valeurs différentes lorsque le taux de distribution de la porosité est modifié.

- les résultats actuels de la fréquence fondamentale se comparent très bien avec l'autre solution théorique pour une plaque FG parfaite.
- Il convient de noter que les résultats actuels de la fréquence fondamentale se comparent également très bien avec la solution des autres théories pour une plaque FG parfaite ($\alpha = 0$), nous pouvons donc noter que la variation du taux de distribution de la porosité a un effet significatif sur la résultats.
- On peut voir que les résultats obtenus par la théorie actuelle sont en bon accord avec la solution des autres théories pour une plaque FG parfaite (Type I, $\alpha = 0$).
- On peut voir que la fréquence fondamentale sans dimension augmente à mesure que le rapport hauteur/largeur a/b et le rapport côté/épaisseur a/h augmentent
- le cas de la plaque FG de la fondation Winkler-Pasternak et de la fondation élastique Pasternak donne la plus grande valeur de fréquence.
- Le (Type VI) de la variation du taux de distribution de la porosité dans la plaque FG donne la plus grande valeur de fréquence tandis que le (Type V) donne les plus petites.
- la fréquence fondamentale dimensionnelle diminue lorsque l'indice de loi de puissance k augmente. En même temps, nous avons remarqué que la plus grande valeur de la fréquence fondamentale peut être déterminée avec la fondation élastique de Winkler-Pasternak et la fondation élastique de Pasternak.
- La variation du taux de distribution de la porosité dans la plaque FG (Type V) donne la plus petite valeur de fréquence tandis que le (Type VI) donne les plus grandes.

Dans la dernière partie du travail, on a présenté une analyse analytique de la vibration libre de divers types de plaques sandwich FGP basée sur la théorie des plaques de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Les fréquences des plaques sandwich FGP simplement appuyées avec des propriétés de matériau variant de manière continue le long de l'épaisseur selon les fonctions de puissance sont obtenues. La fraction volumique de porosité et la fonction d'étape sont introduites pour décrire l'effet de la variation du taux de distribution de la porosité sur la plaque sandwich FGP.

Les résultats numériques indiquent que dans le cas considéré :

- Lorsque l'indice de la loi de puissance augmente, la plaque devient plus riche en métal et cela fait diminuer la rigidité de la plaque sandwich, ce qui conduit à une augmentation de la fréquence fondamentale des plaques sandwich FGM.
- Lorsque le h/a augmente, la rigidité des plaques sandwich FGM diminue, entraînant une diminution de la fréquence fondamentale.
- Lorsque le rapport hauteur/largeur a/b augmente, les fréquences des plaques sandwich FGP deviennent plus importantes.
- La variation du taux de distribution de la porosité influence les fréquences des plaques sandwich FGP.
- Lorsque la plaque sandwich FGP a un noyau homogène, la rigidité de la plaque sandwich diminue, ce qui entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale des plaques sandwich FGM.

En termes de perspectives, il est prévu d'appliquer la nouvelle théorie raffinée de déformation par cisaillement pour étudier le comportement de d'autres formes de structures en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement et des conditions d'appuis, basant toujours sur la loi de mélange modifiée.

Il serait très intéressant d'étudier l'influence de la variation du taux de distribution de la porosité sur le comportement et la stabilité des plaques sandwich en FGM au flambement thermique sous divers chargement thermique et thermomécanique.

Références Bibliographiques

- [Abdederak 2018] Abdederak R., Hassaine Daouadji T, Benferhat R. and Adim B. "Nonlinear analysis of damaged RC beams strengthened with glass fiber reinforced polymer plate under symmetric loads" *Earthquakes and Structures*, Volume 15, Number 2, pages 113-122. (2018)
- [Abdelaziz 2017] Abdelaziz et al., "An efficient hyperbolic shear deformation theory for bending, buckling and free vibration of FGM sandwich plates with various boundary conditions", *Steel and Composite Structures*, Vol. 25, No 6(2017) 693-704, (2017)
- [Abdelhak 2016] Abdelhak Z., Hadji Lazreg, Khelifa Z, Hassaine daouadji T, Adda Bedia E.A, "Analysis of buckling response of functionally graded sandwich plates using a refined shear deformation theory" *Wind and Structures*, Vol. 22 No. 3, pages 291-305. (2016)
- [Abrate 2008] Abrate et al, functionally graded plates behave like homogeneous plates, *Composites Part B* 39 (1) 151–158. (2008)
- [Abualnour 2018] Abualnour et al., "A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates", *Composite Structures*, 184, 688–697 (2018)
- [Addou 2019] Addou et al, "Influences of porosity on dynamic response of FG plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation using quasi 3D HSDT", *Computers and Concrete*, 24(4), 347- 367. (2019)
- [Adim 2018] Adim Belkacem, Hassaine Daouadji T, Rabahi A., Benhenni M., Zidour M. and Abbas B. "Mechanical buckling analysis of hybrid laminated composite plates under different boundary conditions" *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 66 No. 6, pages 761-769. (2018)
- [Ait Atmane 2010] Ait Atmane H, Tounsi A, Mechab I, Adda Bedia E.A, [Atm2010], Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory. *Int. J. Mechs. Mat. Des.* 6 113-121. (2010)
- [Ait Atmane 2015] Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F., "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations", *Int. J. Mech. Mater.*, pages 1-14. (2015)
- [Ait Atmane 2019] Ait Atmane H., Mokhtar N., Bennai R., Tounsi A. and Adda Bedia E.A (2019) "Vibration response and wave propagation in FG plates resting on elastic foundations using HSDT", *Structural Engineering and Mechanics* Volume 69, Number 5, March10 2019, pages 511-525. (2019)
- [Ait Yhia 2015] Ait Yahia, S, Ait Atmane H, Houari M.S.A. and Tounsi A., "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Struct. Eng. Mech.*, 53(6), 1143-1165. (2015)
- [Akbaş 2017] Akbaş, S.D., Thermal effects on the vibration of functionally graded deep beams with porosity, *International Journal of Applied Mechanics*, 9(5), 1750076, 2017.
- [Al-Furjan 2020a] Al-Furjan et al, "A comprehensive computational approach for nonlinear thermal instability of the electrically FG-GPLRC disk based on GDQ method", *Engineering with Computers*. (2020)

- [Al-Furjan 2020b] Al-Furjan et al, “Chaotic oscillation of a multi-scale hybrid nano-composites reinforced disk under harmonic excitation via GDQM”, *Composite Structures* (2020)
- [Alimirzaei 2019] Alimirzaei et al., "Nonlinear analysis of viscoelastic micro-composite beam with geometrical imperfection using FEM: MSGT electro-magneto-elastic bending, buckling and vibration solutions", *Structural Engineering and Mechanics*, 71(5), 485-502. (2019)
- [Ambartsumyan 1969] Ambartsumyan S.A., *Theory of anisotropic plate*,. Tech Publishing Co, 1969.
- [Ameur 2011] Ameur, M., Tounsi, A., Mechab, I. and Bedia, E. A. “A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations,” *Journal of Civil Engineering* 15, 1405–1414. (2011)
- [Amini 2009] Amini MH, SoleimaniM, Rastgoo A. Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded material plates resting on an elastic foundation. *Smart Mater Struct*;18(8):085015. 2009
- [Baferani 2011] Baferani AH, Saidi AR, Ehteshami H (2011) "Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation", *Composite Structure*; Volume 93, Issue 7, June 2011, Pages 1842-1853. (2011)
- [Balubaid 2019] Balubaid et al, "Free vibration investigation of FG nanoscale plate using nonlocal two variables integral refined plate theory", *Computers and Concrete*, 24(6), 579-586. (2019)
- [Batra 2004] Batra RC, Vel SS, "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration* 272(3-5):703-730 · May 2004.
- [Bekki 2019] Bekki et al. "Influence of the distribution shape of porosity on the bending FGM new plate model resting on elastic foundations". *Structural Engineering and Mechanics* Volume 72, Number 1, pp 823-832. (2019)
- [Belabed 2014] Belabed Z, Houari MSA, Tounsi A, Mahmoud SR "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Composites: Part B* 60: 274–283. (2014)
- [Belabed 2018] Belabed et al., "A new 3-unknown hyperbolic shear deformation theory for vibration of functionally graded sandwich plate", *Earthquakes and Structures*, Vol. 14, No. 2 (2018) 103-115. (2018)
- [Belkacem 2016] Belkacem A., Hassaine Daouadji T. "Effects of thickness stretching in FGM plates using a quasi-3D higher order shear deformation theory", *Advances in Materials Research*, Vol. 5, No. 4 (2016) 223-244. (2016)
- [Bellal 2020] Bellal et al., “Buckling behavior of a single-layered graphene sheet resting on viscoelastic medium via nonlocal four-unknown integral model”, *Steel and Composite Structures*, 34(5), 643-655. (2020)

- [Benchohra 2018] Benchohra et al, "A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 65, No. 1 (2018) 19-31. (2018)
- [Benferhat 2016 c] Benferhat Rabia, Hassaine Daouadji Tahar, Mohamed Said Mansour and Lazreg Hadji, "Effect of porosity on the bending and free vibration response of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak foundations" *Earthquakes and Structures, An Int'l Journal* Vol. 10 No. 5, 2016 pages 1429-1449. (2016)
- [Benferhat 2016] Benferhat Rabia, Tahar Hassaine Daouadji, Lazreg Hadji, and Mohamed Said Mansour "Static analysis of the FGM plate with porosities", *Steel and Composite Structures, An Int'l Journal* Vol. 21 No. 1, pages 123-136. (2016)
- [Benferhat 2018] Benferhat R., Rabahi A., Hassaine Daouadji T., Boussad A., Adim B. "Analytical analysis of the interfacial shear stress in RC beams strengthened with prestressed exponentially-varying properties plate" *Advances in Materials Research*, Volume 7, Number 1, pages 29-44. (2018)
- [Benferhat 2019] Benferhat Rabia et al. (2019) "Effect of distribution shape of the porosity on the interfacial stresses of the FGM beam strengthened with FRP plate" *Earthquakes and Structures*, Vol 16, No 5 (2019), 601-609.
- [Benhenni 2018] Benhenni Mohamed Amine, Hassaine Daouadji Tahar, Boussad Abbes, Belkacem Adim, Yuming Li and Fazilay Abbes, "Dynamic analysis for anti-symmetric cross-ply and angle-ply laminates for simply supported thick hybrid rectangular plates" *Advances in Materials Research*, Vol. 7 No. 2 83-103. (2018)
- [Benhenni 2019] Benhenni Mohamed Amine, Adim Belkacem, Hassaine Daouadji Tahar, Abbes Boussad, Fazilay Abbes, Yuming Li and Bouzidene Ahmed "A comparison of closed form and finite element solutions for the free vibration of hybrid cross ply laminated plates" *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 55, No. 2. (2019)
- [Benhenni 2019] Benhenni M. A., Hassaine Daouadji T., B. Abbes, F. Abbes, Yuming Li, B. Adim, "Numerical analysis for free vibration of hybrid laminated composite plates for different boundary conditions" *Structural Engineering and Mechanics* Volume 70, Number 5, pages 535-549. (2019)
- [Bensattalah 2016] Bensattalah T, Hassaine Daouadji T, Zidour M, Tounsi, Adda Bedia A, "Investigation of thermal and chirality effects on vibration of single walled carbon nanotubes embedded in a polymeric matrix using nonlocal elasticity theories" *Mechanics of Composite Materials*, Volume 52, Issue 4, pp 555–568. (2016)
- [Bensattalah 2018] Bensattalah T, Zidour M and Hassaine Daouadji T "Analytical analysis for the forced vibration of CNT surrounding elastic medium including thermal effect using nonlocal Euler-Bernoulli theory" *Advances in Materials Research*, Vol.7 No. 3 163-174. (2018)
- [Bensattalah 2018] Boukhlif et al. (2019), "A simple quasi-3D HSDT for the dynamics analysis of FG thick plate on elastic foundation", *Steel and Composite Structures*, 31(5), 503-516.

- [Bensattalah 2020] Bensattalah Tayeb and Hassaine Daouadji Tahar "Improved analytical solution for slip and interfacial stress in composite steel-concrete beam bonded with an adhesive" *Advances in Materials Research* Volume 9, Number 2, pages 133-153. (2020)
- [Benyoucef 2010] Benyoucef S, Mechab I, Tounsi A, Fekrar A, Ait Atmane H, Adda Bedia E.A, [Ben2010] Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations. *Mech. Comp. Mat.* 46 425-434. (2010)
- [Benyoucef 2016] Benyoucef S., Mouaici F., Ait Atmane H., and Tounsi A. "Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory", *Wind and Structures*, Volume 22, Number 4, pages 429-454. (2016)
- [Berghouti 2019] Berghouti et al., "Vibration analysis of nonlocal porous nanobeams made of functionally graded material", *Advances in Nano Research*, 7(5), 351-364. (2019)
- [Bhimaraddi 1984] Bhimaraddi A., Stevens L., A higher order theory for free vibration of orthotropic, homogeneous, and laminated rectangular plates. *ASME J. Appl. Mech.* 51 (1984), 195–198.
- [Birman 2007] Birman V, Larry W. B, Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures. *Appl. Mech. Rev.*, 60(5): 195-216 (22 pages), Sep 2007
- [Bouakaz 2014] Bouakaz K., Hassaine Daouadji T, Meftah S.A, Ameer M, "A Numerical analysis of steel beams strengthened with composite materials", *Mechanics of Composite Materials*, vol 50, N°4, pp 685-696. (2014)
- [Bouaziz 2011] Bouaziz, O, "Potentiel des matériaux à gradient de propriétés pour applications nucléaires", 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre, (2011).
- [Boulefrakh 2019] Boulefrakh et al., "The effect of parameters of visco-Pasternak foundation on the bending and vibration properties of a thick FG plate", *Geomechanics and Engineering*, 18(2), 161-178. (2019)
- [Bourada 2019] Bourada et al., "Dynamic investigation of porous functionally graded beam using a sinusoidal shear deformation theory", *Wind and Structures*, 28(1), 19-30. (2019)
- [Bourada 2020] Bourada et al., "Stability and dynamic analyses of SW-CNT reinforced concrete beam resting on elastic-foundation" *Computers and Concrete* Volume 25, Number 6, pp 485-495(2020)
- [Bousahla 2020] Bousahla et al., "Buckling and dynamic behavior of the simply supported CNT-RC beams using an integral-first shear deformation theory", *Computers and Concrete*, 25(2), 155-166. (2020)
- [Carrera 2003] Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Arch. Comp. Meth. Eng.* 10 215-296. (2003)
- [Carrera 2009] Carrera E, Ciuffreda A. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Compos. Struct.* 69 271-293. (2005)

- [Carrera 2011] Carrera E. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Appl. Mech. Revs.* 54 301-329. (2001)
- [Carrera 2011] Carrera E., Brischetto S., Cinefra M. and Soave M.. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells, *Composites Part B* 42 pp 123–133. (2011)
- [Carrera 2011b] Carrera E, S. Brischetto, P. Nali. *Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*, Wiley, New York, USA (2011).
- [Chaabane 2019] Chaabane et al., "Analytical study of bending and free vibration responses of functionally graded beams resting on elastic foundation", *Structural Engineering and Mechanics*, 71(2), 185-196(2019)
- [Chaded 2018] Chaded A., T. Hassaine Daouadji, Rabahi A., Adim B., Benferhat R., and Fazilay A. "A high-order closed-form solution for interfacial stresses in externally sandwich FGM plated RC beams", *Advances in Materials Research*, vol. 6 no. 4 pp 317-328. (2018)
- [Chergui 2019] Chergui S., Hassaine Daouadji T, Mostefa H., Bougara A, Abbes B and Amziane S "Interfacial stresses in damaged RC beams strengthened by externally bonded prestressed GFRP laminate plate: Analytical and numerical study " *Advances in Materials Research*; Volume 8, Number 3, pages 197-217. (2019)
- [Chikr 2020] Chikr et al, "A novel four-unknown integral model for buckling response of FG sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions using Galerkin's approach", *Geomechanics and Engineering*, 21(5), 471-487. (2020)
- [Cooke 1983] Cooke D.W and Levinson, M. , Thick rectangular plates-II, the generalized Lévy solution, *Int. J. Mech. Sci.* 25 (1983) 207–215. (1983)
- [Daikh 2019] Daikh, A.A., and Zenkour, A.M., Effect of porosity on the bending analysis of various functionally graded sandwich plates, *Materials Research Express*, 6(6), 065703, 2019.
- [Della 2004] Della Croce L, Venini P, Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193 (2004) 705–725.
- [Delale 1983] Delale. F, Erdogan. F., The crack problem for a non homogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614. (1983)
- [Demasi2009a] L. Demasi. Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: Governing equations. *Compos. Struct.* 87 1-11. (2009)
- [Demasi2009b] Demasi L.. Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part III: Advanced mixed high order shear deformation theories. *Compos. Struct.* 87 183-194. (2009)
- [Demasi2009c] Demasi L. Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part IV: Zig-zag theories. *Compos. Struct.* 87 195-205. (2009)

- [Demasi2009d] Demasi L.. Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part V: Results. *Compos. Struct.* 88 1-16. (2009)
- [Demasi 2009e] Demasi L. Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation.: Part II: Layerwise theories. *Compos. Struct.* 87. 12-22 (2009).
- [Demirhan 2019] Demirhan PA, Taskin V. "Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach", *Composites Part B: Engineering.* 2019;160:661-76. (2019)
- [Dozio 2013] Dozio Lorenzo, Natural frequencies of sandwich plates with FGM core via variable-kinematic 2-D Ritz models. *Composite Structures*, Volume 96, February 2013, Pages 561-568. 2013
- [Draiche 2019] Draiche et al., "Static analysis of laminated reinforced composite plates using a simple first-order shear deformation theory", *Computers and Concrete*, 24(4), 369-378, (2019)
- [El-Haina 2017] El-Haina et al., "A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates", *Struct. Eng. Mech.*, 63(5), 585-595. (2017)
- [Fares 2013] Fares ME, Elmarghany M. Kh [Far2008]. A refined zigzag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plates. *Compos Struct*;82(1):71–83. (2008)
- [Fazzolari 2013] Fazzolari F.A, Carrera E.. Free vibration analysis of sandwich plates with anisotropic face sheets in thermal environment by using the hierarchical trigonometric Ritz formulation, *Composites Part B Engineering*, 50 67-81. (2013)
- [Feldman 1997] Feldman et Aboudi, Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading, *Compos. Struct.* 38 (1-4) 29–36(1997)
- [Ferguen 2011] Ferguen N, Emmanuel B, Mohamed G, Claudia C, Christian, C, Olivier R., « Matériaux composites alumine/aluminium à gradient de fonction: modélisation numérique pour le calcul de la conductivité thermique effective », 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre, (2011).
- [Guang 2008] Guang D.Z, Zhou Y.H. "A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface", *Computational Materials Science* Volume 44, Issue 2, pages 716-720. (2008)
- [Hamrat 2020] Hamrat Mostefa et al. "Experimental and numerical investigation on the deflection behavior of pre-cracked and repaired reinforced concrete beams with fiber-reinforced polymer" *Construction and Building Materials* Volume 249, 20 July 2020, 118745 pp1-13. (2020)
- [Hassaine Daouadji 2013] Hassaine Daouadji T. "Analytical Analysis of the Interfacial Stress in Damaged Reinforced Concrete Beams Strengthened by Bonded Composite Plates" *strength of materials*, volume 45, issue5, pp 587-597. (2013)
- [Hassaine Daouadji] Hassaine Daouadji Tahar, Rabia Benferhat, Adim Belkacem (2016) "Bending

- 2016] analysis of an imperfect advanced composite plates resting on the elastic foundations", *Coupled Systems Mechanics*, Vol. 5, No. 3 pp 269-285. (2016)
- [Hassaine Daouadji 2016] Hassaine Tahar D, Adim B, Benferhat R, "Bending analysis of an imperfect FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading with analytical validation" *Advances in Materials Research*, Vol. 5, No. 1 35-53. (2016)
- [Hassaine Daouadji 2016a] Hassaine Daouadji Tahar., Adim B. (2016a) "An analytical approach for buckling of functionally graded plates", *Advances in Materials Research*, Vol. 5, No. 3 141-169. (2016)
- [Hassaine Daouadji 2016b] Hassaine Daouadji Tahar, Adim B. "Theoretical analysis of composite beams under uniformly distributed load", *Advances in Materials Research*, Vol. 5, No. 1 pages 001-009. (2016b)
- [Hassaine Daouadji 2017] Hassaine Daouadji T. "Analytical and numerical modeling of interfacial stresses in beams bonded with a thin plate", *Advances in Computational Design*, Vol. 2, No. 1 pp 57-69. (2017)
- [Hassaine Daouadji 2019] Hassaine Daouadji T., Rabahi A., Benferhat R. and Adim B. "Flexural behaviour of steel beams reinforced by carbon fibre reinforced polymer: Experimental and numerical study" *Structural Engineering and Mechanics* Vol. 72, No. 4 pp 409-419. (2019)
- [Hassaine Daouadji 2020] Hassaine Daouadji Tahar, Rabahi Abderezak and Benferhat Rabia "Flexural performance of wooden beams strengthened by composite plate", *Structural Monitoring and Maintenance* Volume 7, Number 3, September 2020, pages 233-259, (2020)
- [Hellal 2019] Hellal, H., Bourada, M., Hebali, H., Bourada, F., Tounsi, A., Bousahla, A.A., Mahmoud, S.R., Dynamic and stability analysis of functionally graded material sandwich plates in hygro-thermal environment using a simple higher shear deformation theory, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, (2019).
- [Hosseini-Hashemi 2011a] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure", *Composite Structures* Volume 93, Issue 2, January 2011, Pages 722-735, (2011a)
- [Hosseini-Hashemi 2011b] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner- Mindlin functionally graded rectangular plates", *International Journal of Mechanical Sciences* Volume 53, Issue 1, pages 11-22, (2011b)
- [Houari 2011] Houari et al. Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates, *J. Thermal Stresses* 34 315 – 334. (2011)
- [Huang 2008] Huang Z.Y, Lu C.F, Chen W.Q, Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler Pasternak elastic foundations, *Compos. Struct.* 85 (95) 104, (2008)
- [Huang 2012] Huang C.S, Yang P.J, Chang M.J (2012) "Three-dimensional vibration analyses of functionally graded material rectangular plates with through internal cracks",

- Composite Structures; 94: 2764–2776. (2012)
- [Hui 2004] Hui-ShenShen, Xiao-Lin Huang. Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments. *International Journal of Solids and Structures*. Volume 41, Issues 9–10, Pages 2403-2427, May 2004
- [Hui 2009] Hui-Shen Shen, A comparison of post-buckling behavior for FGM cylindrical shells with piezoelectric fiber reinforced composite actuators- *Journal of engineering materials and Technology.*, 131(3): 031010 (11 pages) Jul 2009
- [Jha 2013] Jha D.K., Tarun Kant, R.K. Singh, A critical review of recent research on functionally graded plates , *Compos. Struct.* 96 833–849 (2013)
- [Jin 1996] Jin Z. H, Batra R. C. Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials, *Journal of Thermal Stresses* 19, 317–339. (1996)
- [Jinhao 2003] Jinhao Qiu et al. Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators. *Smart Materials and Structures*, Volume 12, Number 1. (2003)
- [Kaci 2020] Kaci A, Kaddari M, Bousahla A, Tounsi A, Bourada F, Adda Bedia E.A and Al-Osta M. A. "A study on the structural behaviour of functionally graded porous plates on elastic foundation using a new quasi-3D model: Bending and Free vibration analysis", *Computers and Concrete*, 25(1), 37-57. (2020)
- [Kaddari 2020] Kaddari et al., “A study on the structural behaviour of functionally graded porous plates on elastic foundation using a new quasi-3D model: Bending and Free vibration analysis”, *Computers and Concrete*, 25(1), 37-57. (2020)
- [Kant 1988] Kant T, Pandya B, A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates. *Compos. Struct.* 9 215–246. (1988)
- [Kant1997] Kant T, Khare R.K., A higher-order facet quadrilateral composite shell element. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 40 4477–4499. (1997)
- [Karama 2003] Karama, M., Afaq, K.S. and Mistou, S., “Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *Int. J. Solids Struct.*, 40(6), 1525-1546. (2003)
- [Karamanli 2017] Karamanli, A., Bending behaviour of two directional functionally graded sandwich beams by using a quasi-3d shear deformation theory, *Composite Structures*, 174, 70–86, 2017.
- [Karami 2019] Karami et al., “Galerkin’s approach for buckling analysis of functionally graded anisotropic nanoplates/different boundary conditions”, *Engineering with Computers*, 35, 1297-1316. (2019)
- [Kerr 1964] Kerr A.D. "Elastic and viscoelastic foundation models", *ASME J. Appl. Mech.* 31(3) pages 491–498. (1964)
- [Khalifa 2018] Khalifa Z., L. Hadji, Hassaine Daouadji T., Bourada M. "Buckling response with stretching effect of carbon nanotube-reinforced composite beams resting

- on elastic foundation" *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 67 No. 2, pages 125-130. (2018)
- [Koizumi 1992] Koizumi M, Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, (1992).
- [Koizumi 1997] Koizumi M. "FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry". Ryukoku University, Ohtsu 520-21. Japan, (1997)
- [Kokini 1990] Kokini K, Takeuchi Y, Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, (1990)
- [Lal 2015] Lal R, Ahlawat N "Axisymmetric vibrations and buckling analysis of functionally graded circular plates via differential transform method", *European Journal of Mechanics A/Solids* 2015; 52: 85-94. (2015)
- [Lee 2002] Lee K.H, Lim, G.T. and Wang, C.M., Thick Lévy plates re-visited, *Int. J. Solids Struct.* 39 pages 127–144, (2002)
- [Levinson1980] Levinson M., An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates,. *Mechanics Research Communication*, vol. 7, pages 343-50, (1980).
- [Li 2003] Li S.L, Qing J.Z, Peng C.Z . The Optimization Design on Metal/Ceramic FGM Armor with Neural Net and Conjugate Gradient Method. *Materials Science Forum* (Volumes 423-425), 791-796. (2003)
- [Li 2014] Li X, Zhang J and Zheng Y. "Static and free vibration analysis of laminated composite plates using isogeometric approach based on the third order shear deformation theory." *Hindawi Publishing Corporation Advances in Mechanical Engineering* 1-16, (2014).
- [Li 2016] Li L, Zhang D.G "Free vibration analysis of rotating functionally graded rectangular plates", *Composite Structures*; 136: 493–504. (2016)
- [Li2008] Li Q et al. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib*;311(1–2):498–515. (2008)
- [Lo1977] Lo K.H, Christensen R.M, Wu E.M., A high-order theory of plate deformation-Part 2: Laminated plates. *ASME J. Appl. Mech.* 44 669-674. (1977)
- [Mahdavian 2009] Mahdavian, Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading, *J. Solid Mech.* 1 (3) 213–225. (2009)
- [Malekzadeh 2009] Malekzadeh P. Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct*; 89(3):367–73. (2009)
- [Mantari 2012] Mantari J.L, Guedes Soares C. Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Compos. Struct.* 94,1991-2000. (2012)
- [Mantari 2012a] Mantari J. L, Oktem A. S, and Guedes Soares C. "A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates"

- International Journal of Solids and Structures, 49, 43-53” (2012)
- [Mantari 2012b] Mantari J.L, Guedes Soares C. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos. Struct.* 94 2561-2575. (2012)
- [Mantari 2013a] Mantari J.L, Guedes Soares C.. A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Comp. Part B: Eng.* 45, 268 – 281. (2013)
- [Mantari 2013b] Mantari J.L, Guedes Soares C.. Finite element formulation of a generalized higher order shear deformation theory for advanced composite plates. *Composite Structures*96 545–553. (2013)
- [Matouk 2020] Matouk et al., “Investigation on hygro-thermal vibration of P-FG and symmetric S-FG nanobeam using integral Timoshenko beam theory”, *Advances in Nano Research*, 8(4), 293-305. (2020)
- [Matsunaga 2008] Matsunaga H, "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory", *Composite Structures* 82(4):499-512 · February 2008. (2008)
- [Matsunaga 2009] Matsunaga H. Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings. *Compos. Struct.* 87 344-357. (2009)
- [Medani 2019] Medani et al., “Static and dynamic behavior of (FG-CNT) reinforced porous sandwich plate using energy principle”, *Steel and Composite Structures*, 32(5), 595-610. (2019)
- [Meksi 2019] Meksi R, , Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates, *J. Sandw .Struct.Mater.*, 21(2), 727-757, (2019).
- [Mena 2012] Mena R, Tounsi A, Mouaici F, Mechab I, Zidi M, Adda Bedia E.A. [Men2012], Analytical solutions for static shear correction factor of functionally graded rectangular beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 19 641–652. (2012)
- [Menasria 2020] Menasria et al., “A four-unknown refined plate theory for dynamic analysis of FG-sandwich plates under various boundary conditions”, *Steel and Composite Structures*, 36(3), 355-367. (2020)
- [Mindlin 1951] Mindlin R.D. [Mind1951], Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *ASME J Appl Mech* 18 31–38. (1951)
- [Mohammadi 2010] Mohammadi et al., Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates, *Appl. Compos. Mater.* 17 (2) 81–93. (2010)
- [Mokhtar 2018] Mokhtar et al., "A novel shear deformation theory for buckling analysis of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity theory", *Smart Structures Systems*, Vol. 21, No. 4: 397-405. (2018)
- [Moradi 2012] Moradi S, Mansouri M.H. Thermal buckling analysis of shear deformable

- laminated orthotropic plates by differential quadrature. *Steel Compos Struct* 12 129-147. (2012)
- [Müller 2003] Müller E, Drašar C, Schilz J and Kaysser W.A, “Functionally graded materials for sensor and energy applications,” *Materials Science and Engineering: A*, vol. 362, pp. 17-30, (2003).
- [Murthy 1981] Murthy M.V.V, An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate, *Rapport technique*, NASA, (1981).
- [Natarajan 2012] Natarajan S, Ganapathi Manickam, Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory, *Finite Elements in Analysis and Design* 57 (32–42), (2012).
- [Nelson1974] Nelson B., Lorch D.R, A refined theory for laminated orthotropic plates. *ASME J. Appl. Mech.* 41 177-184. (1974)
- [Neves 2012a] Neves A.M.A, Ferreira A.J.M, Carrera E, Roque C.M.C, Cinefra M, Jorge R.M.N et al. A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Comp. Part B: Eng.* 43 711-725. (2012)
- [Neves 2012b] Neves A.M.A., A.J.M. Ferreira, E. Carrera, C.M.C. Roque, M. Cinefra, R.M.N. Jorge et al. A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates, *Compos. Struct.* 94 1814-1825. (2012)
- [Neves2013] Neves A.M.A, Ferreira A.J.M, Carrera E, Cinefra M, Roque C.M.C, Jorge R.M.N et al. Static, free vibration and buckling analysis of isotropic and sandwich functionally graded plates using a quasi-3D higher-order shear deformation theory and a meshless technique. *Comp. Part B: Eng.* 44 657-674. (2013)
- [Nguyen 2007] Nguyen et al “Shear Correction Factors for Functionally Graded Plates”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures* Volume 14, (2007)
- [Nguyen 2013] Nguyen-Xuan H., , An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates, *Finite Elements in Analysis and Design*, 73, 65-76. (2013)
- [Okamura 1991] Okamura H, State of the art of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9,(1991).
- [Panc 1975] Panc V, *Theories of elastic plates*,. Noordhoff, Leyden, Netherlands, (1975)
- [Parandvar 2015] Parandvar H, Farid M. "Nonlinear reduced order modeling of functionally graded plates subjected to random load in thermal environment",. *Composite Structures* 126: 174–183. (2015)
- [Parandvar 2016] Parandvar H, Farid M. "Large amplitude vibration of FGM plates in thermal environment subjected to simultaneously static pressure and harmonic force using multimodal FEM", *Composite Structures* 2016; Volume 141, 1 pages 163-171(2016)

- [Qian 2004] Qian L.F, Batra R.C, Chen L.M. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Comp. Part B: Eng.* 35 685-697. (2004)
- [Rabahi 2016] Rabahi A, Hassaine Daouadji T, Abbes B, Adim B "Analytical and numerical solution of the interfacial stress in reinforced-concrete beams reinforced with bonded prestressed composite plate", *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 2016, Vol. 35(3) 258–272. (2016)
- [Rabahi 2019] Rabahi A., Benferhat R, Hassaine Daouadji T, "Elastic analysis of interfacial stresses in prestressed PFGM-RC hybrid beams" *Advances in Materials Research*, vol. 7 no. 2 83-103. (2019)
- [Rabahi 2020] Rabahi A, Hassaine Daouadji T and Benferhat R. "Analysis of interfacial stresses of the reinforced concrete foundation beams repairing with composite materials plate", *Coupled Systems Mechanics* Volume 9, Number 5, October 2020, pages 473-498.(2020)
- [Rabhi 2020] Rabhi et al., "A new innovative 3-unknowns HSDT for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions", *Geomechanics and Engineering*, 22(2). 119-132. (2020)
- [Rahmani 2020] Rahmani et al., "Influence of boundary conditions on the bending and free vibration behavior of FGM sandwich plates using a four-unknown refined integral plate theory", *Computers and Concrete*, 25(3), 225-244. (2020)
- [Ramu 2014] Ramu I, Mohanty SC. "Modal analysis of Functionally Graded material Plates using Finite Element Method", *Procedia Materials Science* 2014; 6: 460 – 467. (2014)
- [Rashidi 2012] Rashidi M.M, Shooshtari A and Anwar Béğ O., Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Kármán rectangular plates, *Computers and Structures*, 106/107, (2012)
- [Reddy 1984] Reddy J.N, A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME J. Appl. Mech.* 51 745 – 752. (1984)
- [Reddy 1998] Reddy J.N, Praveen G.N., "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates", *International Journal of Solids and Structures* Volume 35, Issue 33, November, Pages 4457-4476. (1998)
- [Reddy 2000] Reddy J.N, "Analysis of functionally graded plates", *Int J Numer Method Eng*, 47(41–43):663–684, (2000).
- [Reddy 2001] Reddy J.N, Wang, C.M., Lim, G.T. and Ng, K.H. (2001), Bending solutions of Levinson beams and plates in terms of the classical theories, *Int. J. Solids Struct.* 38, 4701–4720. (2001)
- [Reddy 2004] Reddy J.N, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC Press, Baton Rouge, Florida, USA, (2004).
- [Reddy 2011] Reddy J.N. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates,

- Int. J. Aerospace Lightweight Structures 1 1-21. (2011)
- [Refrafi 2020] Refrafi et al., "Effects of hygro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations", *Computers and Concrete*, 25(4), 311-325. (2020)
- [Reissner 1945] Reissner E, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates,. *J. Appl. Mechanic.*, vol. 12, pages 69-77, (1945).
- [Sahla 2019] Sahla et al., "Free vibration analysis of angle-ply laminated composite and soft core sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, 33(5), 663-679. (2019)
- [Sator 2016] Sator L, Sladek V, Sladek J, Young DL. "Elastodynamics of FGM plates by mesh-free method", *Composite Structures* 2016; 140: 309–322, (2016)
- [Shariati 2020] Shariati et al. "Extremely large oscillation and nonlinear frequency of a multi-scale hybrid disk resting on nonlinear elastic foundations", *Thin-Walled Structures*, 154, 106840. (2020),
- [Shashank 2015] Shashank Pandey , Pradyumna S, Free vibration of functionally graded sandwich plates in thermal environment using a layerwise theory, *European Journal of Mechanics / A Solids*, (2015).
- [Shashank 2018] Shashank P, Pradyumna S., Analysis of functionally graded sandwich plates using a higher-order layerwise theory, *Composites Part B*, 153, 325–336, (2018)
- [Shyang-ho 2003] Shyang-ho Chi, Chung Yen-Ling., Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings, *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, (2003)
- [Simsek 2017] Simsek, M, Al-shujairi, M, Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads, *Composites Part B*, 108, 18-34, (2017).
- [Slimane 2018] Slimane M. "Analysis of bending of ceramic-metal functionally graded plates with porosities using of high order shear theory", *Advanced engineering forum*. 30:54-70. (2018)
- [Ta 2015] Ta H.D, Noh H.C "Analytical solution for the dynamic response of functionally graded rectangular plates resting on elastic foundation using a refined plate theory", *Applied Mathematical Modelling* ; 39: 6243–6257. (2015)
- [Taczała 2015] Taczała M, Buczkowski R, Kleiber M "Postbuckling analysis of functionally graded plates on an elastic foundation", *Composite Structures* 2015; 132: 842–847. (2015)
- [Tai 2012] Tai H. T, Dong-Ho.C «A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation", *Composites Part B: Engineering*, Volume 43, Issue 5, July 2012, Pages 2335-2347. (2012)
- [Talha 2010] Talha Mohammad B.N, "Singh, Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory", *Appl. Math. Model.* 34 (2010) 3991–4011. (2010)

- [Thai 2013a] Thai H.T, Kim S-E, “Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation”, *International Journal of Mechanical Sciences* 2013; 75:34–44. (2013)
- [Thai 2013b] Thai H.T and Choi D.H. Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates, *Finite Elem. Anal. Des.* 75 (2013) 50–61. (2013)
- [Thai 2013c] Thai H.T, Kim S.E, A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates, *Compos. Struct.* 99 172-180. (2013)
- [Thai 2016] Thai CH, Zenkour AM, Wahab MA, Nguyen-Xuan H. "A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric analysis", *Composite Structures*; 139: 77–95. (2016)
- [Tornabene 2009] Tornabene F, free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198 2911–2935. (2009)
- [Tornabene 2013] Tornabene F, Fantuzzi N, Viola E, Ferreira A.J.M., Radial basis function method applied to doubly-curved laminated composite shells and panels with a General Higher- order Equivalent Single Layer formulation. *Composites Part B: Engineering*, 55 642- 659. (2013)
- [Tornabene 2014] Tornabene F, Fantuzzi N, Viola E, Ferreira A.J.M, Static analysis of doubly-curved anisotropic shells and panels using CUF approach, differential geometry and differential quadrature method, *Comp Stru*, 107 675 – 697. (2014)
- [Toshio 1999] Toshio Hirai, Leng Chen Recent and Prospective Development of Functionally Graded Materials in Japan. *Mat Sci Forum* (Vol 308-311); 509-514. (1999).
- [Tounsi 2008] Tounsi A, Hassaine Daouadji T., Benyoucef S., Adda bedia E A. "Interfacial stresses in FRP-plated RC beams: Effect of adherend shear deformations", *International journal adhesion and adhesives*, volume 29 pages 313-351. (2008)
- [Tounsi 2013] Tounsi A, Houari M S A, Benyoucef S, Adda bedia E A [Tou2013], A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates, *Aero. Sci. Tech.* 24 209–220. (2013)
- [Tounsi 2020] Tounsi A. et al., "A four variable trigonometric integral plate theory for hygro-thermo-mechanical bending analysis of AFG ceramic-metal plates resting on a two-parameter elastic foundation", *Steel and Composite Structures*, 34(4), 511-524. (2020)
- [Tran 2015] Tran L.V, Ly H.A, Lee J, Abdel Wahab M, Nguyen-Xuan H. "Vibration analysis of cracked FGM plates using higher-order shear deformation theory and extended isogeometric approach", *International Journal of Mechanical Sciences*; Volumes 96–97, June 2015, Pages 65-78. (2015)
- [Uemura 2020] Uemura S, “Activities of FGM on New Application”, *materials science forum* (volumes 423-425), (1-10), (2020).

- [Uymaz 2007] Uymaz B., Aydogdu M. Three-dimensional vibration analyses of functionally graded plates under various boundary conditions. *J Reinf Plast Compos*; 26(18):1847–63. (2007)
- [Vel 2004] Vel, S.S. et Batra, R.C., «Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates», *Journal of Sound and Vibration*, 703-730. (2004)
- [Viola 2013a] Viola E, Tornabene F and Fantuzzi N, , General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels. *Composite Structures*, 95, 639-666. (2013)
- [Viola 2013b] Viola E, F. Tornabene F and Fantuzzi N, , Static analysis of completely doublycurved laminated shells and panels using general higher-order shear deformation theories. *Composite Structures*, 101 59-93. (2013)
- [Watari 2004] Watari Fumio et al, Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application, *Composites Science and Technology*, Volume 64, Issue 6, Pages 893-908, May (2004)
- [Watari 2013] Watari F, Yokoyama A, Omori M, Hirai T, Kondo H, and Uo M, et al, "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application", *Compos Sci Technol*, vol.64, pp. 893–908, (2004)
- [Wattanasakulpong 2012] Wattanasakulpong N, Prusty B.G, Kelly D.W, Hoffman M, , Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation, *Mater. Des*, 36, 182–190. (2012)
- [Wattanasakulpong 2014] Wattanasakulpong N, and Ungbhakorn V., “Linear and non linear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities”, *Aero. Sci. Technol.*, 32(1), 111-120. (2014)
- [Xiang 1994] Xiang Y., Wang C.M, Kitipornchai S. "Exact vibration solution for initially stressed Mindlin plates on Pasternak foundation", *Int. J. Mech. Sci.* 36 311–316 (1994)
- [Yaghoobi 2013] Yaghoobi H., Yaghoobi P, Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach, *Meccanica* 48 2019–2035. (2013)
- [Yang 2005] Yang J, Liew K.M, Kitipornchai S “Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates”. *Compos. Sci. Technol.* 65–1175. (2005)
- [Yazid 2018] Yazid et al., “A novel nonlocal refined plate theory for stability response of orthotropic single-layer graphene sheet resting on elastic medium”, *Smart Struct. Syst.*, 21(1), 15-25. (2018)
- [Younsi 2018] Younsi et al., "Novel quasi-3D and 2D shear deformation theories for bending and free vibration analysis of FGM plates", *Geomechanics and Engineering*, Vol. 14, No. 6: 519-532. (2018)
- [Zaoui 2019] Zaoui et al., “New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations”, *Compos. Part B*,

- 159, 231-247. (2019)
- [Zarga 2019] Zarga D , Tounsi A, Bousahla AA, Bourada F, and Mahmoud, S.R., Thermomechanical bending study for functionally graded sandwich plates using a simple quasi-3D shear deformation theory, *Steel and Composite Structures*, 32(3), 389-410, (2019)
- [Zenkour 2006] Zenkour A. M, Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech*;77(4):197–214. (2006)
- [Zenkour 2006] Zenkour A. M., Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl. Math. Modell.* 30 67-84. (2006)
- [Zenkour 2009] Zenkour A. M. "The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations" *International Journal of Mechanical Sciences* 51 869–880. (2009)
- [Zenkour 2010] Zenkour A.M., , Alghamdi, N., Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 17, 419-432, (2010)
- [Zenkour 2014] Zenkour A. M.,, Allam, M. N. M. and Radwan, A. F. "Effects of hygrothermal conditions on cross-ply laminated plates resting on elastic foundations", *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 14, pages 144–159. (2014)
- [Zenkour 2018] Zenkour A. M, and Radwan, A.F. "Compressive study of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak foundations under various boundary conditions using hyperbolic shear deformation theory" *Archives of civil and mechanical engineering*, 18, 645–658. (2018)
- [Zhang 2015] Zhang D-G, Zhou H-M. "Mechanical and thermal post-buckling analysis of FGM rectangular plates with various supported boundaries resting on nonlinear elastic foundations", *Thin-Walled Structures* 2015; Volume 89, pages 142-151. (2015)
- [Zhao 2009] Zhao X, Lee Y.Y, Liew K.M [Zha2009], Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates, *Compos. Struct.* 90 (2) 161–171. (2009)
- [Zhou 2004] Zhou D, Cheung Y.K, Lo S.H., Au F.T.K , "Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundations", *Int. J. Numer Methods Eng.* 59(10) 1313–1334. (2004)
- [Zhu 2001] Zhu J, Lai Z, Yin Z, Jeon J, Lee S, “Fabrication of ZrO₂–NiCr functionally graded material by powder metallurgy”, *Mater. Chem. Phys.* 68, 130–135, (2001).
- [Zine 1994] Zine et al., “Bending analysis of functionally graded porous plates via a refined shear deformation theory”, *Computers and Concrete*, 26(1), 63-74 (2020)
- [Ziou 2016] Ziou H, Guenfoud H, Guenfoud M, Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. *International Journal of Structural Engineering*; 7(3), 239-261. (2016)